KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK
INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE
ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

67. évfolyam 6. szám Budapest, 2017. szeptember

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 950 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

INDEX: 25 450 ISSN 1215-9247

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1.A, II. emelet 2.76.;
Telefon: 372-2500/6541; 372-2850

A lap megrendelhető az Interneten:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`.
Előfizetési díj egy évre: 8100 Ft

E-mail: `szerk@komal.hu`
Internet: `http://www.komal.hu`

This journal can be ordered from the Editorial office:
Pázmány Péter sétány 1.A, II. emelet 2.76., 1117–Budapest, Hungary
telephone: +36 (1) 372-2850
or on the Postal address
H–1518 Budapest 112, P.O.B. 32, Hungary,
or on the Internet:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.e.shtml`.

Beszámoló az 58. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiáról

Az idei Nemzetközi Matematikai Diákolimpiát július 12–23. között Brazíliában, Rio de Janeiroban rendezték meg. A versenyen 111 ország 615 diákja vett részt. Ez a résztvevő országok számát és a résztvevő versenyzők számát tekintve is abszolút csúcs. (Az eddigi rekordok 109, illetve 602 voltak.)

A legtöbb ország a megengedett maximális létszámú, 6 fős csapattal szerepelt; az alábbi listában az országnév után zárójelben tüntettem fel az adott ország versenyzőinek számát, ha ez hatnál kevesebb volt.

A résztvevő országok: *Albánia, Algéria, Amerikai Egyesült Államok, Argentína, Ausztrália, Ausztria, Azerbajdzsán, Banglades, Belgium, Belorusszia, Bolívia, Bosznia-Hercegovina, Botswana, Brazília, Bulgária, Chile, Ciprus, Costa Rica, Csehország, Dánia, Dél-Afrika, Dél-Korea, Ecuador, Egyiptom (3), Elefántcsontpart, Észtország, Finnország, Franciaország, Fülöp-Szigetek, Ghána (1), Görögország, Grúzia, Guatemala (4), Hollandia, Honduras (2), Hong Kong, Horvátország, India, Indonézia, Irak (4), Irán, Írország, Izland, Izrael, Japán, Kambodzsa, Kanada, Kazahsztán, Kenya, Kína, Kirgizisztán, Kolumbia, Koszovó (5), Kuba (1), Lengyelország, Lettország, Liechtenstein (3), Litvánia, Luxemburg, Macedónia, Magyarország, Makaó, Malajzia, Marokkó, Mexikó, Moldova, Mongólia, Montenegro (4), Mianmar, Nagy-Britannia, Németország, Nepál, Nicaragua (4), Nigéria (4), Norvégia, Olaszország, Oroszország, Örményország, Pakisztán, Panama (1), Paraguay, Peru, Portugália, Puerto Rico (5), Románia, El Salvador (4), Spanyolország, Sri Lanka, Svájc, Svédország, Szaúd-Arábia, Szerbia, Szingapúr, Szíria, Szlovákia, Szlovénia, Tadzsikisztán, Tajvan, Tanzánia (2), Thaiföld, Törökország, Trinidad és Tobago (1), Tunézia (5), Türkmenisztán, Uganda, Új-Zéland, Ukrajna, Uruguay, Üzbegisztán (5), Venezuela(5), Vietnam.*

A versenyen szokás szerint mindkét napon négy és fél óra alatt 3–3 feladatot kellett megoldani. (A feladatokat alább közöljük.) Mindegyik feladat helyes megoldásáért 7 pont járt, így egy versenyző maximális teljesítménnyel 42 pontot szerezhetett. A verseny befejezése után megállapított ponthatárok szerint aranyérmet a 25–35 pontot elért, ezüstérmet a 19–24 pontos, míg bronzérmet a 16–18 ponttal rendelkező tanulók szereztek. (35-nél több pontot nem szerzett senki.) Dicséretben részesültek azok a versenyzők, akiknek 16-nál kevesebb pontjuk volt, de egy feladatot hibátlanul megoldottak.

A magyar csapatból

Borbényi Márton (Kaposvári Táncsics Mihály Gimn., 12. o.t.) és

Gáspár Attila (Miskolc, Földes Ferenc Gimn., 11. o.t.) egyaránt 25 ponttal *aranyérmet,*

Williams Kada (Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimn., 12. o.t.) 22 ponttal *ezüstérmet,*

Baran Zsuzsanna (Debreceni Fazekas Mihály Gimn., 12. o.t.) pedig 18 ponttal *bronzérmet* szerzett.

Kovács Benedek (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. o.t.) 13 ponttal *dicséretben* részesült,

Matolcsi Dávid (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. o.t.) 12 pontot szerzett.

A magyar csapat vezetője *Pelikán József* (ELTE TTK, Algebra és Számelmélet Tanszék), helyettes vezetője *Dobos Sándor* (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.) volt. *Kós Géza* (MTA SZTAKI, ELTE TTK) a feladatkiválasztó bizottság tagjaként és koordinátorként működött közre az olimpián.

Az országok (nem-hivatalos) pontversenyében Magyarország a résztvevő 111 ország között a 22–24. helyen végzett. A csapatverseny élmezőnyének sorrendje így alakult (megszerzett pontszámaikkal):

1. Dél-Korea 170, 2. Kína 159, 3. Vietnam 155, 4. USA 148, 5. Irán 142, 6. Japán 134, 7–8. Szingapúr és Thaiföld 131, 9–10. Nagy-Britannia és Tajvan 130, 11. Oroszország 128, 12–13. Görögország és Grúzia 127, 14–16. Belorusszia, Csehország és Ukrajna 122, 17. Fülöp-Szigetek 120, 18–21. Bulgária, Hollandia, Olaszország és Szerbia 116, **22–24.** Lengyelország, **Magyarország** és Románia 115, 25. Kazahsztán 113, 26–28. Argentína, Banglades és Hong Kong 111, 29. Kanada 110, 30. Peru 109, 31. Indonézia 108, 32. Izrael 107, 33. Németország 106, 34. Ausztrália 103, 35–36. Horvátország és Törökország 102, 37–38. Brazília és Malajzia 101, 39–40. Franciaország és Szaúd-Arábia 100 ponttal.

Szeretnék köszönetet mondani a versenyzők tanárainak. Az alábbi felsorolásban minden tanár neve után monogramjukkal jelöltem azokat a diákokat, akik a tanítványaik:

Berzsán Gabriella (BM), *Dobos Sándor* (BM, BZs, GA, KB, MD, WK), *Fazakas Tünde* (KB), *Gulyás Tibor* (GA), *Győry Ákos* (GA), *Juhász Péter* (MD), *Kiss Gergely* (MD), *Kiss Géza* (MD), *Kosztolányi József* (WK) *Kubatov Antal* (BM), *Lakatos Tibor* (BZs), *Mike János* (WK), *Molnár-Sáska Gábor* (KB), *Nagy Zoltán Lóránt* (BZs), *Pósa Lajos* (BM, BZs, GA, KB, MD, WK), *Schultz János* (WK), *Szűcs Gábor* (GA), *Tóth Mariann* (BZs).

Ugyancsak szeretnék köszönetet mondani Dobos Sándornak, mint a központi olimpiai előkészítő szakkör vezetőjének, továbbá mindazoknak, akik a felkészítésben közreműködtek.

Idén az olimpiai csapat kijelölése válogatóversenyek formájában történt. A válogatóverseny utolsó, kétnapos részét Kecskeméten rendeztük. Szeretnék köszönetet mondani a kecskeméti Mategye Alapítványnak azért, hogy a versenyt nagyvonalúan vendégül látták.

Az idei olimpiára is rányomta bélyegét a túl nehéz feladatok kitűzése, ez azonban még a korábbi éveknél is szembetűnőbb volt. A hagyományosan legnehezebb 3. és 6. feladat közül a hatodikat a 615 versenyzőből csak 14 tudta megoldani, a harmadikat pedig csak 2(!) versenyző (egy ausztrál és egy orosz). A korábbi években még a nehéz feladatokra is jónéhányan kaptak töredékpontokat, idén a 3. feladatra a 615 diák közül 608 nulla pontot kapott! Mivel ugyanakkor a könnyűnek szánt (és ezen a szinten tényleg könnyű) 1., illetve 4. feladatra 446, illetve 394 teljes megoldás érkezett, a verseny lényegében a maradék két feladaton dőlt el. Ennek következménye a csapatok közötti holtversenyek (sőt hármas és négyes holtversenyek) abnormálisan magas száma. A kitűzött feladatok nehézségének jó megválasztása a korábbi években is visszatérő téma volt, azonban most nyilvánvalóvá vált, hogy erre a kérdésre a jövő évi olimpián megkülönböztetett figyelmet kell majd fordítani.

A rendezők által szervezett kirándulások közül kiemelkedett az, hogy a résztvevőknek alkalmuk volt meglátogatni a legendás Maracana stadiont.

A következő matematikai diákolimpiát Románia rendezi Kolozsvárott, 2018. július 3–14. között.

Pelikán József

Az 58. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatai*

Első nap

1. feladat. Minden $a_0 > 1$ egész számra definiáljuk az $a_0, a_1, a_2, \dots$ sorozatot a következőképpen. Minden $n \geqslant 0$-ra legyen

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n}\,, & \text{ha } \sqrt{a_n} \text{ egész szám,} \\ a_n + 3 & \text{különben.} \end{cases}$$

Határozzuk meg az összes olyan a_0 értéket, amihez van olyan A szám, amire $a_n = A$ teljesül végtelen sok n-re.

2. feladat. Legyen $\mathbb{R}$ a valós számok halmaza. Határozzuk meg az összes olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, amire minden valós x, y szám esetén teljesül

$$f\big(f(x)f(y)\big) + f(x+y) = f(xy).$$

3. feladat. Egy vadász és egy láthatatlan nyúl egy játékot játszik az euklideszi síkon. A nyúl A_0 kiindulópontja és a vadász B_0 kiindulópontja egybeesnek. A játék $(n-1)$-edik menete után a nyúl az A_{n-1} pontban, a vadász a B_{n-1} pontban van. A játék n-edik menetében a következő három dolog történik, ebben a sorrendben:

(i) A nyúl láthatatlan módon egy olyan A_n pontba megy, amire A_{n-1} és A_n távolsága pontosan 1.

(ii) Egy nyomkövető eszköz megad egy P_n pontot a vadásznak. Az eszköz által a vadásznak nyújtott információ mindössze annyi, hogy P_n és A_n távolsága legfeljebb 1.

(iii) A vadász látható módon egy olyan B_n pontba megy, amire B_{n-1} és B_n távolsága pontosan 1.

Igaz-e, bárhogyan mozogjon is a nyúl, és bármilyen pontokat jelezzen is a nyomkövető eszköz, hogy a vadász mindig meg tudja úgy választani a mozgását, hogy 10^9 menet után a távolság közte és a nyúl között legfeljebb 100 legyen?

---

*Az olimpia honlapja: `http://www.imo2017.org/`.

Második nap

4. feladat. Legyenek R és S különböző pontok egy Ω körön, amikre RS nem átmérője a körnek. Legyen ℓ az Ω körhöz a R pontban húzott érintőegyenes. Legyen T az a pont, amire teljesül az, hogy S az RT szakasz felezőpontja. Legyen J egy olyan pont az Ω kör rövidebb RS ívén, amire teljesül az, hogy a JST háromszög Γ körülírt köre az ℓ egyenest két különböző pontban metszi. Legyen Γ és ℓ metszéspontjai közül az A pont az, ami közelebb van az R-hez. Az AJ egyenes Ω-val vett második metszéspontja legyen K. Bizonyítsuk be, hogy a KT egyenes érintője a Γ körnek.

