közléséhez. A matematika, fizika és informatika feladatokkal kapcsolatos kérdéseket a `mat-szerk@komal.hu`, `fiz-szerk@komal.hu`, illetve `inf-szerk@komal.hu` címekre várjuk. Reklamációkat a feladat értékelése után két hétig fogadunk el.

Mind a matematika, mind a fizika versenyek hivatalos végeredménye a 2018. szeptemberi számunkban jelenik meg. A legeredményesebb versenyzők arcképét 2018. decemberi számunkban közöljük. A legjobbak a MATFUND Középiskolai Matematikai és Fizikai Alapítvány pályadíjait és tárgyjutalmakat kapnak a 2018. évi KöMaL Ankét rendezvényén. Az okleveleket postán küldjük el.

Néhány megjegyzés

A folyóirat elektronikus változatát havonta frissítjük. A mindenkori pontszámokat (a legeredményesebb versenyzők fényképeivel) rendszeresen közöljük. A lapban kitűzött feladatok a kitűzés hónapjának 28. napjától hozzáférhetők a honlapon.

Javasoljuk, hogy beküldött dolgozataik másolatotát őrizzék meg, hogy a lapban közölt megoldással össze tudják hasonlítani. Ha a dolgozat esetleg elvész a postán, csak másolat esetén tudjuk elfogadni a reklamációt.

Szép, érdekes és nem közismert feladatokat javasolhatnak kitűzésre. A javasolt feladatokat (megoldásokkal együtt) a szerkesztőség címére küldjék el.

A diákok elfogadott javaslatait év végén beszámítjuk a különdíjért folyó versenybe.

Szeretnénk, ha a kitűzött kérdések nem zárulnának le véglegesen a beküldési határidővel, a közölt megoldással. Erre teremt lehetőséget az internetes KöMaL-fórum. Bármely, a lapunkban megjelent feladathoz, cikkhez kapcsolódó megjegyzést, általánosítást szívesen látunk és alkalomadtán közöljük.

Örömmel fogadunk feladatjavaslatokat, cikkeket, szakköri munkáról szóló beszámolókat, közlésre alkalmas iskolai pályamunkákat. Javaslataikat, közleményeiket elküldhetik postán, vagy személyesen juttathatják el szerkesztőségünkbe.

Kérjük a szerkesztőségnek szánt üzeneteket a `szerk@komal.hu` e-mail címre küldeni.

Végezetül mindenkinek eredményes tanévet és sikeres versenyzést kíván a

Szerkesztőség

Matematika feladatok megoldása

B. 4791. *Az ABC háromszög AD és CE magasságvonalainak metszéspontja az M pont. A DE egyenes az AC oldalegyenest a P pontban metszi. Igazoljuk, hogy a PM egyenes merőleges a háromszög B csúcsból induló súlyvonalára.*

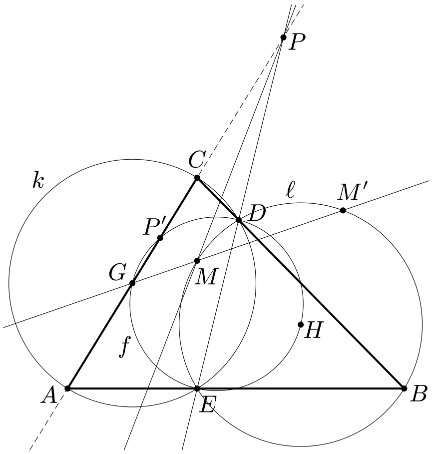
(*5 pont*) (*Kvant*)

I. megoldás. Először tisztázzunk elfajuló, illetve lehetetlen eseteket. A D vagy E pontok akkor eshetnek egybe valamelyik csúccsal, ha a háromszög derékszögű. Ha a derékszög B-nél van, akkor $D \equiv E \equiv B$, nem jöhetett létre a DE-egyenes.

Ha A-nál vagy C-nél van (mivel a két eset lényegében ugyanaz, elég pl. csak az A csúcsra vizsgálni), akkor $A \equiv E \equiv M$, így $P \equiv M$, vagyis most a PM-egyenes nem jöhetett létre. Ezeken az eseteken kívül M nem eshet egybe se talpponttal, se csúccsal, se P-vel. Lehetséges még, hogy $AC||DE$, ilyenkor $AEDC$ húrtrapéz, így $BAC\sphericalangle = BCA\sphericalangle$ miatt ABC egyenlő szárú. Tehát fel kell tenni még, hogy $BC \neq AB$.

Legyen az AC szakasz felezőpontja G. Bizonyítandó, hogy $BG \perp PM$. Mivel $CDA\sphericalangle = CEA\sphericalangle = 90°$, azért D és E az AC szakasz Thálesz-körére illeszkedik. Ezt a kört jelölje k.

Másrészt $MDB\sphericalangle = BEM\sphericalangle = 90°$, ezért D és E a BM szakasz Thálesz-körére is illeszkedik. Legyen ez a kör ℓ, a középpontja pedig BM felezőpontja, H.



1. ábra

Most azt bizonyítjuk, hogy a GD szakasz (és hasonló módon a GE szakasz) az ℓ körhöz húzott érintőszakasz. G, D és H az ABC háromszög Feuerbach-körére* illeszkednek (melyet az *1. ábrán* f-fel jelölünk), a körülírt kör K középpontját viszonyítási pontnak választva pedig

$$\frac{\overrightarrow{G}+\overrightarrow{H}}{2} = \frac{\frac{\overrightarrow{A}+\overrightarrow{C}}{2} + \frac{(\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}+\overrightarrow{C})+\overrightarrow{B}}{2}}{2} = $$

$$= \frac{\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}+\overrightarrow{C}}{2},$$

ami a Feuerbach-kör középpontjának helyvektora (felhasználtuk a

$$\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC}$$

összefüggést is). Így GH átmérő, a Thálesz-tétel miatt $GDH\sphericalangle = 90°$, GD csakugyan érintőszakasz.

