idő alatt éri el a labda (mintha h magasságból szabadon esne), ezalatt vízszintesen

$$s = vt = \sqrt{2g(H-h)} \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} = 2\sqrt{h(H-h)}$$

utat tesz meg.

A számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség miatt:

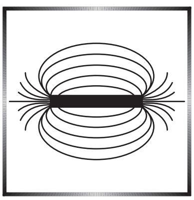
$$\sqrt{h(H-h)} \leqslant \frac{h+H-h}{2}, \quad \text{vagyis} \quad s \leqslant H.$$

A maximum értéket akkor veszi fel az $s(h)$ függvény, ha

$$h = H - h, \qquad \text{azaz} \qquad h = \frac{H}{2}.$$

Vincze Lilla (Szeged, Radnóti M. Kísérleti Gimn., 9. évf.)

30 dolgozat érkezett. Helyes 23 megoldás. Kicsit hiányos (1–2 pont) 7 dolgozat.



Fizika feladatok megoldása

Áprilisi pótfeladat*. *Egy végtelen hosszú, vízszintes rúdon N darab azonos tömegű, tökéletesen rugalmas gyöngyszem csúszhat súrlódásmentesen. A gyöngyöket egy adott pillanatban valamilyen (tetszés szerint választható) kezdőállapotból elindítjuk.*

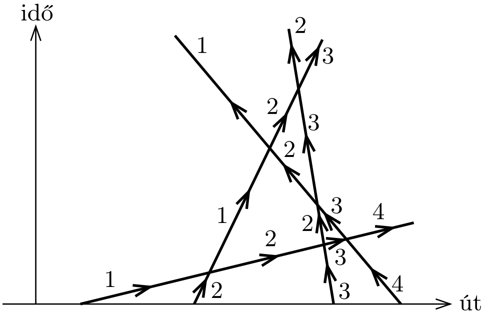
a) Legfeljebb hány ütközés jöhet létre a továbbiakban?

b) Hogyan módosul az eredmény, ha a rúd egyenes, de nem vízszintes?

Orosz feladat

Megoldás. *a*) Az ütközések közötti időszakokban a gyöngyszemek (amelyeket az egyszerűség kedvéért pontszerűnek tekintünk) egyenes vonalú egyenletes mozgással mozognak. Tudjuk továbbá, hogy azonos tömegű testek rugalmas ütközésekor a testek sebessége „felcserélődik”.

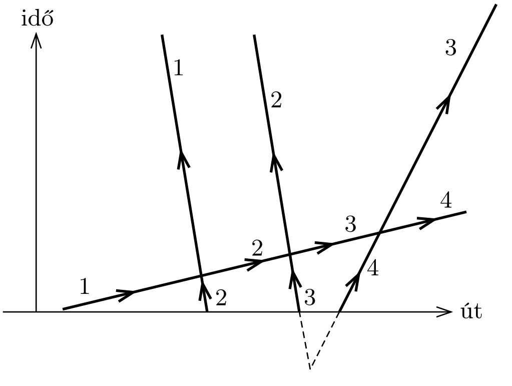
Ábrázoljuk a gyöngyszemek mozgását és ütközését egyetlen út–idő diagramon! Az ütközésmentes időszakokban mindegyik gyöngyszem mozgása egy-egy egyenessel adható meg. Ezek az egyenesek (a gyöngyszemek „világvonalai”) az ütközések után is „törésmentesen” folytatódnak, csak az ütközések résztvevői szerepet cserélnek. Az ütközések számát a gyöngyszemek mozgását megadó egyenesek metszéspontjainak száma adja meg (*1. ábra*). (Az ábrán látható számok a gyöngyszemek



1. ábra

azonosítását segítik.) Az ütközések (metszéspontok) száma legfeljebb $N(N-1)/2$ lehet.

Természetesen előfordulhat, hogy valamelyik két egyenes párhuzamos, ezeknek nincsen metszéspontja, illetve az is lehet, hogy két egyenes metszéspontja az indításnál korábbi időpontot jelöl ki (*2. ábra*). Ezekben az esetekben a ténylegesen bekövetkező ütközések száma *kevesebb,* mint $N(N-1)/2$.



2. ábra

b) A lejtős rúdon súrlódásmentesen csúszó, tehát egyenletesen gyorsuló gyöngyszemek mindegyikének világvonala parabola. Ezen parabolák metszéspontjainak összeszámlálása az előzőnél sokkal bonyolultabb feladatnak látszik, de – szerencsére – nem ez a helyzet.