5. feladat. Adott egy $N \geqslant 2$ egész szám. $N(N+1)$ futballjátékos, akik között nincs két egyenlő magasságú, valahogyan felállnak egy sorban. Az edző ki akar hagyni ebből a sorból $N(N-1)$ játékost úgy, hogy a megmaradt $2N$ játékos alkotta sor játékosaira teljesüljön az alábbi N feltétel:

(1) senki nem áll a legmagasabb és a második legmagasabb játékos között,

(2) senki nem áll a harmadik legmagasabb és a negyedik legmagasabb játékos között,

$\vdots$

(N) senki nem áll a két legalacsonyabb játékos között.

Bizonyítsuk be, hogy ez mindig megtehető.

6. feladat. Egy egész számokból álló (x, y) rendezett párt *primitív rácspontnak* nevezünk, ha x és y legnagyobb közös osztója 1. Ha adott primitív rácspontok egy véges S halmaza, bizonyítsuk be, hogy van olyan n pozitív egész, és vannak olyan $a_0, a_1, \ldots, a_n$ egészek, hogy minden (x, y) S-beli pontra teljesül

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$

Olimpiai válogatóversenyek (IMO, MEMO)

A 2018. évi IMO és MEMO versenyekre a csapatok kiválasztása az ideihez hasonlóan válogatóversenyeken történik. A lebonyolítás menete a KöMaL 2016. szeptemberi számában leírtakhoz hasonló, az idei kiírás részletei elérhetők Dobos Sándor honlapján:

`dobos.felhasznalo.fazekas.hu/olimpia/csapat.htm`.

Budapest, 2017. augusztus **Pelikán József, Dobos Sándor**

Olimpiai előkészítő szakkörök a 2017/2018. tanévben

A Bolyai János Matematikai Társulat által szervezett Olimpiai felkészülés az alábbiak szerint történik:

Budapest: az első alkalom szeptember 15-én lesz, utána kéthetente pénteken, a Budapesti Fazekas Mihály Általános Iskola és Gimnáziumban (Budapest, Horváth M. tér 8.), 14.30-tól. További információk: `http://matek.fazekas.hu/portal/szakkorok/`, szakkörvezető: *Dobos Sándor.*

Csongrád megye: az első szeptember 21-én lesz, utána kéthetente csütörtökön, a Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézetében (Aradi vértanúk tere 1., I. emelet, Riesz terem), 15.00 és 17.00 között, szakkörvezető: *Kosztolányi József.*

Erdős Pál Matematikai Tehetséggondozó Iskola veszprémi és szolnoki foglalkozásai 11–12. évfolyamosok számára. A jelentkezést a diákok egyénileg végezhetik el az Erdős Iskola honlapján: `http://erdosiskola.mik.uni-pannon.hu/`. Az idei első foglalkozások Szolnokon október 6. és 8., Veszprémben szeptember 29. és október 1. között lesznek.

EGMO 2017, Zürich

Idén Zürichben került megrendezésre az EGMO, melyen Magyarországot négyen képviseltük: *Andó Angelika, Baran Zsuzsanna, Janzer Lili* és *Kerekes Anna.*

Gépünk április 6-án este érkezett meg a zürichi reptérre, ahol már várt ránk a helyi kísérőnk, Lara. Ő volt az, aki a verseny hetében mindenben segített nekünk és kiderült, hogy a német, angol és francia mellett magyarul is kiválóan beszél.

A szállásra éjszaka érkeztünk meg, így vacsorát már nem kaptunk, átvehettünk viszont egy csodás ajándékcsomagot svájci bicskával, törülközővel, tornazsákkal, esernyővel.

Másnap reggel egy tornával indítottuk a napot a közeli játszótéren, majd a „Scavenger Hunt" nevű program keretében bejártuk Zürichet. A város különböző pontjain kellett feladatokat teljesítenünk, utaztunk fogaskerekűvel, jártunk az egyetemeken és répát pucoltunk a sétálóutcán. A zöldséghámozót – egy igazi svájci darab – meg is tarthattuk. Délután sor került a megnyitóra, majd jól belakmároztunk az állófogadáson.

A másnap, szombat már az első versenynap volt, így érthető, hogy mindannyian erősen izgultunk. Mielőtt beültünk volna a terembe, Panna és Zoli igyekeztek lelket önteni belénk. Kaptunk Túró Rudit, egy szerencseölelést, majd kezdődött is a megmérettetés …

3 feladatot kaptunk 4,5 órára, ezek között (a legtöbbünk örömére) több kombinatorikus jellegű példa is volt. Délután sportprogramokon vehettünk részt, az úszás és a frizbi mellett svájci gyerekjátékok kipróbálására is lehetőség nyílt.

Vasárnap a második dolgozat megírása után már némileg megnyugodhattunk. Kirándultunk a közeli Uetlibergen, ahol csodálatos képeket készítettünk a gyönyörű kilátással. Este táncolni tanultunk – nem sok sikerrel, de azért élmény volt ennyi lánnyal.

Hétfőn újra akadt okunk izgulni. Ekkor zajlott a koordinálás, Panna és Zoli keményen küzdöttek a pontjainkért. Eközben mi az állatkertben múlattuk az időt, láttunk pingvineket, hópárducot és újszülött elefántot is. Ezután csokit vásároltunk a családunknak, barátainak, hiszen Svájcból senki nem mehet haza igazi svájci csokoládé nélkül. Napközben élőben követhettük a dolgozatok pontozását és számolgathattuk, hogy milyen érmekre számíthatunk. Végül nagyon elégedettek voltunk az eredményekkel: a magyar csapat két ezüst- és két aranyérmet szerzett. Ezzel az országok közötti versenyben az előkelő 4. helyet nyertük el.

Ezek után kedden remek kedvvel vághattunk neki a túrának. Ezúttal a Rigit másztuk meg, de a sűrű köd miatt sajnos nem láthattuk a híresen káprázatos tájat. A hegytetőn ebédre igazi svájci specialitásokat kóstolhattunk meg (mint például a sajtfondü).

Délután a záróeseményen megkaptuk az érmeinket, majd egy csodás gálavacsora következett. A napot egy éjszakába nyúló zenés-táncos mulatság zárta.

Április 12-én végül egy sikeres és élményekkel teli hét után tértünk vissza Budapestre.

Mindehhez sokan hozzájárultak, ezúton is szeretnénk köszönetet mondani az iskolai tanárainknak, továbbá *Nagy Zoltán Lórántnak, Fekete Pannának* és *Dobos Sándornak* az egész éves felkészítésért és támogatásért. Köszönjük ezen kívül mindenkinek, aki izgult értünk és az F5 gombot nem kímélve várta a végső eredményeket.

Hálásak vagyunk a Bolyai János Matematikai Társulatnak, hogy anyagi támogatásával lehetővé tette az utazásunkat, illetve a ProCons-nak, akiknek az egyenpólónkat és zászlónkat köszönhetjük.

Mind nagyon örülünk, hogy ott lehettünk és részt vehettünk a 2017-es EGMO-n. A jövő évi csapatnak is sok sikert és élményekben gazdag versenyt kívánunk!

EGMO 2017 csapat

EGMO 2017/2018 felhívás

2018. április 9. és 15. között Olaszországban, Firenzében rendezik a hetedik Európai Lány Matematikai Diákolimpiát, az EGMO-t (`www.egmo.org`). Jövőre is négyfős csapattal indulhatunk, melynek összetétele 2018 elején derül ki. A válogatás szempontjai: válogatóversenyek (2017 őszén és 2018 elején) – kis mértékben az elmúlt évi is –, országos versenyek (matematika OKTV, Kürschák József tanulóverseny, Arany Dániel verseny), a KöMaL A és B pontversenyei és az évközi munka.

A versenyen való sikeres szerepléshez, illetve a kiutazó csapatba kerüléshez is alapvetően nélkülözhetetlen az alapos felkészülés. Ezt többféleképpen is szeretnénk segíteni. Év közben időközönként küldünk az érdeklődőknek (tematikus) feladatsorokat; az ezekre küldött megoldásokra személyesen is visszajelzünk, illetve lehet kérdezni is. Emellett az őszi válogatóig legeredményesebb diákok részt vehetnek a téli brit-magyar közös IMO felkészítő táborban.

Valójában a közös mentorált matekozást nem eszköznek, hanem célnak tekintjük: egy plusz lehetőségnek ahhoz, hogy aki matematikai képességében fejlődni szeretne és ebben örömét leli, a KöMaL, iskolai és más táborok mellett további támogatásban részesülhessen.

Aki szeretne részt venni a felkészülésben vagy bármilyen kérdése van, írjon bátran a `nagyzoli@cs.elte.hu` címre.

További tudnivalók itt: `http://www.cs.elte.hu/~nagyzoli/EGMO.html`.

Kiss Melinda Flóra, Fekete Panna és **Nagy Zoltán Lóránt**

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. *a*) Egy gyorsvonat két város közötti útját a menetrend szerint 80 km/h átlagsebességgel szokta megtenni. A vonat azonban egyik nap – pályafelújítási munkák miatt – az útja első egyharmadán csak 40 km/h átlagsebességet ért el. Az út második kétharmad részét a menetrend szerint előírt 80 km/h átlagsebességgel tette meg. Az út befejező egyharmad részén – hogy csökkentse a késést – gyorsított, így ezt a szakaszt 100 km/h átlagsebességgel tette meg. A célállomásra így is 12 perc késéssel érkezett. Hány km a távolság a két város között?

b) Egy vasúti jegy árát először p százalékkal felemelték, majd később $2p$ százalékkal csökkentették. Így a jegy eredeti árához képest végül 19,5 százalékkal olcsóbb lett. Határozzuk meg p értékét. (*13 pont*)

2. *a*) Határozzuk meg az $(x+1)^2(2+cx)^4$ kifejezésben c értékét, ha a műveletek elvégzésével nyert polinomban az elsőfokú tag együtthatója -64.

b) Határozzuk meg az A, B és C kijelentések lehetséges logikai értékeit, ha tudjuk, hogy az $(A \wedge B) \rightarrow (\neg B \vee C)$ állítás logikai értéke hamis. (*13 pont*)

3. *a*) Három teljes gráf közül az elsőnek 5-tel kevesebb, a másodiknak 6-tal több pontja van, mint a harmadiknak. A két kisebb pontszámú gráfnak együtt összesen annyi éle van, mint a legnagyobb pontszámúnak. Határozzuk meg a három teljes gráf pontjainak számát.

b) Egy gráfban *cseresznyének* nevezzük a két egymáshoz csatlakozó élből álló részgráfot. Igazoljuk, hogy egy hétpontú teljes gráfban a cseresznyék száma megegyezik a négypontú körök számával. (*13 pont*)

4. Egy nyolc valós számból álló adatsor öt eleme ismert: 5; 5,5; 10; 12,5 és 15,5. A maradék három elem elveszett, de tudjuk, hogy legalább az egyik egész szám, és a három elem közül kettő egyforma volt. Azt is tudjuk, hogy a teljes adatsor átlaga 10,5, szórása pedig 3,5 volt. Határozzuk meg a hiányzó három elem értékét. (*12 pont*)

II. rész

5. *a*) Egy háromszög egyik oldala 7 cm hosszú, az egyik ezen fekvő szög 18 fokos, az oldallal szemközti szög pedig 108 fokos. Határozzuk meg a háromszög területét és a háromszögbe írható kör sugarát.

b) Egy vízszintes terepen álló torony talppontját megközelíteni nem tudjuk. A torony magasságára árnyékának hosszából szeretnénk következtetni, de a torony megközelíthetetlensége miatt az árnyék pontos hosszát sem tudjuk megmérni.