Most invertáljunk k-ra. A GD szakasz a k kör sugara, ezért – a szelőszorzattételt is figyelembe véve – ℓ-nek a k-ra invertált képe önmaga. Keressük P képét. Az inverzió illeszkedéstartó, így P egyrészt a DE egyenes képére illeszkedik. A D és az E fixpontok, az egyenes pedig nem megy át G-n, így DE képe egy G-n átmenő kör: DEG körülírt köre, ami ismét ABC Feuerbach-köre. Másrészt P illeszkedik AC képére, ami fixegyenes. Így P' az AC oldalegyenes és a Feuerbach-kör metszéspontja. Két ilyen pont van: az egyik G, de az k középpontja, így nem lehet P képe. A másik a B-hez tartozó magasság talppontja, így ez a magasságtalppont lesz P képe. (Megjegyzés: ha a magasságtalppont és G egybeesnek, akkor ABC egyenlő szárú lett volna, amit kizártunk.) Így $GPB\sphericalangle = 90°$. (Ha D, E és G egy egyenesen lennének, akkor DE is k átmérője lenne, így a Thálesz-tétel szerint $ECD\sphericalangle =$

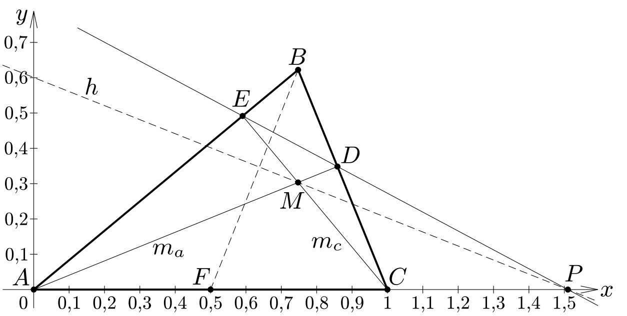
*https://hu.wikipedia.org/wiki/Feuerbach-kör.

$= DAE\sphericalangle = 90°$ is igaz lenne, vagyis az ABC háromszög AE és CD oldalegyenesei párhuzamosak lennének, ami lehetetlen.)

Most határozzuk meg M'-t is. Ez rajta van az ℓ fixkörön, így GM és ℓ második metszéspontja. Mivel az ℓ kör BM Thálesz-köre, így $GM'B\sphericalangle = MM'B\sphericalangle = 90°$ (ha M és M' fordított sorrendben helyezkednek el, akkor is igaz az állítás, mert kiegészítő szögek lesznek). Most már meghatározhatjuk PM képét. G-n nem mehet át, mert akkor az M pont $PG \equiv AC$-n lenne, ami a derékszögű háromszög lehetetlen esetéhez vezet vissza. Így PM képe a G-n, P'-n és M'-n átmenő kör. Mivel $GM'B\sphericalangle = GP'B\sphericalangle = 90°$, azért ez BG Thálesz-köre. Eközben BG egy G-n átmenő egyenes, így képe önmaga. Tehát PM képének centrálisa a BG egyenes, BG képe. Ez kör és egyenes között derékszöget jelent, így mivel az inverzió szögtartó, az eredeti PM egyenes és BG is merőlegesek voltak. Ezt kellett bizonyítani.

Polgár Márton (Budapest, Németh László Gimn., 12. évf.)
dolgozatát felhasználva

II. megoldás. Legyenek az A, B illetve C pont koordinátái rendre $(0;0)$, $(a;b)$, $(1;0)$, ahol $b \neq 0$, így állhat majd a számolás során törtek nevezőjében.



2. ábra

A továbbiakban két főbb dolgot fogunk használni:

– Adott $(x_1;y_1)$ és $(x_2;y_2)$ pontokon átmenő egyenes egyenlete:

$$y = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}x + \left(y_1 - \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}x_1\right).$$

– Két, a tengelyekkel nem párhuzamos egyenes akkor merőleges egymásra, ha meredekségeik szorzata -1.

Az AB egyenes egyenlete: $y = \frac{b}{a}x$.

A BC egyenes egyenlete: $y = -\frac{b}{1-a}x + \frac{b}{1-a}$.

A CE egyenes egyenlete: $y = -\frac{a}{b}x + \frac{a}{b}$ (az állandót onnan tudjuk, hogy az egyenes átmegy a C ponton).

Az AD egyenlete: $y = \frac{1-a}{b}x$.

Ha $a = 0$ vagy $a = 1$, akkor az ABC háromszög A-ban vagy C-ben derékszögű, D és E egyike az x tengelyen van, egybeesik M-mel és a derékszögű csúccsal, így P

is egybeesik M-mel, tehát P és M nem határoz meg egyenest. Ezeket az értékeket tehát kizárhatjuk.

Tudjuk, hogy D rajta van a BC és m_a egyeneseken, tehát felírható a következő egyenlet (a D pont első koordinátája a következő egyenletben x):

$$-\frac{b}{1-a}\cdot x+\frac{b}{1-a}-\frac{1-a}{b}\cdot x=0,$$

$$x=\frac{b^2}{(1-a)^2+b^2}.$$

(A számlálóban két nem 0 értékű szám négyzetének összege áll, tehát biztosan nem 0.) A D pont második koordinátája:

$$\frac{1-a}{b}\cdot\frac{b^2}{(1-a)^2+b^2}=\frac{b(1-a)}{(1-a)^2+b^2}.$$

Tudjuk, hogy E rajta van az AB és m_c egyeneseken, tehát felírható a következő egyenlet (az E pont első koordinátája a következő egyenletben x):

$$\frac{b}{a}x-\left(-\frac{a}{b}x+\frac{a}{b}\right)=0,$$

$$x=\frac{a^2}{a^2+b^2}.$$

Itt $b\neq 0$, ezért a számláló sem 0. Az E pont második koordinátája:

$$\frac{b}{a}\cdot\frac{a^2}{a^2+b^2}=\frac{ab}{a^2+b^2}.$$

A DE egyenes meredeksége:

$$\frac{\dfrac{b(1-a)}{(1-a)^2+b^2}-\dfrac{ab}{a^2+b^2}}{\dfrac{b^2}{(1-a)^2+b^2}-\dfrac{a^2}{a^2+b^2}}.$$