A gyöngyszemek a gyorsulását a rúd α hajlásszöge határozza meg ($a=g\sin\alpha$). Üljünk bele – gondolatban – egy olyan koordináta-rendszerbe, amely éppen a gyorsulással mozog a rúddal párhuzamosan. Ebből a rendszerből szemlélve a gyöngyszemek „súlytalanok”, mozgásuk tehát ugyanolyan egyenes vonalú, egyenletes mozgás, mint amilyen a vízszintes rúdnál volt. Emiatt az ütközések száma most is legfeljebb $N(N-1)/2$ lehet.

(G. P.)

[1] A KöMaL 2017. évi áprilisi számában megjelent, pontversenyen kívüli feladat.

P. 4886. *Egy* 10 m^3-*es állandó térfogatú tartályban a kezdetben* 30 °C-*os és* 50% *relatív páratartalmú levegő* 5 °C-*ra hűl le. Mennyi víz csapódik ki?*

(*4 pont*) *Vermes Miklós* (1905–1990) feladata

Megoldás. Táblázatból kiolvasható, hogy $T_1 = 30\,^{\circ}$C-os hőmérsékleten a telített vízgőz sűrűsége $\varrho_1 = 0{,}0303$ kg/m^3, $T_2 = 5\,^{\circ}$C-on pedig $\varrho_2 = 0{,}0068$ kg/m^3.

A kezdeti T_1 hőmérsékleten telítettség (100%-os páratartalom) esetén a $V = 10$ m^3-es tartályban $\varrho_1 V = 0{,}303$ kg tömegű gőz lenne, az 50%-os relatív páratartalmat figyelembe véve a vízgőz tényleges tömege $m_1 = \frac{1}{2}\varrho_1 V = 0{,}151$ kg.

T_2 hőmérsékleten telített állapotot feltételezve a vízgőz tömege $m_2 = \varrho_2 V = 0{,}068$ kg. Látható, hogy $m_1 > m_2$, vagyis a folyamat kvalitatív leírása a következő: A hőmérséklet csökkenése során a kezdetben telítetlen vízgőz egy bizonyos hőmérsékleten (a harmatponton) telítetté válik, eddig vízkicsapódás nem tapasztalható. A hőmérséklet további csökkenésével a vízgőz mindvégig telített állapotú lesz, de mivel a sűrűsége fokozatosan csökken, bizonyos mennyiségű víz kicsapódik, aminek a tömege:

$$\Delta m = m_1 - m_2 = 0{,}083\ \text{kg} = 83\ \text{g}.$$

Megjegyzések. 1. A megoldás során elhanyagoltuk a kicsapódó víz térfogatát, ami kb. $8 \cdot 10^{-5}$ m^3. Ez 5 nagyságrenddel kisebb, mint a tartály térfogata, tehát az elhanyagolás jogos volt.

2. A megoldás során nem foglalkoztunk a levegő jelenlétével, mivel ez csak a tartályban mérhető nyomást befolyásolja, a vízgőz telítési viszonyait nem.

Marozsák Tóbiás (Budapest, Óbudai Árpád Gimn., 11. évf.)

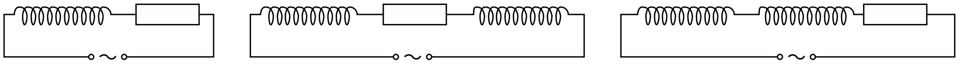
Megjegyzések. 1. A telített vízgőz nem túl magas (a kritikus ponttól távoli) hőmérsékleteken ideális gáznak tekinthető, és a sűrűsége a táblázatokban megadott gőznyomásadatokból is meghatározható. Ugyanakkor a táblázatban megtalálhatjuk a telített gőz sűrűségadatait is; célszerűbb, ha ezen (pontosabb) értékeket használjuk a számításainkban. Ha a feladat megoldása során egy elméleti képletet (esetünkben az ideális gáz állapotegyenletét) a szokásostól eltérő helyen alkalmazzuk, akkor utalnunk kell az alkalmazhatóság jogosságára.