Ezért megjelöljük a torony árnyékának végpontját akkor, amikor a Nap sugarai 75°-os szögben érik a talajt. Néhány órával később, amikor a Nap sugarai már csak 60°-os szögben érik a talajt, a torony árnyékát ennél 8 méterrel hosszabbnak találjuk.

Milyen magas a torony? (*16 pont*)

6. Öt osztálytárs: Anna, Balázs, Cili, Dénes és Elemér négynapos közös nyaralásra mennek. Mind a négy napon sorsolással választják ki maguk közül azt az egy embert, akinek aznap reggel be kell vásárolnia (egy-egy emberre akár többször is sor kerülhet).

a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy mind a négy napon más-más ember megy bevásárolni?

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy mind a négy napon ugyanannak az embernek kell bevásárolnia?

c) Mekkora annak a valószínűsége, hogy Annát a négy nap alatt legalább kétszer kisorsolják?

d) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a nyaralás során két ember intézi mind a négy bevásárlást (mindkettőre legalább egyszer sor kerül)? (*16 pont*)

7. *a*) Határozzuk meg az $a_n = \frac{4n-1}{n}$ sorozat legnagyobb alsó és legkisebb felső korlátját.

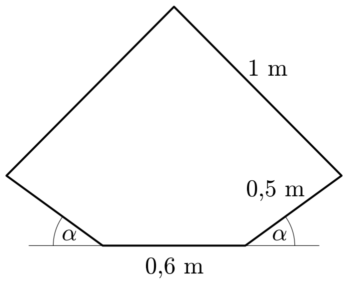
b) Egy számtani sorozat első 11 tagjának összege 660. A sorozat első tagja, hatodik tagja, és első nyolc tagjának összege (ebben a sorrendben) egy mértani sorozat három egymást követő tagját adja. Határozzuk meg a számtani sorozat első tagját és differenciáját. (*16 pont*)

8. *a*) Határozzuk meg n értékét úgy, hogy az alábbi egyenlőség teljesüljön:

$$\int_2^n 2x+5\,\mathrm{d}x = \int_1^7 10n-2x-3x^2\,\mathrm{d}x.$$

b) Mekkora területű síkidomot vág ki az $f(x) = \frac{4}{(x+1)^2} - 1$ függvény grafikonja az első síknegyedből?

c) Írjuk fel az f grafikonjához az 1 abszcisszájú pontjában húzott érintőegyenes egyenletét. (*16 pont*)



9. Egy villanymozdony áramszedőjét két ponton rögzítették a mozdony tetejéhez, ezek távolsága 0,6 méter. Az áramszedő négy, egymáshoz csatlakozó egyenes szakaszból áll. A két rövidebb szakasz 0,5 méter, a két hosszabb szakasz 1 méter hosszú (lásd az *ábrát*). Az áramszedő egyes szakaszai a mozdony tetejéhez és egymáshoz képest csuklósan szabadon elmozdulhatnak. Jelölje $h(\alpha)$ az áramszedő legmagasabb pontjának magasságát a mozdony tetejéhez képest akkor, amikor mindkét rövidebb ág α szöget zár be a mozdony tetejének síkjával.

a) Igazoljuk, hogy $h(\alpha)=\sqrt{1-(0{,}3+0{,}5\cos\alpha)^2}+0{,}5\sin\alpha$.

b) Milyen magasan lesz az áramszedő legmagasabb pontja $\alpha=25^\circ$ esetén?

c) Mekkora α szög esetén lesz az áramszedő legmagasabb pontja éppen 1 méter magasságban? (*16 pont*)

Koncz Levente
Budapest

Tájékoztató a folyóirat előfizetéséről

A Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok megrendelhető a kiadónál, a MATFUND Alapítványnál a szerkesztőség címén; valamint a következő címen: `http://www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`. Előfizetési díj a 2017–2018-as tanévre (2017 szeptemberétől 2018 májusáig) 8100 Ft. Azonos címre küldendő, 6-nál nagyobb példányszámú megrendelés esetén a csoportos előfizetési díj a korábbi évekhez képest változott, a részletes árak a fenti oldalon olvashatók. Csekket és számlát a szeptemberi számmal együtt küldünk, a fizetés csak ezután történhet.

Lapunk előfizetői az előfizetett példány címlapján látható előfizetői azonosító segítségével a kitűzött feladatainkhoz már a lap nyomtatott változatának megjelenésével egyidejűleg hozzáférhetnek.

A Bolyai János Matematikai Társulat (BJMT) tagjai által igénybevehető kedvezményekről kérjük, olvassa el a Társulat honlapján a „Tagsági információk”-at: `www.bolyai.hu`.

Azok, akik az idén kérik felvételüket a Bolyai János Matematikai Társulatba, felvételi kérelmük elbírálása után (legközelebb várhatóan októberben) értesítést és tagdíjbefizetési csekket kapnak, ezért külön nem szükséges előbb jelentkezniük.

A Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok példányonként 950 Ft-ért megvásárolható a szerkesztőségben.

Kérjük versenyzőinket, hogy a KöMaL 2017–2018-as tanévi matematika, fizika és informatika pontversenyének *versenykiírását* figyelmesen olvassák el!

Versenykiírás*
a KöMaL 2017–2018-as tanévre kiírt pontversenyeire

A most induló pontversenyek 2017 szeptemberétől 2018 májusáig tartanak, havonta az újonnan kitűzött feladatcsoportok megoldásait lehet beküldeni.

Minden egyes postán küldött megoldást – feladatonként külön-külön – **négyrét hajtsunk össze** (több lapból álló dolgozatokat egybe) úgy, hogy a **fejléc kívülre kerüljön.** Kézírással készült megoldást csak postai úton fogadunk el. Ha a megoldó kézzel készít ábrát és azt jól látható minőségben beszkenneli, majd beilleszti a dokumentumba, azt elfogadjuk. A további formai követelményeket *A matematika és fizika dolgozatok formája* című fejezet tartalmazza.

A versenyekbe minden általános iskolás és középiskolás korú tanuló **benevezhet.** A versenyben csak a nevezés után beküldött megoldásokat értékeljük, nevezés nélkül beküldött megoldásokat utólag sem értékelünk. Kérjük, hogy a versenyzők **1–12-ig** jelöljék, **hányadik osztályba járnak** (az osztály egyéb jelölését – pl. 11.b – nem kell feltüntetni).

FONTOS! A versenyek egyéni versenyek; a versenyzőknek önállóan kell elkészíteniük a példák megoldásait. Szigorúan tilos a kitűzött feladatokat a beküldési határidő előtt másokkal megvitatni, vagy (az M pontverseny kivételével) másoktól segítséget kérni a feladatok megoldásához. A fizika mérési feladatok versenyében szabad egy személy (családtag, osztálytárs, barát) segítségét is igénybe venni. A közösen készített vagy másolt dolgozatokat – beleértve az eredeti szerzőét is – *nem versenyszerűnek értékeljük,* és a szerzők nevét honlapunkon is közöljük. A csoportosan másolt dolgozatokat visszaküldjük az osztályt tanító tanárnak. Súlyosabb, az egész pontversenyt veszélyeztető esetekben (pl. a feladatok megtárgyalása internetes fórumokon) az érintett versenyzőket kizárjuk a versenyből.

A versenyfeltételeket az alábbiakban ismertetjük.

A benevezés módja

A pontversenybe a `https://www.komal.hu/nevezesilap` internetes címen található „Nevezési lap" kitöltésével és beküldésével lehet benevezni. A versenyekbe be lehet kapcsolódni a tanév során később is.

A nagyon gyakori családnevű versenyzők válasszanak egy *háromjegyű* jelzőszámot is, és mind a nevezési lapon, mind pedig az év során beküldött dolgozataik fejlécére az így bővített nevet írják (pl. Kiss 349 Anna, Szabó 344 Péter). Kérjük viszont, hogy a továbbiakban ezt a számot *minden egyes* beküldött dolgozatukon tüntessék föl.

Kérjük, hogy azok a versenyzők, akik tavaly már választottak jelzőszámot, **idén is ugyanazt a számot** használják!

A pontversenyeinkre történő regisztráció során kérjük, adja meg a címlapon látható előfizetői azonosítóját, mert ezzel tudjuk biztosítani aktuális kitűzött feladatainkhoz a teljes elektronikus hozzáférést a lap nyomtatott változatának megjelenésével egyidejűleg. Az előfizetői azonosítóját megtalálja a folyóiratra ragasztott etiketten. Előfizetői azonosító hiányában a feladatokhoz történő elektronikus hozzáférést korlá-

*Kérjük, hogy azok is olvassák el a versenykiírás szövegét, akik megoldásaikat elektronikus úton küldik be.

tozzuk (csak a hónap 28-ától jelennek meg a feladatok honlapunkon is). Amennyiben előbb történik a regisztráció, mint az előfizetés, a regisztráció később módosítható, és az előfizetői azonosító megadását követően a havi feladatsorok elektronikusan teljes körűen elérhetők lesznek az előfizető számára. Lapunk pontversenyében a részvétel a 2017/2018-as tanévre továbbra is térítésmentes, tehát regisztrációval előfizetői azonosító hiányában is lehetséges. Kérjük azonban versenyzőink szüleit, hozzátartozóit, vagy az őket támogató intézményeket, cégeket, hogy Lapunkra történő előfizetésükkel segítsék pontversenyünk fennmaradását.

Matematika versenyek

Ebben a tanévben négyféle versenyt indítunk növekvő nehézségi sorrendben **K**, **C**, **B** és **A** kategóriában. Egy tanuló több pontversenyben is indulhat, de **K**-ban és **B**-ben egyszerre nem. **Minden feladatra csak egy megoldást értékelünk.** Természetesen örömmel várunk általánosításokat, megjegyzéseket, másfajta megoldási vagy kitűzésre tett javaslatokat, ezeket szívesen közöljük, sőt, a pontversenyen kívül **különdíj** formájában is elismerjük.

K *pontverseny* – az **ABACUS** és a **KöMaL** közös pontversenye kezdőknek – csak 9. osztályosoknak

A **K** jelű feladatokra kizárólag kilencedik osztályosoktól várunk megoldást szeptembertől márciusig, hét fordulóban.

Az ABACUS a KöMaL rendelkezésére bocsátja a pontversenyében csak 8. osztályosoknak kitűzött három feladatát, emellett havonta további három feladatot ad, amelyek csak a KöMaL-ban jelennek meg. Minden feladat teljes megoldása 6 pontot ér.

C *pontverseny* – matematika gyakorlatok

A **C** pontverseny gyakorlatait azoknak az olvasóinknak ajánljuk, akik kezdetben túl nehéznek vagy szokatlannak találják a **B** és **A** kategória feladatait. Itt rendszeresen közlünk az iskolai tananyaghoz szorosabban kapcsolódó gyakorlatokat, azok találhatnak itt kedvükre valót, akik valamivel – de nem sokkal – szeretnének túllépni az iskolai matematika keretein, vagy emelt szintű érettségit kívánnak tenni matematikából.