A nevezőben a D és az E pont első koordinátájának különbsége áll. Ha ez 0, akkor a két pont egybeesik egymással és a B csúccsal, vagyis az ABC háromszög B-ben derékszögű. Ekkor a feladat nem értelmezhető, így feltesszük, hogy ez nem igaz. A kifejezést egyszerűsítve a következőt kapjuk: $\frac{(1-2a)b}{-a^2+a+b^2}$. (Lépések: $\left(a^2+b^2\right)$-tel, illetve $\left((1-a)^2+b^2\right)$-tel való bővítés, szorzattá alakítás, b^2+a^2-1 szorzótényezővel való egyszerűsítés. Ha ez utóbbinak 0 lenne az értéke, akkor a nevező is 0 lenne, viszont nem 0 értékről indultunk, és csak szoroztunk nem 0 értékű kifejezésekkel, tehát nem lehet 0 a nevező. A végeredmény így egy értelmezhető tört.)

Mivel $1-2a=0$ esetén $AB=BC$, és ekkor nem jönne létre a P metszéspont, ezért feltehetjük, hogy $1-2a\neq 0$.

Mivel az egyenes átmegy az E ponton, a képletében szereplő konstans értéke:

$$\frac{ab}{a^2+b^2}-\frac{(1-2a)b}{-a^2+a+b^2}\cdot\frac{a^2}{a^2+b^2},$$

aminek egyszerűbb alakja $\frac{ab}{-a^2+a+b^2}$. (Lépések: $0\neq\big(-a^2+a+b^2\big)$-tel való bővítés, összevonás, szorzattá alakítás, $0\neq\big(a^2+b^2\big)$-tel való egyszerűsítés. Így a végeredmény egy értelmezhető tört.)

A DE egyenes egyenlete tehát:

$$y=\frac{(1-2a)b}{-a^2+a+b^2}x+\frac{ab}{-a^2+a+b^2}.$$

A P pontról tudjuk, hogy rajta van az AC egyenesen, vagyis második koordinátája 0, és rajta van a DE egyenesen, tehát felírható a következő egyenlet a P pont első koordinátájára: $\frac{(1-2a)bx+ab}{-a^2+a+b^2}=0$. Ez akkor igaz, ha $(1-2a)bx+ab=0$, vagyis $x=\frac{-a}{1-2a}$.

Az M pont első koordinátája a, ugyanis a BM egyenes merőleges az x tengelyre. Mivel M rajta van az m_a egyenesen, második koordinátája $\frac{1-a}{b}a=\frac{a-a^2}{b}$.

A PM egyenes meredeksége:

$$\frac{\frac{a-a^2}{b}-0}{a-\frac{-a}{1-2a}}=\frac{\frac{a-a^2}{b}}{\frac{2a-2a^2}{1-2a}}=\frac{\frac{1}{b}}{\frac{2}{1-2a}}=-\frac{1-2a}{2b}.$$

F koordinátái $(0;0,5)$, ugyanis AC felezőpontja. Tehát a BF egyenes egyenlete: $\frac{b-0}{a-0{,}5}=\frac{2b}{2a-1}$. Mivel $-\frac{1}{\frac{2b}{2a-1}}=-\frac{1-2a}{2b}$, azért BF merőleges PM-re.

Szabó Dávid (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 9. évf.)
dolgozatát felhasználva

Megjegyzések. 1. A fő hiba a megoldásokban a diszkusszió hiánya volt. Ez a koordinátageometriai megoldásokban nem csupán geometriai, de algebrai hiányt is jelent, jellemzően 0-val való osztást.

2. Többen a számos fellépő húrnégyszöget használták ki, támaszkodva a kerületi szögek tételére, illetve bizonyos esetekben a hatványvonal tulajdonságaira; mivel sok kört lehetett észrevenni, több különböző úton is el lehetett jutni a megoldáshoz. Egy ilyen megoldás olvasható honlapunkon:
`https://www.komal.hu/verseny/feladat.cgi?a=feladat&f=B4791&l=hu`.

48 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 12 versenyző: Andó Angelika, Cseh Kristóf, Csorba Benjámin, Fuisz Gábor, Horváth András János, Kocsis Júlia, Kondákor Márk, Nagy Dávid Paszkál, Polgár Márton, Szabó Dávid, Vágó Ákos, Váli Benedek. 4 pontos 17, 3 pontos 10, 2 pontos 3, 1 pontos 2, 0 pontos 3 dolgozat. Nem versenyszerű 1 dolgozat.

B. 4840. *Mutassuk meg, hogy minden egész szám felírható $x^2+y^2-z^2$ alakban alkalmas x, y, z pozitív egész számokkal.*

(*3 pont*)

Megoldás. Legyen a egy páratlan szám, ahol $|a|>1$ és $y=\left|\frac{a+1}{2}\right|$ és $z= =\left|\frac{a-1}{2}\right|$.

Legyen először $x=1$. Ekkor x, y és z pozitív egészek a kikötései miatt és

$$n=x^2+y^2-z^2=1+\frac{a^2+2a+1}{4}-\frac{a^2-2a+1}{4}=a+1.$$

Tehát ezzel a módszerrel elő tudjuk állítani a 3-nál nagyobb és (-1)-nél kisebb páros számokat, vagyis $n\leqslant -2$ vagy $4\leqslant n$ és n páros szám. Kimaradó páros számok a 0 és a 2.