2. A leírt gondolatmenet nem alkalmazható akkor, ha egy 10 köbméteres szoba légteréből kicsapódó pára mennyiségét keressük. Ott ugyanis a levegő és a vízgőz együttes nyomása (ami gyakorlatilag a levegő nyomása) nem változik, tehát a lehűlő levegő mellé a (nem teljesen légmentesen záró) nyílászárókon keresztül külső levegő is áramlik, aminek tömege az eredeti levegő tömegének majdnem 10 százaléka. Ha ez a beáramló levegő is ugyanakkora páratartalmú, mint a szoba eredeti levegője volt, akkor a kicsapódó pára mennyisége majdnem 10%-kal több lesz a számítottnál. Természetesen lehetséges, hogy a külső levegő páratartalma sokkal kisebb, mint a szobáé, ilyenkor nem kell korrigálnunk a korábbi, 83 grammos eredményt.

82 dolgozat érkezett. Helyes 68 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 9, hiányos (2 pont) 1, nem versenyszerű 4 dolgozat.

P. 4914. *Egy soros RL-körben (a) a feszültségforrás váltakozó feszültsége és az áram közötti fáziskülönbség 45°. Sorba kötve velük egy, az előzővel megegyező, L induktivitású tekercset, ez a fáziskülönbség 65°-nak, illetve 70°-nak adódik aszerint, hogy az új tekercset (b) az ellenállás, vagy (c) a régi tekercs oldalára tesszük. Hogy lehetséges ez?*

Mennyi a három esetbeli impedanciák aránya?



(*a*) (*b*) (*c*)

(Lásd még a „Két párhuzamosan kapcsolt ideális tekercs eredő induktivitása" című cikket a KöMaL 2011. évi decemberi számának 557. oldalán és a honlapunkon: `www.komal.hu/cikkek/cikklista.h.shtml#fiz`.)

(*5 pont*) Közli: *Szász Krisztián,* Budapest

Megoldás. A *b*) esetben a tekercsek (a közöttük lévő ellenállás miatt) feltehetően távolabb vannak egymástól, mint a *c*) esetben. Mindkét elrendezésben mindegyik tekercs mágneses indukcióvonalainak bizonyos része áthalad a másik tekercsen is. Az egyes tekercsek mágneses fluxusának változását „megérzi" a másik tekercs is, hiszen az egyik tekercs áramának megváltozása esetén feszültség indukálódik a másik tekercsben is. Így az eredő induktivitás meghatározásánál számolni kell a kölcsönös indukciós együtthatóval, amelyet a hivatkozott cikk szerint $M=k\sqrt{L_1L_2}$ alakban írhatunk fel. Esetünkben $L_1=L_2=L$, tehát $M=kL$. A csatolás erősségére jellemző k szám – többek között – függ a tekercsek távolságától, tehát a *b*) és a *c*) esetben különböző lehet.

Az eredő induktivitás nem egyszerűen a két tekercs induktivitásának összegeként, hanem a következő összefüggés alapján határozható meg:

$$L_{\text{eredő}}=L_1+L_2+2M=2L(k+1).$$

Az impendanciák arányának meghatározásához érdemes Z-ket az ohmos ellenállás R nagyságával (ez mindhárom esetben ugyanakkora) és a fázisszögekkel kifejezni:

$$Z_a=\frac{R}{\cos\varphi_a},\quad Z_b=\frac{R}{\cos\varphi_b},\quad Z_c=\frac{R}{\cos\varphi_c},$$

ahonnan a keresett arány

$$Z_a:Z_b:Z_c=\frac{1}{\cos\varphi_a}:\frac{1}{\cos\varphi_b}:\frac{1}{\cos\varphi_b}=1{,}41:2{,}37:2{,}92.$$

Pszota Máté (Révkomárom, Selye János Gimn., 11. évf.)
dolgozata alapján

Megjegyzés. Az $\omega L_{\text{eredő}}=R\,\mathrm{tg}\,\varphi$ összefüggés felhasználásával kiszámíthatjuk, hogy a *b*) esetben az eredő induktivitás $2{,}14\,L$, a *c*) esetben pedig $2{,}74\,L$, és innen megkaphatjuk a csatolások erősségét is: $k_b=0{,}07$ és $k_c=0{,}37$. Látható, hogy az előzetes várakozásunkkal összhangban az egymás melletti tekercsek mágneses csatolása erősebb, mint az ellenállás két oldalán elhelyezkedő tekercseké.

22 helyes dolgozat érkezett.