A gyakorlatok egy része általános iskolásoknak is ajánlható, más részük azonban a 11–12. évfolyam tanulmányaira támaszkodik. Minden hónapban hét gyakorlatot tűzünk ki, ebből az 1–5. gyakorlatokra a legfeljebb 10. évfolyamosok, a 3–7. gyakorlatokra pedig a 11–13. évfolyamosok küldhetnek be megoldást. Minden dolgozatra legfeljebb 5 pont kapható. A **C** pontversenyt három kategóriában értékeljük. Az első: a 8. évfolyamig, a második: a 9., 10. évfolyamosok, a harmadik: a 11., 12. évfolyamosok.

B *pontverseny* – matematika feladatok

A **B** pontversenyben havonta összesen kilenc feladatot tűzünk ki. A feladatok sorrendje megfelel az iskolai tananyagnak: **egy feladatsoron belül az alacsonyabb sorszámúakat ajánljuk a fiatalabbaknak.** A feladatok – szándékaink szerinti – nehézségét a közölt pontszám jelzi (ez 3, 4, 5 vagy 6 lehet). A **B** pontversenyben az eredményes versenyzéshez nincs szükség valamennyi feladat megoldására. Nem kell tehát mind a kilenc feladatra megoldást küldeni, feladatsoronként mindenkinek a **legtöbb pontot elért, legfeljebb hat megoldását számítjuk**

be a pontversenybe (amelybe azonban először a nem versenyszerűeket számítjuk be). Ki-ki gondolja végig, mely példákkal foglalkozna szívesen, hogyan érhetné el a legtöbb pontot. A **B** pontverseny eredményét öt korcsoportban tartjuk nyilván: a 8. évfolyamig, a 9., 10., 11. és 12. évfolyamokban.

A *pontverseny* – matematika problémák

A legfelkészültebb diákok számára jelent továbbra is kihívást az **A** pontverseny, melyet a matematikus pályára vagy nemzetközi versenyekre készülőknek ajánlunk. E verseny résztvevőit nem különítjük el évfolyamonként, mindannyian együtt versenyeznek, minden megoldásra egységesen legfeljebb 5 pontot kaphatnak.

Fizika versenyek

Ebben a tanévben háromféle fizika versenyt indítunk: **M**, **G** és **P** kategóriában. Egy tanuló több pontversenyben is indulhat, de a **G** és **P** pontversenyek közül csak az egyiket választhatja. **Minden feladatra csak egy megoldást értékelünk.** Természetesen örömmel várunk általánosításokat, megjegyzéseket, másfajta megoldási vagy kitűzésre tett javaslatokat, ezeket szívesen közöljük, sőt, a pontversenyen kívül **különdíj** formájában is elismerjük.

M *pontverseny* – fizika mérési feladatok

Havonta egy mérési feladatot tűzünk ki, valamennyi korosztály számára közösen. A feladatok megoldásával 6–6 pontot lehet szerezni. A mérési feladatok kidolgozásánál hasznos lehet a korábbi számainkban megjelent megoldások tanulmányozása. A mérési jegyzőkönyv feltétlenül tartalmazza a mérés elvének áttekinthető leírását (a mérési elrendezés vázlatos rajzával, esetleg fotókkal), megfelelő számú és pontosságú mérési adatot (áttekinthető táblázatban, a mértékegységeket is megadva), a mérési adatok kiértékelését (lehetőleg grafikusan ábrázolva), és a hiba nagyságrendjének becslését. A mért és számított mennyiségeket ne adjuk meg **indokolatlanul sok tizedesjeggyel,** hanem csak a becsült hibával összhangban álló pontossággal. A mérési jegyzőkönyv legyen viszonylag tömör, de annyira áttekinthető, hogy annak alapján bárki meg tudja ismételni a leírt mérést. Nagyon sok (50-nél több) mérési adat esetén elegendő azoknak csak egy „reprezentatív" részét beküldeni és a többinek csak az átlagát közölni. A 6 oldalnál hosszabb jegyzőkönyv tartalmazzon egy rövid (kb. 1/2 oldalas) összefoglalást. A mérés elvégzéséhez szabad egy személy (családtag, osztálytárs, barát) segítségét is igénybe venni. A segítő személy adatait (diákoknál az iskoláját és osztályát) a mérési jegyzőkönyv elején a versenyző adatai mellett kérjük feltüntetni.

G *pontverseny* – fizika gyakorlatok

A **G** pontverseny gyakorlatait azoknak az 1–8., illetve 9-10. évfolyamos olvasóinknak tűzzük ki, akik kezdetben túl nehéznek vagy szokatlannak találják a **P** kategória feladatait. Itt többnyire az iskolai tananyaghoz szorosabban kapcsolódó gyakorlatokat találnak a versenyzők. Ebben a kategóriában azok is eséllyel indulhatnak, akik még nem rendelkeznek kellő feladatmegoldó rutinnal, de a gyakorlatok megoldásával és beküldésével felkészülhetnek arra, hogy a következő években eredményesen szerepelhessenek a **P** pontversenyben.

Minden hónapban négy gyakorlatot tűzünk ki. A pontszámokat a feladat után feltüntetjük. Mindenki szabadon választhat a kitűzött gyakorlatok közül, de **leg-**

feljebb három feladat megoldását (először a nem versenyszerűeket) számítjuk be a pontversenybe. A **G** pontversenyt három kategóriában (legfeljebb 8. évfolyam, 9., 10. évfolyam) külön-külön összesítjük és értékeljük, a mérési versenytől függetlenül. (10. évfolyamosoknál idősebbek, illetve azok, akik a **P** pontversenybe neveztek, a **G** pontversenyben nem vehetnek részt.)

P *pontverseny* – fizika feladatok

Havonta kb. tíz elméleti feladatot tűzünk ki, nem nehézségi, hanem az életkornak megfelelő sorrendben. A pontszámokat a feladat után feltüntetjük. Mindenki szabadon választhat a kitűzött elméleti feladatok közül. A 9–12. évfolyamosoknak **legfeljebb öt,** a náluk fiatalabbaknak **legfeljebb három** feladat megoldását (azonban először a nem versenyszerűeket) számítjuk be a pontversenybe. Az elméleti versenyt korosztályonként (8. évfolyamig, 9., 10., 11., 12. évfolyam) külön-külön összesítjük és értékeljük, a mérési versenytől függetlenül. Akik a **G** pontversenybe neveztek, a **P** pontversenyben nem vehetnek részt.

Informatika verseny

I *pontverseny* – informatika alkalmazási és programozási feladatok

Havonta három **I** jelű és egy **I/S** jelű feladatot tűzünk ki. A feladatok egy része általános iskolásoknak is ajánlható, nagyobb része azonban a középiskolai tanulmányokra támaszkodik. Alapvető célunk, hogy e feladatok segítsék a felkészülést az informatika versenyekre és az emelt szintű érettségire. Minden hónapban a négy kitűzött feladatból a három legmagasabb pontszámot elért feladat pontszámát számítjuk be az **I** pontversenybe.

Az **I**-jelű pontversenyben minden hónapban egy programozási, egy informatika alkalmazói feladatot, valamint egy érdekes problémát tűzünk ki. Ez utóbbi tartalmában vagy a megoldás eszközében szokatlan; például hasznos, ám kevésbé ismert vagy elterjedt szoftver megismerése szükséges hozzá, esetleg a programozás „hagyományos" eszközein túllépve különleges eszközök, például grafikus felület alkalmazását is igényli. A feladatok egyike jellegében és formájában is lényegében megegyezik az emelt szintű érettségin kitűzött feladatokkal, ezt az (É) betűvel jelezzük a feladat sorszáma mellett. Versenyzőink ezen feladatok megoldásával a vizsgára való felkészülést, az ilyen típusú feladatok megoldásában való jártasságot szerezhetik meg, és tudásukat lemérhetik.

Az **I/S** jelű feladatok Nemes Tihamér Verseny és OKTV szintű, az **I** jelű programozási feladatoknál nehezebb, de az **S** jelűeknél könnyebb programozási feladatok. A megoldáshoz szükséges ismeretek és algoritmusok a két verseny versenykiírásában megtalálhatóak, pl. a `http://tehetseg.inf.elte.hu` és a `http://www.oktatas.hu` oldalakon.

S *pontverseny* – nehezebb programozási feladatok

Az **S** pontverseny egy havonta kitűzött nehezebb **S** programozási feladatból és az **I/S** feladatból áll. Mindkét feladat a programozási versenyekre való felkészülést szolgálja. A megoldáshoz szükséges ismeretek és alkalmazandó algoritmusok körét a Nemzetközi Informatikai Diákolimpiákon alkalmazott IOI Syllabus tartalmazza, lásd `http://www.ioinformatics.org/a_d_m/isc/iscdocuments/ioi-syllabus.pdf`.

Az **S** és **I/S**-jelű feladatok értékelésénél az eredmény helyességén kívül azt is figyelembe vesszük, hogy az algoritmusok mennyire hatékonyak, nagyméretű bemenő adatok esetén is lefutnak-e legfeljebb néhány perc alatt, illetve nem igényelnek-e túlságosan sok memóriát. A futási időre vonatkozó limitet és a memóriakorlátot a feladat leírása tartalmazhatja. Fontos a feladatok be/kimenetének helyes és pontos kezelése. A standard I/O-ról több feladat megoldása kapcsán is írtunk, a leírást tartalmazó `stdio.pdf` fájl honlapunkon elérhető pl. az **S. 64.** feladat megoldásának végén.

A matematika és fizika dolgozatok formája

A szerkesztőség munkatársainak általában nagy mennyiségű dolgozatot kell rövid idő alatt feldolgozniuk. A postán beküldött dolgozatok szétválogatása, javítása és a pontszámok gyors könyvelése akkor lehetséges, ha versenyzőink betartják az alábbi formai követelményeket:

- Minden egyes megoldás **külön lapra** kerüljön. Ez azért nagyon fontos, mert a különböző feladatok más-más javítóhoz kerülnek. A lapok **A4 méretűek** (kb. 21 cm × 30 cm) legyenek.
- **Minden egyes** beküldött lap **bal felső sarkában** nyomtatott betűkkel szerepeljen:
  - a példa betűjele (A, B, C, K, M, P) és száma **pirossal,**
  - a beküldő teljes **neve** és **osztálya,**
  - az **iskola neve** városnévvel együtt,
  - a beküldő **e-mail** címe.
- Törekedjünk az **olvasható írásra** és a rendezett külalakra!

MINTA dolgozat fejlécéhez:

C. 1431.
Szabó 172 István 9. évf.
Miskolc, Földes Ferenc Gimn.
e-mail: pisti@foldes.hu

Jelöljük a kapitány életkorát (években kifejezve) K-val, a hajóét H-val. A hajó $H-K$ évvel ezelőtt volt annyi idős, mint ...

Azokat a dolgozatokat, amelyek szerzőjét nem lehet azonosítani, több feladat megoldását tartalmazzák egy lapon, vagy külalakjuk miatt értékelhetetlenek, nem versenyszerűnek tekintjük.