Legyen most $x=2$. Ekkor x, y és z pozitív egészek a kikötései miatt és

$$n=x^2+y^2-z^2=4+\frac{a^2+2a+1}{4}-\frac{a^2-2ab+1}{4}=a+4.$$

Tehát ezzel a módszerrel elő tudjuk állítani a 6-nál nagyobb és a 2-nél kisebb páratlan számokat, vagyis $n\leqslant 1$ vagy $7\leqslant n$ és n páratlan szám. Kimaradó páratlan számok a 3 és az 5.

Már csak a 0, 2, 3, 5 számokat kell előállítani:

$$0=3^2+4^2-5^2;$$

$$2=3^2+3^2-4^2;$$

$$3=4^2+6^2-7^2;$$

$$5=4^2+5^2-6^2.$$

Tehát minden egész számra bebizonyítottuk, hogy felírható $x^2+y^2-z^2$ alakban.

Busa Máté (Nagykanizsa, Batthyány Lajos Gimn., 11. évf.)
dolgozata alapján

120 dolgozat érkezett. 3 pontos 68, 2 pontos 12, 1 pontos 30, 0 pontos 10 dolgozat.

B. 4847. *Legyen f a $[0;1]$ intervallumon értelmezett pozitív, korlátos függvény. Igazoljuk, hogy léteznek olyan x_1 és x_2 számok, amelyekre*

$$\frac{(x_2-x_1)f^2(x_1)}{f(x_2)}>\frac{f(0)}{4}.$$

(*6 pont*) *O. Reutter* (Németország)

Megoldás. A megoldás során elég annyit feltenni, hogy f egy a $[0,1]$ intervallumon értelmezett pozitív függvény; a korlátosság feltétele elhagyható. Indirekt bizonyítva föltesszük, hogy

$$\text{(i)}\qquad \frac{(x_2-x_1)f^2(x_1)}{f(x_2)}\leqslant\frac{f(0)}{4}$$

teljesül minden x_1 és x_2 számra. (A továbbiakban mindig $x, x_1, x_2 \in [0,1]$ és $x_2 \geqslant x_1$.) Ebből belátjuk, hogy

(ii) minden n pozitív egész számhoz van olyan c_n pozitív konstans, hogy minden x-re $f(x) \geqslant c_n x^n f(0)$.

Ehhez átrendezzük (i)-et (pozitív számokkal szorzunk):

$$4(x_2 - x_1)f^2(x_1) \leqslant f(x_2)f(0); \tag{iii}$$

$x_1 = 0$-t behelyettesítve: $f(x_2)f(0) \geqslant 4x_2 f^2(0)$, azaz $f(x_2) \geqslant 4x_2 f(0)$ minden x_2-re. Ezzel meg is kaptuk az első c_n értéket: $c_1 = 4$.

Tegyük fel, hogy kaptunk már egy pozitív c_n értéket, amely minden x-re teljesíti az $f(x) \geqslant c_n x^n f(0)$ egyenlőtlenséget. Ekkor (iii)-at felírva, majd x_1-re alkalmazva az előbbi egyenlőtlenséget kapjuk, hogy

$$f(x_2)f(0) \geqslant 4(x_2 - x_1)f^2(x_1) \geqslant 4(x_2 - x_1)c_n^2 x_1^{2n} f^2(0).$$

Osztva $f(0) > 0$-val és $x_1 = \frac{2nx_2}{2n+1}$ -et beírva:

$$f(x_2) \geqslant 4(x_2 - x_1)c_n^2 x_1^{2n} f(0) = 4c_n^2 f(0) \cdot \frac{(2n)^{2n}}{(2n+1)^{2n+1}} \cdot x_2^{2n+1}.$$

Ezek szerint a

$$c_{2n+1} = 4 \cdot \frac{(2n)^{2n}}{(2n+1)^{2n+1}} \cdot c_n^2$$

kielégíti (ii)-t.

Végül a k-ra vonatkozó teljes indukcióval megmutatjuk, hogy

$$c_{2^k-1} = \frac{2^{k\cdot 2^k}}{(2^k-1)^{2^k-1}}.$$

Valóban, ez teljesül, ha $k = 1$, és ha egy adott k-ra igaz, akkor az előbbiek szerint

$$c_{2^{k+1}-1} = c_{2(2^k-1)+1} = 4 \cdot \frac{\big(2(2^k-1)\big)^{2(2^k-1)}}{\big(2(2^k-1)+1\big)^{2(2^k-1)+1}} \cdot c_{2^k-1}^2 =$$

$$= 2^2 \cdot 2^{2^{k+1}-2} \cdot \frac{(2^k-1)^{2(2^k-1)}}{\big(2^{k+1}-1\big)^{2^{k+1}-1}} \cdot \frac{\big(2^{k\cdot 2^k}\big)^2}{\big((2^k-1)^{2^k-1}\big)^2} = \frac{2^{(k+1)2^{k+1}}}{\big(2^{k+1}-1\big)^{2^{k+1}-1}},$$

tehát teljesül $(k+1)$-re is.

Így minden pozitív egész k-ra és minden $x \in [0,1]$-re igaz, hogy

$$f(x) \geqslant c_{2^k-1} x^{2^k-1} f(0) = \frac{2^{k\cdot 2^k}}{(2^k-1)^{2^k-1}} x^{2^k-1} f(0) =$$

$$= 2^k \cdot \left(\frac{2^k}{2^k-1}\right)^{2^k-1} x^{2^k-1} f(0) \geqslant 2^k x^{2^k-1} f(0).$$

Speciálisan, $x=1$-re:

$$f(1) \geqslant 2^k f(0),$$

minden pozitív egész k esetén. Mivel $f(0)$ pozitív, ez ellentmondás.

Baran Zsuzsanna (Debrecen, Fazekas M. Gimn., 12. évf.)

18 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott 17 versenyző: Baran Zsuzsanna, Borbényi Márton, Daróczi Sándor, Döbröntei Dávid Bence, Gáspár Attila, Hansel Soma, Imolay András, Janzer Orsolya Lili, Kerekes Anna, Kovács Benedek, Matolcsi Dávid, Schrettner Jakab, Simon Dániel Gábor, Szabó Dávid, Szemerédi Levente, Tóth Viktor, Weisz Máté. 0 pontos 1 dolgozat.

B. 4857. *Határozzuk meg azokat az (n,k) pozitív egészekből álló számpárokat, amelyekre $\left(2^{2^n}+1\right)\left(2^{2^k}+1\right)$ osztható nk-val.*

(6 pont) *Bolgár feladat*

Megoldás. Legyen p tetszőleges, 2-nél nagyobb prím. Vizsgáljuk a

$$2^{2^1}, 2^{2^2}, 2^{2^3}, \ldots$$

számok p-vel való osztási maradékát. Ezek a számok sorban egymás négyzetei, hiszen

$$\left(2^{2^n}\right)^2 = 2^{2^{n+1}}.$$

Ha valamelyikük maradéka -1, akkor a következőé $(-1)^2=1$, és az összes többié is 1. Ebből következik, hogy a (-1)-es maradék legfeljebb egyszer fordulhat elő. Tegyük fel, hogy előfordul, azaz $2^{2^m} \equiv -1 \pmod p$, másszóval $p \mid 2^{2^m}+1$. Megmutatjuk, hogy ekkor $m<p$. Tételezzük fel ugyanis, hogy $m \geqslant p$. Akkor előtte legalább $p-1$ maradék volt, de egyik sem lehet 0, (mert egy kettőhatványt nem oszthat egy páratlan prím), továbbá egyik sem lehet -1, hiszen csak az m-edik -1. Így az összes maradék közül csak $(p-2)$-féle lehet előtte, ezért a skatulyaelv miatt lesz két megegyező maradék, mondjuk az s-edik és a t-edik, ahol $1 \leqslant s<t<m$. Ekkor, mivel egymás után egymás négyzetei vannak, és egy szám négyzetének p-vel való maradéka a szám p-vel való maradéka négyzetének a p-vel való maradéka, azért az $(s+1)$-edik és a $(t+1)$-edik maradékok is megegyeznek egymással, ugyanezért az $(s+2)$-edik és a $(t+2)$-edik is stb. Így azonban az $m-(t-s)$-edik maradék megegyezne az m-edikkel, vagyis mindkettő (-1) lenne, ami lehetetlen. Tehát valóban $m<p$.

Tegyük fel, hogy egy n,k számpárra $nk \mid \left(2^{2^n}+1\right)\left(2^{2^k}+1\right)$; szimmetria miatt feltehetjük, hogy $n \leqslant k$. Ha $n>1$, akkor legyen p az n egyik prímtényezője. Nyilván $p \neq 2$, hiszen $\left(2^{2^n}+1\right)\left(2^{2^k}+1\right)$ páratlan. Mivel $p \leqslant n \leqslant k$, a fentiek szerint sem $2^{2^n}+1$, sem pedig $2^{2^k}+1$ nem lehet p-vel osztható, de akkor a szorzatuk sem, ami ellentmondás; így szükségképpen $n=1$. Tegyük fel, hogy $k>1$, és az egyik prímosztója p. A fenti esethez hasonlóan $p>2$, és $p \leqslant k$ miatt p nem osztja a $2^{2^k}+1$ tényezőt. Ezért $p \mid k \mid \left(2^{2^n}+1\right)\left(2^{2^k}+1\right)$ csak úgy lehetséges, hogy $p \mid 2^{2^n}+1=5$, ezért – mivel k minden prímtényezője relatív prím $2^{2^k}+1$-hez – $k \mid 5$.

Tehát a lehetséges számpárok (a sorrendet is figyelembe véve): $(1,1)$, $(1,5)$, $(5,1)$, amik valamennyien teljesítik is a feladat feltételét.

Janzer Orsolya Lili (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.)

33 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott 21 versenyző: Andó Angelika, Baran Zsuzsanna, Borbényi Márton, Csahók Tímea, Daróczi Sándor, Döbröntei Dávid Bence, Gáspár Attila, Győrffy Ágoston, Imolay András, Janzer Orsolya Lili, Kerekes Anna, Mikulás Zsófia, Németh Balázs, Saár Patrik, Schrettner Jakab, Simon Dániel Gábor, Szakály Marcell, Tóth Balázs, Tóth Viktor, Weisz Máté, Zólomy Kristóf. 5 pontos 3, 3 pontos 3, 1 pontos 3, 0 pontos 3 dolgozat.

B. 4864. *Egy zsákban* 100 *piros és* 100 *kék golyó van. Addig húzzuk ki visszatevés nélkül, véletlenszerűen, egyesével a golyókat, amíg mind a* 100 *piros golyót ki nem húztuk. Határozzuk meg a zsákban maradt golyók számának várható értékét.*

(*5 pont*)

1. megoldás. Minden húzás után írjuk fel, hogy milyen golyót húztunk. Ha kéket, azt K-val, ha pirosat, azt P-vel jelöljük. A 100-adik piros után írjunk le annyi kéket, amennyi a zsákban maradt. Így egy olyan 200 hosszú P–K sorozathoz jutunk, melyben 100 db P és 100 db K van.

Összesen $\binom{200}{100}$ ilyen sorozatot tudunk felírni.