A matematika és fizika dolgozatok tartalmáról

Maximális pontszám csak teljes megoldásért jár. A puszta eredményközlést nem értékeljük. A kimondott állításokat matematikából bizonyítani kell, fizikából az alaptörvényeket alkalmazva igazolni. A matematika példák megoldásaként csupán számítógépes programot nem fogadunk el! Ha harmincnál több esetet vizsgál a versenyző, pedig le lehetett volna lényegesen szűkíteni az esetek számát, azt is úgy tekintjük, mintha programot írt volna.

Törekedjünk a megoldások rövid, olvasható leírására. A geometria feladatok megoldásához mellékeljünk ábrát vagy ábrákat. Lapunkban a megoldások többségét közöljük: ajánljuk ezek tanulmányozását.

Levezetés és hivatkozás nélkül csak a középiskolai tananyagban szereplő tételeket fogadjuk el. Közismert tételekre (pl. Menelaosz-tétel, Hölder-egyenlőtlenség stb.) elegendő a nevükkel hivatkozni, egyéb esetekben fel kell tüntetni az idézett forrást (cím, oldalszám vagy internet-cím). Tételekre való hivatkozáskor azt is meg kell mutatni, miért teljesülnek a tétel feltételei, és hogyan következik a tétel állításából a bizonyítás gondolatmenetének következő lépése.

Többször előfordult már, hogy egy-egy feladat szerepelt valamely példatárban, vagy megtalálták az interneten. Arra is láttunk példát, hogy egy folyóiratcikkben a feladatban kitűzöttel lényegében ekvivalens, vagy annál általánosabb állítás bizonyítása szerepelt. Célunk továbbra is versenyzőink problémamegoldó képességének feljesztése, nem pedig a keresőprogramok tesztelése, ezért **nem adunk teljes pontszámot azokra a dolgozatokra, amelyek csak a megoldás helyét közlik; a végeredményhez vezető megoldást részletesen le kell írni.** Ez vonatkozik arra az esetre is, ha az adott feladat egy az egyben egy tétel, vagy azzal ekvivalens állítás.

Kérjük, hogy ha a megoldáshoz könyvekben vagy az interneten talált írásokat használnak fel, és ezekből idéznek, tüntessék fel a felhasznált forrásokat.

Az informatika megoldások tartalmi követelményei

Az **I** jelű programozási feladatok megoldását C, C++, Pascal, Python, Java, Basic vagy C# nyelvek illetve, az **I/S** és **S** jelű feladatok megoldását C, C++, Pascal vagy Java nyelvek valamelyikén kell elkészíteni. A fejlesztéshez bármilyen fejlesztőkörnyezet (IDE) használható, azonban az értékelés mindenképpen a következőkkel történik:

- C/C++: Code::Blocks 13.12 (MinGW) vagy Visual C++ 2013 Express,
- Pascal: FreePascal 3., Lazarus 1.6,
- Visual Basic, C#: Visual Studio 2013 Express,
- Python 3.5,
- Java: NetBeans 8.2 JDK 8.

Beküldés előtt tehát mindenképpen ellenőrizendő, hogy a forráskód a fenti listában szereplő eszközzel is fordítható, illetve helyesen működik-e. Csak olyan programokat értékelünk, amelyek a fent megjelölt fordítók egyikével lefordíthatók, illetve – számításos jellegű feladatoknál – a kiadott mintabemenetek legalább felére hiba nélkül, rövid időn belül lefutnak, és megfelelő formátumú, értelmes, de nem feltétlen helyes kimenetet adnak.

Az **I**-jelű pontversenyben kitűzött alkalmazói feladatok megoldásához a Microsoft Office 2007/2010/2013/2016 vagy a LibreOffice 5.4 vagy az OpenOffice 4.1 irodai szoftvercsomagok valamelyike használható. A javítást a programok legfrissebb változataival fogjuk értékelni. A harmadik típusú feladatok jórészt szabadon fölhasználható programok, esetleg kereskedelmi szoftverek időkorlátos próbaváltozatához kapcsolódnak.

Az **S** és **I/S** jelű feladatokra adott megoldásokhoz dokumentációt kell készíteni és a forráskódot kommentekkel kell ellátni. A különálló dokumentációban a megoldás elvi menetének, algoritmusának ismertetését várjuk, döntően három részre tagolva: rövid áttekintés az algoritmusról; majd az algoritmus részletes menete; végül egy rövid útmutató a kód értelmezéséhez, leírás a megvalósítás sajátosságairól.

A forráskód kommentezésének lényege, hogy segítségével – a dokumentáció ismeretében – könnyen megérthető legyen az egyes kódsorok, kódrészletek feladata, szerepe a megoldás menetében. Ennek megfelelően az egyes osztályokat, függvényeket, kisebb-nagyobb összefüggő kódrészleteket, a nehezebben érthető technikai megoldásokat, illetve a fontosabb (globális és lokális) változókat és típusokat kell mindenképp megjegyzéssel ellátni.

Az informatika megoldások formai követelményei

Az informatika feladatok megoldásait kizárólag a KöMaL honlapján, az elektronikus munkafüzetben lehet beküldeni, illetve feltölteni. Amennyiben a megoldás több fájlból áll, úgy egy, a fájlok mindegyikét és a dokumentációt is tartalmazó, a feladat sorszámával egyező nevű mappát kell ZIP tömörítéssel becsomagolva egyetlen fájlként beküldeni. Ügyeljünk arra, hogy a tömörített állományokba futtatható fájlok (pl. a fejlesztéskor létrejövő `.exe` állomány) ne kerüljenek.

A programozási feladatoknál a forráskód első soraiban megjegyzésként szerepeljen

- a feladat száma;
- a versenyző teljes neve (jelzőszámmal) és osztálya;
- az iskola neve városnévvel együtt;
- a versenyző e-mail címe;
- az alkalmazott fordítóprogram neve és verziószáma.

Szöveges dokumentumok (például dokumentáció) esetén az adatok – a matematika és fizika feladatokhoz hasonlóan – a fájl elején, táblázatkezelő feladatoknál pedig külön munkalapon szerepeljenek, amelynek neve ADATOK legyen.

Kérjük, hogy a programozási feladatoknál a program be- és kimenete mindig a feladatban megadott módon valósuljon meg. Erre azért van szükség, mert a beküldött programokat sokféle tesztadatra lefuttatjuk, és ezt igyekszünk automatizálni.

Az informatika feladatokkal kapcsolatos bárminemű kérdéseket, esetleges reklamációkat az `inf-szerk@komal.hu` címre várjuk.

A dolgozatok beküldése postán

A matematika és fizika dolgozatokat postán küldhetik be, vagy felölthetik az internetes munkafüzet felületen. Az informatika feladatok megoldását kizárólag az internetes munkafüzeten keresztül küldhetik be. **Megoldásokat e-mailben nem fogadunk.**

Postai beküldés esetén a dolgozatokat a következő címre várjuk:

KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

A matematika és a fizika feladatok egy borítékban is beküldhetők. Kérjük, mindenki ügyeljen a helyes címzésre. A rossz címre küldött dolgozatokat nem tudjuk értékelni.

A postán beküldött megoldásokhoz **kísérőjegyzéket** kérünk a minta szerint, minden borítékban egy külön papíron felsorolva az összes beküldött dolgozat jelét és számát. A név, osztály és iskola feltétlenül szerepeljen a kísérőjegyzéken!

MINTA kísérőjegyzékhez:

Kísérőjegyzék Szabó 172 István 9. évf. Miskolc, Földes Ferenc Gimn. A 2017. évi 6. számból a következő feladatokra küldök megoldást: B. 4885., B. 4887., B. 4888., B. 4892., B. 4893. Összesen 5 dolgozat.

A megoldások elkészítése és beküldése az Elektronikus Munkafüzetben

Az elektronikus munkafüzet egy webes felület, amellyel az otthon, előre elkészített dolgozatokat feltölthetik, de a megoldás közvetlen beírására, szerkesztésére is lehetőséget ad. **Kézírással készült megoldást csak postai úton fogadunk el.** Képletek szerkesztéséhez a KöMaL fórumban bevált $\TeX$ rendszert használjuk. Ha a megoldó kézzel készít ábrát és azt jól látható minőségben beszkenneli, majd beilleszti a dokumentumba, azt elfogadjuk.

A munkafüzet használata esetén

- A megoldások módosíthatók, átszerkeszthetők a beküldési határidőig.
- Ellenőrizhető, hogy a megoldások épségben megérkeztek.
- A javító közvetlenül a megoldás mellé írhatja rövid értékelését a megoldásról és a kapott pontszámot.
- Versenyzőinket e-mailben értesítjük a pontszámok változásairól.
- Rövid kérdés vagy üzenet küldhető a javítónak, ő pedig ugyanitt válaszolhat.

Az Elektronikus Munkafüzet használatához szükséges jelszót a nevezési lap kitöltésekor küldjük el versenyzőinknek.

Az elektronikus munkafüzet címe:

`https://www.komal.hu/munkafuzet`

Ha valaki hibát talál, vagy új bővítéseket szeretne javasolni, küldjön e-mailt a `munkafuzet@komal.hu` címre, vagy pedig írja meg a KöMaL fórum Internetes munkafüzet című témájában. Segítségét előre is köszönjük.

A beküldési határidő

A beküldési határidő **minden kategóriában** a lap megjelenését követő **hónap 10. napja;** munkaszüneti nap esetén a következő munkanap. A határidő azt jelenti, hogy a küldeményt legkésőbb a határidő napján 24 óráig kell postára adni. (Kérjük, ellenőrizzék a postai bélyegző dátumát, mert későbbi dátumot nem fogadunk el.) **A határidő betartását szigorúan ellenőrizni fogjuk. A határidő után a személyesen behozott dolgozatokat sem fogadjuk el!** Elektronikus beküldés esetén vegyék figyelembe az Internet esetleges hibáit, ilyen okokra hivatkozva sem fogadunk el késedelmes dolgozatokat.

Értékelés

A pontversenyek állását és versenyzőink részletes eredményeit 2017. november végétől a honlapunkon folyamatosan közöljük. A versenyben résztvevő hozzájárul a dolgozatának név nélküli, valamint a szerkesztett változat névvel történő közléséhez. A matematika, fizika és informatika feladatokkal kapcsolatos kérdéseket a `mat-szerk@komal.hu`, `fiz-szerk@komal.hu`, illetve `inf-szerk@komal.hu` címekre várjuk. Reklamációkat a feladat értékelése után két hétig fogadunk el.

Mind a matematika, mind a fizika versenyek hivatalos végeredménye a 2018. szeptemberi számunkban jelenik meg. A legeredményesebb versenyzők arcképét 2018. decemberi számunkban közöljük. A legjobbak a MATFUND Középiskolai Matematikai és Fizikai Alapítvány pályadíjait és tárgyjutalmakat kapnak a 2018. évi KöMaL Ankét rendezvényén. Az okleveleket postán küldjük el.

Néhány megjegyzés

A folyóirat elektronikus változatát havonta frissítjük. A mindenkori pontszámokat (a legeredményesebb versenyzők fényképeivel) rendszeresen közöljük. A lapban kitűzött feladatok a kitűzés hónapjának 28. napjától hozzáférhetők a honlapon.

Javasoljuk, hogy beküldött dolgozataik másolatotát őrizzék meg, hogy a lapban közölt megoldással össze tudják hasonlítani. Ha a dolgozat esetleg elvész a postán, csak másolat esetén tudjuk elfogadni a reklamációt.

Szép, érdekes és nem közismert feladatokat javasolhatnak kitűzésre. A javasolt feladatokat (megoldásokkal együtt) a szerkesztőség címére küldjék el.

A diákok elfogadott javaslatait év végén beszámítjuk a különdíjért folyó versenybe.

Szeretnénk, ha a kitűzött kérdések nem zárulnának le véglegesen a beküldési határidővel, a közölt megoldással. Erre teremt lehetőséget az internetes KöMaL-fórum. Bármely, a lapunkban megjelent feladathoz, cikkhez kapcsolódó megjegyzést, általánosítást szívesen látunk és alkalomadtán közöljük.

Örömmel fogadunk feladatjavaslatokat, cikkeket, szakköri munkáról szóló beszámolókat, közlésre alkalmas iskolai pályamunkákat. Javaslataikat, közleményeiket elküldhetik postán, vagy személyesen juttathatják el szerkesztőségünkbe.

Kérjük a szerkesztőségnek szánt üzeneteket a `szerk@komal.hu` e-mail címre küldeni.

Végezetül mindenkinek eredményes tanévet és sikeres versenyzést kíván a

Szerkesztőség

Matematika feladatok megoldása

B. 4791. *Az ABC háromszög AD és CE magasságvonalainak metszéspontja az M pont. A DE egyenes az AC oldalegyenest a P pontban metszi. Igazoljuk, hogy a PM egyenes merőleges a háromszög B csúcsból induló súlyvonalára.*

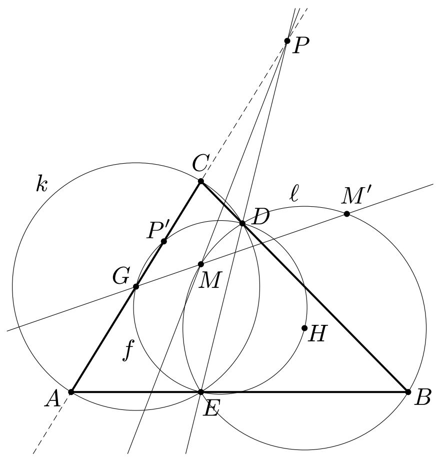
(*5 pont*) (*Kvant*)

I. megoldás. Először tisztázzunk elfajuló, illetve lehetetlen eseteket. A D vagy E pontok akkor eshetnek egybe valamelyik csúccsal, ha a háromszög derékszögű. Ha a derékszög B-nél van, akkor $D \equiv E \equiv B$, nem jöhetett létre a DE-egyenes.

Ha A-nál vagy C-nél van (mivel a két eset lényegében ugyanaz, elég pl. csak az A csúcsra vizsgálni), akkor $A \equiv E \equiv M$, így $P \equiv M$, vagyis most a PM-egyenes nem jöhetett létre. Ezeken az eseteken kívül M nem eshet egybe se talpponttal, se csúccsal, se P-vel. Lehetséges még, hogy $AC||DE$, ilyenkor $AEDC$ húrtrapéz, így $BAC\sphericalangle = BCA\sphericalangle$ miatt ABC egyenlő szárú. Tehát fel kell tenni még, hogy $BC \neq AB$.

Legyen az AC szakasz felezőpontja G. Bizonyítandó, hogy $BG \perp PM$. Mivel $CDA\sphericalangle = CEA\sphericalangle = 90°$, azért D és E az AC szakasz Thálesz-körére illeszkedik. Ezt a kört jelölje k.

Másrészt $MDB\sphericalangle = BEM\sphericalangle = 90°$, ezért D és E a BM szakasz Thálesz-körére is illeszkedik. Legyen ez a kör ℓ, a középpontja pedig BM felezőpontja, H.



1. ábra

Most azt bizonyítjuk, hogy a GD szakasz (és hasonló módon a GE szakasz) az ℓ körhöz húzott érintőszakasz. G, D és H az ABC háromszög Feuerbach-körére* illeszkednek (melyet az *1. ábrán* f-fel jelölünk), a körülírt kör K középpontját viszonyítási pontnak választva pedig

$$\frac{\overrightarrow{G}+\overrightarrow{H}}{2} = \frac{\frac{\overrightarrow{A}+\overrightarrow{C}}{2} + \frac{(\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}+\overrightarrow{C})+\overrightarrow{B}}{2}}{2} = $$

$$= \frac{\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}+\overrightarrow{C}}{2},$$

ami a Feuerbach-kör középpontjának helyvektora (felhasználtuk a

$$\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC}$$

összefüggést is). Így GH átmérő, a Thálesz-tétel miatt $GDH\sphericalangle = 90°$, GD csakugyan érintőszakasz.

Most invertáljunk k-ra. A GD szakasz a k kör sugara, ezért – a szelőszorzattételt is figyelembe véve – ℓ-nek a k-ra invertált képe önmaga. Keressük P képét. Az inverzió illeszkedéstartó, így P egyrészt a DE egyenes képére illeszkedik. A D és az E fixpontok, az egyenes pedig nem megy át G-n, így DE képe egy G-n átmenő kör: DEG körülírt köre, ami ismét ABC Feuerbach-köre. Másrészt P illeszkedik AC képére, ami fixegyenes. Így P' az AC oldalegyenes és a Feuerbach-kör metszéspontja. Két ilyen pont van: az egyik G, de az k középpontja, így nem lehet P képe. A másik a B-hez tartozó magasság talppontja, így ez a magasságtalppont lesz P képe. (Megjegyzés: ha a magasságtalppont és G egybeesnek, akkor ABC egyenlő szárú lett volna, amit kizártunk.) Így $GPB\sphericalangle = 90°$. (Ha D, E és G egy egyenesen lennének, akkor DE is k átmérője lenne, így a Thálesz-tétel szerint $ECD\sphericalangle =$

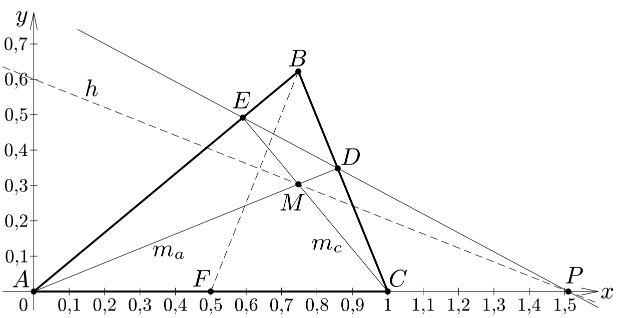
*`https://hu.wikipedia.org/wiki/Feuerbach-kör`.

$= DAE\sphericalangle = 90°$ is igaz lenne, vagyis az ABC háromszög AE és CD oldalegyenesei párhuzamosak lennének, ami lehetetlen.)

Most határozzuk meg M'-t is. Ez rajta van az ℓ fixkörön, így GM és ℓ második metszéspontja. Mivel az ℓ kör BM Thálesz-köre, így $GM'B\sphericalangle = MM'B\sphericalangle = 90°$ (ha M és M' fordított sorrendben helyezkednek el, akkor is igaz az állítás, mert kiegészítő szögek lesznek). Most már meghatározhatjuk PM képét. G-n nem mehet át, mert akkor az M pont $PG \equiv AC$-n lenne, ami a derékszögű háromszög lehetetlen esetéhez vezet vissza. Így PM képe a G-n, P'-n és M'-n átmenő kör. Mivel $GM'B\sphericalangle = GP'B\sphericalangle = 90°$, azért ez BG Thálesz-köre. Eközben BG egy G-n átmenő egyenes, így képe önmaga. Tehát PM képének centrálisa a BG egyenes, BG képe. Ez kör és egyenes között derékszöget jelent, így mivel az inverzió szögtartó, az eredeti PM egyenes és BG is merőlegesek voltak. Ezt kellett bizonyítani.

Polgár Márton (Budapest, Németh László Gimn., 12. évf.)
dolgozatát felhasználva

II. megoldás. Legyenek az A, B illetve C pont koordinátái rendre $(0; 0)$, $(a; b)$, $(1; 0)$, ahol $b \neq 0$, így állhat majd a számolás során törtek nevezőjében.



2. ábra

A továbbiakban két főbb dolgot fogunk használni:

– Adott $(x_1; y_1)$ és $(x_2; y_2)$ pontokon átmenő egyenes egyenlete:

$$y = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}x + \left(y_1 - \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}x_1\right).$$

– Két, a tengelyekkel nem párhuzamos egyenes akkor merőleges egymásra, ha meredekségeik szorzata -1.

Az AB egyenes egyenlete: $y = \frac{b}{a}x$.

A BC egyenes egyenlete: $y = -\frac{b}{1-a}x + \frac{b}{1-a}$.

A CE egyenes egyenlete: $y = -\frac{a}{b}x + \frac{a}{b}$ (az állandót onnan tudjuk, hogy az egyenes átmegy a C ponton).

Az AD egyenlete: $y = \frac{1-a}{b}x$.

Ha $a = 0$ vagy $a = 1$, akkor az ABC háromszög A-ban vagy C-ben derékszögű, D és E egyike az x tengelyen van, egybeesik M-mel és a derékszögű csúccsal, így P

is egybeesik M-mel, tehát P és M nem határoz meg egyenest. Ezeket az értékeket tehát kizárhatjuk.

Tudjuk, hogy D rajta van a BC és m_a egyeneseken, tehát felírható a következő egyenlet (a D pont első koordinátája a következő egyenletben x):

$$-\frac{b}{1-a}\cdot x+\frac{b}{1-a}-\frac{1-a}{b}\cdot x=0,$$

$$x=\frac{b^2}{(1-a)^2+b^2}.$$

(A számlálóban két nem 0 értékű szám négyzetének összege áll, tehát biztosan nem 0.) A D pont második koordinátája:

$$\frac{1-a}{b}\cdot\frac{b^2}{(1-a)^2+b^2}=\frac{b(1-a)}{(1-a)^2+b^2}.$$

Tudjuk, hogy E rajta van az AB és m_c egyeneseken, tehát felírható a következő egyenlet (az E pont első koordinátája a következő egyenletben x):

$$\frac{b}{a}x-\left(-\frac{a}{b}x+\frac{a}{b}\right)=0,$$

$$x=\frac{a^2}{a^2+b^2}.$$

Itt $b\neq 0$, ezért a számláló sem 0. Az E pont második koordinátája:

$$\frac{b}{a}\cdot\frac{a^2}{a^2+b^2}=\frac{ab}{a^2+b^2}.$$

A DE egyenes meredeksége:

$$\frac{\dfrac{b(1-a)}{(1-a)^2+b^2}-\dfrac{ab}{a^2+b^2}}{\dfrac{b^2}{(1-a)^2+b^2}-\dfrac{a^2}{a^2+b^2}}.$$

A nevezőben a D és az E pont első koordinátájának különbsége áll. Ha ez 0, akkor a két pont egybeesik egymással és a B csúccsal, vagyis az ABC háromszög B-ben derékszögű. Ekkor a feladat nem értelmezhető, így feltesszük, hogy ez nem igaz. A kifejezést egyszerűsítve a következőt kapjuk: $\frac{(1-2a)b}{-a^2+a+b^2}$. (Lépések: (a^2+b^2)-tel, illetve $\left((1-a)^2+b^2\right)$-tel való bővítés, szorzattá alakítás, b^2+a^2-1 szorzótényezővel való egyszerűsítés. Ha ez utóbbinak 0 lenne az értéke, akkor a nevező is 0 lenne, viszont nem 0 értékről indultunk, és csak szoroztunk nem 0 értékű kifejezésekkel, tehát nem lehet 0 a nevező. A végeredmény így egy értelmezhető tört.)