Számoljuk össze azokat a lehetőségeket, amikor k darab golyó marad a zsákban. Vagyis az utolsó k db betű K és előttük P van. A többi golyót tetszőlegesen húzhatjuk ki, azaz az első $200-k-1$ helyre 99 db P-t és $100-k$ db K-t írhatunk az összes lehetséges elrendezésben. Ezt $\binom{199-k}{99}$-féleképpen tehetjük meg (kiválasztjuk, hogy melyik helyre kerüljön piros (P) golyó.) Így annak a valószínűsége, hogy k darab golyó marad a zsákban:

$$\frac{\binom{199-k}{99}}{\binom{200}{100}}.$$

Ekkor a keresett várható érték az alábbi formában írható:

$$E=\sum_{i=0}^{100}\frac{\binom{199-i}{99}}{\binom{200}{100}}\cdot i=\left[1\cdot\binom{198}{99}+2\cdot\binom{197}{99}+\ldots+100\cdot\binom{99}{99}\right]\cdot\frac{1}{\binom{200}{100}}.$$

Célunk a szögletes zárójelben lévő kifejezés egyszerűbb alakra hozása. Ehhez az alábbi azonosságot fogjuk felhasználni:

$$\binom{n}{k}+\binom{n-1}{k}+\ldots+\binom{k}{k}=\binom{n+1}{k+1}.$$

(Ennek, az ún. zokni-szabálynak a bizonyítása: cseréljük ki az összegben a $\binom{k}{k}$ tagot $\binom{k+1}{k+1}$-re, majd jobbról balra haladva mindig az utolsó két tagot helyettesítsük az $\binom{l}{m}+\binom{l}{m+1}=\binom{l+1}{m+1}$ azonosság alapján a megfelelő taggal.)

Ez alapján az

$$\binom{198}{99}+\binom{197}{99}+\binom{196}{99}+\ldots+\binom{99}{99}=\binom{199}{100},$$

$$\binom{197}{99}+\binom{196}{99}+\ldots+\binom{99}{99}=\binom{198}{100},$$

$$\binom{196}{99}+\ldots+\binom{99}{99}=\binom{197}{100},$$

$$\vdots$$

$$\binom{100}{99}+\binom{99}{99}=\binom{101}{100},$$

$$\binom{99}{99}=\binom{100}{100}$$

egyenletekhez jutunk. Ezeket összeadva kapjuk, hogy a bal oldal épp a szögletes zárójelben álló kifejezés, míg a jobb oldalt átalakíthatjuk (ismét az a zokni-szabályt felhasználva):

$$\binom{199}{100}+\binom{198}{100}+\ldots+\binom{101}{100}+\binom{100}{100}=\binom{200}{101}=\binom{200}{99}.$$

A keresett várható érték tehát:

$$E=\frac{\binom{200}{99}}{\binom{200}{100}}=\frac{\frac{200!}{99!\cdot 101!}}{\frac{200!}{100!\cdot 100!}}=\frac{100}{101}.$$

Megjegyzés. A feladat állítása n kék és n piros golyóra is megfogalmazható, ekkor a várható érték $\frac{n}{n+1}$.

Döbröntei Dávid Bence (Pápa, Türr István Gimn. és Koll., 11. évf.)

Megjegyzés. Azt, hogy a kérdéses összeg $\binom{200}{101}$-gyel egyenlő, *Busa Máté* (Nagykanizsa, Batthyány Lajos Gimn., 11. évf.) a következőképpen bizonyította: Vegyük az első 200 pozitív egész számot. Ezek közül szeretnénk kiválasztani 101 db számot. Ezt megtehetjük $\binom{200}{101}$-féleképpen. Máshogy összeszámolva: Legyen a kiválasztott számok közül növekvő sorrendben a 100. szám egy x szám, ahol x nyilván legalább 100 és legfeljebb 199. Ilyen esetből, ahol a 100. legkisebb szám az x, pontosan $(200-x)\cdot\binom{x-1}{99}$ van, hiszen a legnagyobb kiválasztott szám $(200-x)$-féle lehet, az x-nél kisebb 99 darab számot pedig $\binom{x-1}{99}$-féleképpen lehet kiválasztani. Ha összeadjuk a lehetőségeket a lehetséges x-ekre, akkor megkapjuk, hogy

$$\binom{200}{101}=\sum_{x=100}^{199}(200-x)\cdot\binom{x-1}{99}=100\cdot\binom{99}{99}+99\cdot\binom{100}{99}+\ldots+1\cdot\binom{198}{99}.$$

II. megoldás. Feltételezhetjük, hogy az utolsó piros golyó kihúzása után a zsákban maradt golyókat is egyenként kihúzzuk. Így a 200 golyónak $\binom{200}{100}$ féle sorrendje lehet, minden eset ugyanolyan valószínű. Feltételezhetjük, hogy a golyókat fordított sorrendben húztuk ki, ekkor az első piros golyó előtt kihúzott kék golyók számának várható értékét keressük.

Állítás. *Ha összesen* 100 *piros és n kék golyónk van, akkor az első piros golyó előtt kihúzott kék golyók számának várható értéke* $\frac{n}{101}$.

Bizonyítsunk teljes indukcióval. Ha $n=0$, akkor az állítás triviális.

Ha $n\geqslant 1$, akkor az első golyó $\frac{100}{100+n}$ valószínűséggel piros, ekkor a kék golyók száma 0. Az első golyó $\frac{n}{100+n}$ valószínűséggel kék. Az indukciós feltevés miatt ezután még átlagosan $\frac{n-1}{101}$ kék golyót húzunk ki, így a kék golyók számának várható értéke:

$$\mathrm{E}=\frac{n}{100+n}\cdot\left(1+\frac{n-1}{101}\right)=\frac{n}{100+n}\cdot\frac{100+n}{101}=\frac{n}{101}.$$

Ezzel az állítást igazoltuk. Ha $n=100$, akkor a várható érték $\frac{100}{101}$.