Mivel $1-2a=0$ esetén $AB=BC$, és ekkor nem jönne létre a P metszéspont, ezért feltehetjük, hogy $1-2a\neq 0$.

Mivel az egyenes átmegy az E ponton, a képletében szereplő konstans értéke:

$$\frac{ab}{a^2+b^2}-\frac{(1-2a)b}{-a^2+a+b^2}\cdot\frac{a^2}{a^2+b^2},$$

aminek egyszerűbb alakja $\frac{ab}{-a^2+a+b^2}$. (Lépések: $0\neq\big(-a^2+a+b^2\big)$-tel való bővítés, összevonás, szorzattá alakítás, $0\neq\big(a^2+b^2\big)$-tel való egyszerűsítés. Így a végeredmény egy értelmezhető tört.)

A DE egyenes egyenlete tehát:

$$y=\frac{(1-2a)b}{-a^2+a+b^2}x+\frac{ab}{-a^2+a+b^2}.$$

A P pontról tudjuk, hogy rajta van az AC egyenesen, vagyis második koordinátája 0, és rajta van a DE egyenesen, tehát felírható a következő egyenlet a P pont első koordinátájára: $\frac{(1-2a)bx+ab}{-a^2+a+b^2}=0$. Ez akkor igaz, ha $(1-2a)bx+ab=0$, vagyis $x=\frac{-a}{1-2a}$.

Az M pont első koordinátája a, ugyanis a BM egyenes merőleges az x tengelyre. Mivel M rajta van az m_a egyenesen, második koordinátája $\frac{1-a}{b}a=\frac{a-a^2}{b}$.

A PM egyenes meredeksége:

$$\frac{\frac{a-a^2}{b}-0}{a-\frac{-a}{1-2a}}=\frac{\frac{a-a^2}{b}}{\frac{2a-2a^2}{1-2a}}=\frac{\frac{1}{b}}{\frac{2}{1-2a}}=-\frac{1-2a}{2b}.$$

F koordinátái $(0;0,5)$, ugyanis AC felezőpontja. Tehát a BF egyenes egyenlete: $\frac{b-0}{a-0{,}5}=\frac{2b}{2a-1}$. Mivel $-\frac{1}{\frac{2b}{2a-1}}=-\frac{1-2a}{2b}$, azért BF merőleges PM-re.

Szabó Dávid (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 9. évf.)
dolgozatát felhasználva

Megjegyzések. 1. A fő hiba a megoldásokban a diszkusszió hiánya volt. Ez a koordinátageometriai megoldásokban nem csupán geometriai, de algebrai hiányt is jelent, jellemzően 0-val való osztást.

2. Többen a számos fellépő húrnégyszöget használták ki, támaszkodva a kerületi szögek tételére, illetve bizonyos esetekben a hatványvonal tulajdonságaira; mivel sok kört lehetett észrevenni, több különböző úton is el lehetett jutni a megoldáshoz. Egy ilyen megoldás olvasható honlapunkon:
`https://www.komal.hu/verseny/feladat.cgi?a=feladat&f=B4791&l=hu`.

48 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 12 versenyző: Andó Angelika, Cseh Kristóf, Csorba Benjámin, Fuisz Gábor, Horváth András János, Kocsis Júlia, Kondákor Márk, Nagy Dávid Paszkál, Polgár Márton, Szabó Dávid, Vágó Ákos, Váli Benedek. 4 pontos 17, 3 pontos 10, 2 pontos 3, 1 pontos 2, 0 pontos 3 dolgozat. Nem versenyszerű 1 dolgozat.

B. 4840. *Mutassuk meg, hogy minden egész szám felírható $x^2+y^2-z^2$ alakban alkalmas x, y, z pozitív egész számokkal.*

(*3 pont*)

Megoldás. Legyen a egy páratlan szám, ahol $|a|>1$ és $y=\left|\frac{a+1}{2}\right|$ és $z=$ $=\left|\frac{a-1}{2}\right|$.

Legyen először $x=1$. Ekkor x, y és z pozitív egészek a kikötései miatt és

$$n=x^2+y^2-z^2=1+\frac{a^2+2a+1}{4}-\frac{a^2-2a+1}{4}=a+1.$$

Tehát ezzel a módszerrel elő tudjuk állítani a 3-nál nagyobb és (-1)-nél kisebb páros számokat, vagyis $n\leqslant -2$ vagy $4\leqslant n$ és n páros szám. Kimaradó páros számok a 0 és a 2.

Legyen most $x=2$. Ekkor x, y és z pozitív egészek a kikötései miatt és

$$n=x^2+y^2-z^2=4+\frac{a^2+2a+1}{4}-\frac{a^2-2ab+1}{4}=a+4.$$

Tehát ezzel a módszerrel elő tudjuk állítani a 6-nál nagyobb és a 2-nél kisebb páratlan számokat, vagyis $n\leqslant 1$ vagy $7\leqslant n$ és n páratlan szám. Kimaradó páratlan számok a 3 és az 5.

Már csak a 0, 2, 3, 5 számokat kell előállítani:

$$0=3^2+4^2-5^2;$$
$$2=3^2+3^2-4^2;$$
$$3=4^2+6^2-7^2;$$
$$5=4^2+5^2-6^2.$$

Tehát minden egész számra bebizonyítottuk, hogy felírható $x^2+y^2-z^2$ alakban.

Busa Máté (Nagykanizsa, Batthyány Lajos Gimn., 11. évf.)
dolgozata alapján

120 dolgozat érkezett. 3 pontos 68, 2 pontos 12, 1 pontos 30, 0 pontos 10 dolgozat.

B. 4847. *Legyen f a $[0;1]$ intervallumon értelmezett pozitív, korlátos függvény. Igazoljuk, hogy léteznek olyan x_1 és x_2 számok, amelyekre*

$$\frac{(x_2-x_1)f^2(x_1)}{f(x_2)}>\frac{f(0)}{4}.$$

(*6 pont*) *O. Reutter* (Németország)

Megoldás. A megoldás során elég annyit feltenni, hogy f egy a $[0,1]$ intervallumon értelmezett pozitív függvény; a korlátosság feltétele elhagyható. Indirekt bizonyítva föltesszük, hogy

(i) $$\frac{(x_2-x_1)f^2(x_1)}{f(x_2)}\leqslant\frac{f(0)}{4}$$

teljesül minden x_1 és x_2 számra. (A továbbiakban mindig $x, x_1, x_2 \in [0,1]$ és $x_2 \geqslant x_1$.) Ebből belátjuk, hogy

(ii) minden n pozitív egész számhoz van olyan c_n pozitív konstans, hogy minden x-re $f(x) \geqslant c_n x^n f(0)$.

Ehhez átrendezzük (i)-et (pozitív számokkal szorzunk):

$$4(x_2 - x_1)f^2(x_1) \leqslant f(x_2)f(0); \tag{iii}$$

$x_1 = 0$-t behelyettesítve: $f(x_2)f(0) \geqslant 4x_2 f^2(0)$, azaz $f(x_2) \geqslant 4x_2 f(0)$ minden x_2-re. Ezzel meg is kaptuk az első c_n értéket: $c_1 = 4$.

Tegyük fel, hogy kaptunk már egy pozitív c_n értéket, amely minden x-re teljesíti az $f(x) \geqslant c_n x^n f(0)$ egyenlőtlenséget. Ekkor (iii)-at felírva, majd x_1-re alkalmazva az előbbi egyenlőtlenséget kapjuk, hogy

$$f(x_2)f(0) \geqslant 4(x_2 - x_1)f^2(x_1) \geqslant 4(x_2 - x_1)c_n^2 x_1^{2n} f^2(0).$$

Osztva $f(0) > 0$-val és $x_1 = \frac{2nx_2}{2n+1}$ -et beírva:

$$f(x_2) \geqslant 4(x_2 - x_1)c_n^2 x_1^{2n} f(0) = 4c_n^2 f(0) \cdot \frac{(2n)^{2n}}{(2n+1)^{2n+1}} \cdot x_2^{2n+1}.$$

Ezek szerint a

$$c_{2n+1} = 4 \cdot \frac{(2n)^{2n}}{(2n+1)^{2n+1}} \cdot c_n^2$$

kielégíti (ii)-t.

Végül a k-ra vonatkozó teljes indukcióval megmutatjuk, hogy

$$c_{2^k-1} = \frac{2^{k \cdot 2^k}}{(2^k - 1)^{2^k - 1}}.$$

Valóban, ez teljesül, ha $k = 1$, és ha egy adott k-ra igaz, akkor az előbbiek szerint

$$c_{2^{k+1}-1} = c_{2(2^k-1)+1} = 4 \cdot \frac{\big(2(2^k-1)\big)^{2(2^k-1)}}{\big(2(2^k-1)+1\big)^{2(2^k-1)+1}} \cdot c_{2^k-1}^2 =$$

$$= 2^2 \cdot 2^{2^{k+1}-2} \cdot \frac{(2^k-1)^{2(2^k-1)}}{\big(2^{k+1}-1\big)^{2^{k+1}-1}} \cdot \frac{\big(2^{k\cdot 2^k}\big)^2}{\big((2^k-1)^{2^k-1}\big)^2} = \frac{2^{(k+1)2^{k+1}}}{\big(2^{k+1}-1\big)^{2^{k+1}-1}},$$

tehát teljesül $(k+1)$-re is.

Így minden pozitív egész k-ra és minden $x \in [0,1]$-re igaz, hogy

$$f(x) \geqslant c_{2^k-1} x^{2^k-1} f(0) = \frac{2^{k\cdot 2^k}}{(2^k-1)^{2^k-1}} x^{2^k-1} f(0) =$$

$$= 2^k \cdot \left(\frac{2^k}{2^k-1}\right)^{2^k-1} x^{2^k-1} f(0) \geqslant 2^k x^{2^k-1} f(0).$$

Speciálisan, $x=1$-re:

$$f(1) \geqslant 2^k f(0),$$

minden pozitív egész k esetén. Mivel $f(0)$ pozitív, ez ellentmondás.

Baran Zsuzsanna (Debrecen, Fazekas M. Gimn., 12. évf.)

18 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott 17 versenyző: Baran Zsuzsanna, Borbényi Márton, Daróczi Sándor, Döbröntei Dávid Bence, Gáspár Attila, Hansel Soma, Imolay András, Janzer Orsolya Lili, Kerekes Anna, Kovács Benedek, Matolcsi Dávid, Schrettner Jakab, Simon Dániel Gábor, Szabó Dávid, Szemerédi Levente, Tóth Viktor, Weisz Máté. 0 pontos 1 dolgozat.