Gáspár Attila (Miskolc, Földes Ferenc Gimn., 11. évf.)

III. megoldás. A feladatban leírt folyamatot kibővíthetjük úgy, hogy a végén a zsákban maradt golyókat is kihúzzuk, ilyen módon mindig kihúzásra kerül mind a 200 golyó.

Ekkor azon kék golyók számának várható értékét kell meghatároznunk, melyek a kihúzottak sorában az utolsó piros golyó után következnek.

Legyen p_1 annak a valószínűsége, hogy egy adott kék golyó az utolsó piros golyó után kerül kihúzásra. Ha csak ezt a kék golyót és a 100 piros golyót tekintjük, ezen 101 golyó közül mindegyik ugyanannyi eséllyel lesz utolsóként kihúzva. Vagyis a kék golyó $p_1=\frac{1}{101}$ eséllyel lesz az utolsó piros után kihúzva.

Ugyanígy, mind a 100 kék golyóról egyenként elmondható, hogy az $\frac{1}{101}$ valószínűséggel lesz az utolsó piros golyó után kihúzva. Ha a 100 kék golyóhoz egyenként valószínűségi változókat rendelünk, melyek értéke 1, ha a golyó az utolsó piros után kerül kihúzásra, és 0, ha nem, akkor a keresett várható érték a 100 valószínűségi változó összegének várható értéke. Változók összegének várható értéke pedig egyenlő a változók várható értékeinek összegével. Mivel minden golyóhoz tartozó változó $\frac{1}{101}$ eséllyel lesz 1, és a maradék eséllyel 0, minden változóhoz $\frac{1}{101}$ várható érték tartozik. Így a 100 kék golyóhoz tartozó változók várható értékeinek összege $100\cdot\frac{1}{101}=\frac{100}{101}$, vagyis az utolsó piros után húzott kék golyók számának is $\frac{100}{101}$ a várható értéke.

A keresett várható érték tehát $\frac{100}{101}$.

Kovács Benedek (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.)

IV. megoldás. Egy véletlenszerű, viszatevés nélküli kihúzást úgy is elképzelhetünk, mint 200 db golyót sorrendben, melyből 100 piros, 100 pedig kék színű. Ez azért igaz, mert amikor az utolsó piros golyót kihúzzuk, utána már csak kék marad a zsákban, azok kihúzása pedig egyféleképpen történhet meg.

Tekintsük a 100 piros golyót, amelyek 101 helyet határoznak meg (előttük és utánuk is van egy-egy hely). Ezen 101 helyre fogunk 100 db kék golyót elhelyezni. Jelölje d_i az i-edik helyen lévő golyók számát, a részeket értelemszerűen számozzuk.

Be fogjuk bizonyítani, hogy tetszőleges $1 < i \leqslant 100$ esetén $E(d_i) = E(d_{i+1})$. Ehhez vegyük az összes lehetséges kihúzást. Ezek egyértelműen összepárosíthatók, hiszen az i-edik helyen levő golyókat megcserélve az $(i+1)$-edik helyen lévőkkel, egyértelműen megkapjuk az adott kihúzás párját (ami akár önmaga is lehet). A párosítás lehetősége miatt igazoltuk, hogy $E(d_i) = E(d_{i+1})$. Ebből az egyenlőség tranzitivitása miatt $E(d_i) = E(d_j)$ tetszőleges $1 < i, j \leqslant 100$ esetén. Azt is tudjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{101} E(d_i) = 100 = \{\text{a kék golyók száma}\}.$$

Ezért

$$E(d_i) = \frac{100}{101},$$

így ez a végén zsákban maradó golyók számának várható értéke.

Nagy Nándor (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 9. évf.)

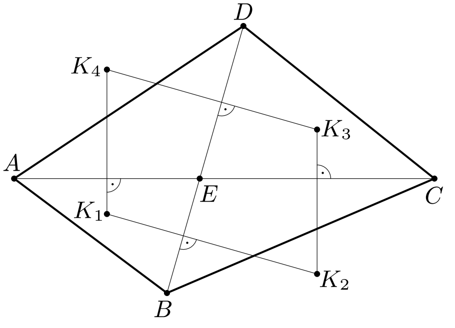
64 dolgozat érkezett. 5 pontos 35, 4 pontos 8, 3 pontos 6, 2 pontos 6, 1 pontos 3, 0 pontos 6 dolgozat.

B. 4870. *Az $ABCD$ konvex négyszög átlóinak metszéspontja az E pont. Igazoljuk, hogy az ABE, BCE, CDE és DAE háromszögek Feuerbach-köreinek középpontjai egy paralelogramma csúcsai, vagy egy egyenesbe esnek.*

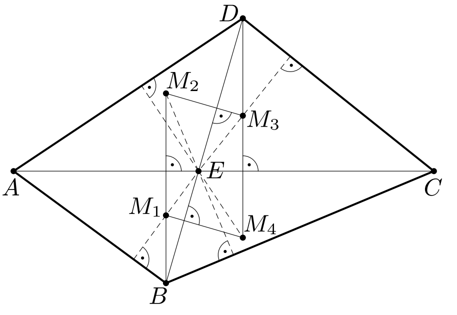
(*5 pont*) Javasolta: *Miklós Szilárd* (Herceghalom)

Megoldás. Mivel egy háromszög Feuerbach-körének középpontja a körülírt köre középpontjának és magasságpontjának a szakaszfelező pontja, így vizsgáljuk meg ezeket a pontokat.

Jelölje az ABE, BCE, CDE, ADE háromszögek körülírt körének középpontját rendre K_1, K_2, K_3, K_4 (*1. ábra*). Mivel egy háromszög körülírt körének középpontja az oldalfelezőinek a metszéspontja, így $K_1K_2 \parallel K_3K_4 \perp BD$ és $K_1K_4 \parallel K_2K_3 \perp AC$, így mivel két párhuzamos oldalpárja van $K_1K_2K_3K_4$ paralelogramma.



1. ábra



2. ábra

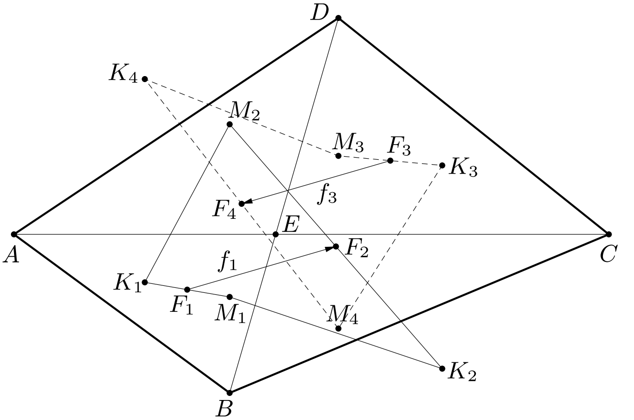
Legyenek a fenti háromszögek magasságpontjai rendre M_1, M_2, M_3, M_4 (*2. ábra*). A magasságpont a csúcsokból a szemközti oldalakra állított merőlegesek metszéspontja, így $M_1M_2 \parallel M_3M_4 \perp AC$ és $M_1M_4 \parallel M_2M_3 \perp BD$, tehát hasonlóan az előzőhöz $M_1M_2M_3M_4$ is paralelogramma.

Legyen $\overrightarrow{K_1K_2} = \overrightarrow{k_1}$, $\overrightarrow{K_3K_4} = \overrightarrow{k_3}$, $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{m_1}$, $\overrightarrow{M_3M_4} = \overrightarrow{m_3}$. Mivel $K_1K_2K_3K_4$ és $M_1M_2M_3M_4$ paralelogramma, így tudjuk, hogy $\overrightarrow{k_1} = -\overrightarrow{k_3}$ és $\overrightarrow{m_1} = -\overrightarrow{m_3}$. Mivel $K_1M_1K_2M_2$ négyszögben F_1F_2 középvonal (*3. ábra*), ezért tudjuk, hogy

$$\overrightarrow{F_1F_2} = \overrightarrow{f_1} = \frac{\overrightarrow{k_1} + \overrightarrow{m_1}}{2}$$

Valamint hasonlóan a $K_3M_3K_4M_4$ négyszögben

$$\overrightarrow{F_3F_4} = \overrightarrow{f_3} = \frac{\overrightarrow{k_3} + \overrightarrow{m_3}}{2} = \frac{-(\overrightarrow{k_1} + \overrightarrow{m_1})}{2} = -\overrightarrow{f_1}.$$



3. ábra

Tehát $\overrightarrow{f_3} = -\overrightarrow{f_1}$, így $F_1F_2 \parallel F_3F_4$ és egyenlő hosszúak, vagyis $F_1F_2F_3F_4$ valóban paralelogramma, vagy a négy pont egy egyenesre esik. Ezt kellett bizonyítani.

Csahók Tímea (Budapest, Németh László Gimn., 12. évf.) dolgozata alapján

40 dolgozat érkezett. 5 pontos 33, 4 pontos 3, 2 pontos 2, 1 pontos 1 dolgozat. Nem versenyszerű 1 dolgozat.

Polygon pályázat matematikából középiskolásoknak

A Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézete pályázatot hirdet középiskolás diákok (9–12. évfolyam) számára.

A pályázat témája:

Középiskolai matematikához kapcsolódó problémák, érdekességek

Ami biztosan ide tartozik: hogyan lehet egy ismert feladatot folytatni, újszerű és érdekes feladatok vagy trükkös megoldások, régi korok matematikája, hétköznapok matematikája, a matematika és a természettudományok kapcsolata, gyakorlati alkalmazások, informatikai alkalmazások és kapcsolatok (például algoritmusok) stb. Pályázni egyénileg lehet, vagy maximum 3 fős csapattal. A pályamunkákat a Bolyai Intézet oktatóiból álló zsűri fogja elbírálni.

A legjobb pályamunkákat díjakkal és dicséretekkel (oklevél, könyvutalvány) jutalmazzuk. A pályázó(k) által megnevezett felkészítő tanár(ok) a díjazottakkal és a dicséretben részesültekkel azonos jutalomban és szintén oklevélben részesülnek. Minden pályamunkáról szöveges szakmai értékelést készítünk, amit a díjkiosztó ünnepségen vehetnek át a versenyzők. A legjobb dolgozatokat a Polygon c. folyóirat szerkesztőbizottsága is megvizsgálja közölhetőség szempontjából. A beadott dolgozatok maximális terjedelme 10 oldal lehet (ábrákkal, képekkel, táblázatokkal, grafikonokkal együtt).

Beküldési határidő: **2017. december 15.** A pályamunkákat a következő címre kérjük beküldeni: Katonáné dr. Horváth Eszter egyetemi adjunktus, SZTE Bolyai Intézet, 6720 Szeged, Aradi vértanúk tere 1. A borítékra kérjük ráírni: Polygon pályázat matematikából, középiskolásoknak. A dolgozatokhoz az alábbi adatok mellékelését kérjük:

1. a pályázó(k) neve, lakcíme, telefonszáma, email címe,
2. a pályázó(k) iskolájának neve, címe, telefonszáma, email címe,
3. a felkészítő tanár(ok) neve, email címe.

Kérjük, tekintsék meg a pályázat honlapját is:

`http://www.math.u-szeged.hu/~horvath/palyazat.htm`.