B. 4857. *Határozzuk meg azokat az (n,k) pozitív egészekből álló számpárokat, amelyekre $\left(2^{2^n}+1\right)\left(2^{2^k}+1\right)$ osztható nk-val.*

(6 pont) *Bolgár feladat*

Megoldás. Legyen p tetszőleges, 2-nél nagyobb prím. Vizsgáljuk a

$$2^{2^1}, 2^{2^2}, 2^{2^3}, \ldots$$

számok p-vel való osztási maradékát. Ezek a számok sorban egymás négyzetei, hiszen

$$\left(2^{2^n}\right)^2 = 2^{2^{n+1}}.$$

Ha valamelyikük maradéka -1, akkor a következőé $(-1)^2=1$, és az összes többié is 1. Ebből következik, hogy a (-1)-es maradék legfeljebb egyszer fordulhat elő. Tegyük fel, hogy előfordul, azaz $2^{2^m} \equiv -1 \pmod p$, másszóval $p \mid 2^{2^m}+1$. Megmutatjuk, hogy ekkor $m<p$. Tételezzük fel ugyanis, hogy $m \geqslant p$. Akkor előtte legalább $p-1$ maradék volt, de egyik sem lehet 0, (mert egy kettőhatványt nem oszthat egy páratlan prím), továbbá egyik sem lehet -1, hiszen csak az m-edik -1. Így az összes maradék közül csak $(p-2)$-féle lehet előtte, ezért a skatulyaelv miatt lesz két megegyező maradék, mondjuk az s-edik és a t-edik, ahol $1 \leqslant s<t<m$. Ekkor, mivel egymás után egymás négyzetei vannak, és egy szám négyzetének p-vel való maradéka a szám p-vel való maradéka négyzetének a p-vel való maradéka, azért az $(s+1)$-edik és a $(t+1)$-edik maradékok is megegyeznek egymással, ugyanezért az $(s+2)$-edik és a $(t+2)$-edik is stb. Így azonban az $m-(t-s)$-edik maradék megegyezne az m-edikkel, vagyis mindkettő (-1) lenne, ami lehetetlen. Tehát valóban $m<p$.

Tegyük fel, hogy egy n,k számpárra $nk \mid \left(2^{2^n}+1\right)\left(2^{2^k}+1\right)$; szimmetria miatt feltehetjük, hogy $n \leqslant k$. Ha $n>1$, akkor legyen p az n egyik prímtényezője. Nyilván $p \neq 2$, hiszen $\left(2^{2^n}+1\right)\left(2^{2^k}+1\right)$ páratlan. Mivel $p \leqslant n \leqslant k$, a fentiek szerint sem $2^{2^n}+1$, sem pedig $2^{2^k}+1$ nem lehet p-vel osztható, de akkor a szorzatuk sem, ami ellentmondás; így szükségképpen $n=1$. Tegyük fel, hogy $k>1$, és az egyik prímosztója p. A fenti esethez hasonlóan $p>2$, és $p \leqslant k$ miatt p nem osztja a $2^{2^k}+1$ tényezőt. Ezért $p \mid k \mid \left(2^{2^n}+1\right)\left(2^{2^k}+1\right)$ csak úgy lehetséges, hogy $p \mid 2^{2^n}+1=5$, ezért – mivel k minden prímtényezője relatív prím $2^{2^k}+1$-hez – $k \mid 5$.

Tehát a lehetséges számpárok (a sorrendet is figyelembe véve): $(1,1)$, $(1,5)$, $(5,1)$, amik valamennyien teljesítik is a feladat feltételét.

Janzer Orsolya Lili (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.)

33 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott 21 versenyző: Andó Angelika, Baran Zsuzsanna, Borbényi Márton, Csahók Tímea, Daróczi Sándor, Döbröntei Dávid Bence, Gáspár Attila, Győrffy Ágoston, Imolay András, Janzer Orsolya Lili, Kerekes Anna, Mikulás Zsófia, Németh Balázs, Saár Patrik, Schrettner Jakab, Simon Dániel Gábor, Szakály Marcell, Tóth Balázs, Tóth Viktor, Weisz Máté, Zólomy Kristóf. 5 pontos 3, 3 pontos 3, 1 pontos 3, 0 pontos 3 dolgozat.

B. 4864. *Egy zsákban* 100 *piros és* 100 *kék golyó van. Addig húzzuk ki visszatevés nélkül, véletlenszerűen, egyesével a golyókat, amíg mind a* 100 *piros golyót ki nem húztuk. Határozzuk meg a zsákban maradt golyók számának várható értékét.*

(*5 pont*)

1. megoldás. Minden húzás után írjuk fel, hogy milyen golyót húztunk. Ha kéket, azt K-val, ha pirosat, azt P-vel jelöljük. A 100-adik piros után írjunk le annyi kéket, amennyi a zsákban maradt. Így egy olyan 200 hosszú P–K sorozathoz jutunk, melyben 100 db P és 100 db K van.

Összesen $\binom{200}{100}$ ilyen sorozatot tudunk felírni.

Számoljuk össze azokat a lehetőségeket, amikor k darab golyó marad a zsákban. Vagyis az utolsó k db betű K és előttük P van. A többi golyót tetszőlegesen húzhatjuk ki, azaz az első $200-k-1$ helyre 99 db P-t és $100-k$ db K-t írhatunk az összes lehetséges elrendezésben. Ezt $\binom{199-k}{99}$-féleképpen tehetjük meg (kiválasztjuk, hogy melyik helyre kerüljön piros (P) golyó.) Így annak a valószínűsége, hogy k darab golyó marad a zsákban:

$$\frac{\binom{199-k}{99}}{\binom{200}{100}}.$$

Ekkor a keresett várható érték az alábbi formában írható:

$$E=\sum_{i=0}^{100}\frac{\binom{199-i}{99}}{\binom{200}{100}}\cdot i=\left[1\cdot\binom{198}{99}+2\cdot\binom{197}{99}+\ldots+100\cdot\binom{99}{99}\right]\cdot\frac{1}{\binom{200}{100}}.$$

Célunk a szögletes zárójelben lévő kifejezés egyszerűbb alakra hozása. Ehhez az alábbi azonosságot fogjuk felhasználni:

$$\binom{n}{k}+\binom{n-1}{k}+\ldots+\binom{k}{k}=\binom{n+1}{k+1}.$$

(Ennek, az ún. zokni-szabálynak a bizonyítása: cseréljük ki az összegben a $\binom{k}{k}$ tagot $\binom{k+1}{k+1}$-re, majd jobbról balra haladva mindig az utolsó két tagot helyettesítsük az $\binom{l}{m}+\binom{l}{m+1}=\binom{l+1}{m+1}$ azonosság alapján a megfelelő taggal.)

Ez alapján az

$$\binom{198}{99}+\binom{197}{99}+\binom{196}{99}+\ldots+\binom{99}{99}=\binom{199}{100},$$

$$\binom{197}{99}+\binom{196}{99}+\ldots+\binom{99}{99}=\binom{198}{100},$$

$$\binom{196}{99}+\ldots+\binom{99}{99}=\binom{197}{100},$$

$$\vdots$$

$$\binom{100}{99}+\binom{99}{99}=\binom{101}{100},$$

$$\binom{99}{99}=\binom{100}{100}$$

egyenletekhez jutunk. Ezeket összeadva kapjuk, hogy a bal oldal épp a szögletes zárójelben álló kifejezés, míg a jobb oldalt átalakíthatjuk (ismét az a zokni-szabályt felhasználva):

$$\binom{199}{100}+\binom{198}{100}+\ldots+\binom{101}{100}+\binom{100}{100}=\binom{200}{101}=\binom{200}{99}.$$

A keresett várható érték tehát:

$$E=\frac{\binom{200}{99}}{\binom{200}{100}}=\frac{\frac{200!}{99!\cdot 101!}}{\frac{200!}{100!\cdot 100!}}=\frac{100}{101}.$$

Megjegyzés. A feladat állítása n kék és n piros golyóra is megfogalmazható, ekkor a várható érték $\frac{n}{n+1}$.

Döbröntei Dávid Bence (Pápa, Türr István Gimn. és Koll., 11. évf.)

Megjegyzés. Azt, hogy a kérdéses összeg $\binom{200}{101}$-gyel egyenlő, *Busa Máté* (Nagykanizsa, Batthyány Lajos Gimn., 11. évf.) a következőképpen bizonyította: Vegyük az első 200 pozitív egész számot. Ezek közül szeretnénk kiválasztani 101 db számot. Ezt megtehetjük $\binom{200}{101}$-féleképpen. Máshogy összeszámolva: Legyen a kiválasztott számok közül növekvő sorrendben a 100. szám egy x szám, ahol x nyilván legalább 100 és legfeljebb 199. Ilyen esetből, ahol a 100. legkisebb szám az x, pontosan $(200-x)\cdot\binom{x-1}{99}$ van, hiszen a legnagyobb kiválasztott szám $(200-x)$-féle lehet, az x-nél kisebb 99 darab számot pedig $\binom{x-1}{99}$-féleképpen lehet kiválasztani. Ha összeadjuk a lehetőségeket a lehetséges x-ekre, akkor megkapjuk, hogy

$$\binom{200}{101}=\sum_{x=100}^{199}(200-x)\cdot\binom{x-1}{99}=100\cdot\binom{99}{99}+99\cdot\binom{100}{99}+\ldots+1\cdot\binom{198}{99}.$$

II. megoldás. Feltételezhetjük, hogy az utolsó piros golyó kihúzása után a zsákban maradt golyókat is egyenként kihúzzuk. Így a 200 golyónak $\binom{200}{100}$ féle sorrendje lehet, minden eset ugyanolyan valószínű. Feltételezhetjük, hogy a golyókat fordított sorrendben húztuk ki, ekkor az első piros golyó előtt kihúzott kék golyók számának várható értékét keressük.

Állítás. *Ha összesen* 100 *piros és* n *kék golyónk van, akkor az első piros golyó előtt kihúzott kék golyók számának várható értéke* $\frac{n}{101}$.

Bizonyítsunk teljes indukcióval. Ha $n=0$, akkor az állítás triviális.

Ha $n \geqslant 1$, akkor az első golyó $\frac{100}{100+n}$ valószínűséggel piros, ekkor a kék golyók száma 0. Az első golyó $\frac{n}{100+n}$ valószínűséggel kék. Az indukciós feltevés miatt ezután még átlagosan $\frac{n-1}{101}$ kék golyót húzunk ki, így a kék golyók számának várható értéke:

$$\mathrm{E} = \frac{n}{100+n} \cdot \left(1 + \frac{n-1}{101}\right) = \frac{n}{100+n} \cdot \frac{100+n}{101} = \frac{n}{101}.$$

Ezzel az állítást igazoltuk. Ha $n=100$, akkor a várható érték $\frac{100}{101}$.

Gáspár Attila (Miskolc, Földes Ferenc Gimn., 11. évf.)

III. megoldás. A feladatban leírt folyamatot kibővíthetjük úgy, hogy a végén a zsákban maradt golyókat is kihúzzuk, ilyen módon mindig kihúzásra kerül mind a 200 golyó.

Ekkor azon kék golyók számának várható értékét kell meghatároznunk, melyek a kihúzottak sorában az utolsó piros golyó után következnek.

Legyen p_1 annak a valószínűsége, hogy egy adott kék golyó az utolsó piros golyó után kerül kihúzásra. Ha csak ezt a kék golyót és a 100 piros golyót tekintjük, ezen 101 golyó közül mindegyik ugyanannyi eséllyel lesz utolsóként kihúzva. Vagyis a kék golyó $p_1 = \frac{1}{101}$ eséllyel lesz az utolsó piros után kihúzva.

Ugyanígy, mind a 100 kék golyóról egyenként elmondható, hogy az $\frac{1}{101}$ valószínűséggel lesz az utolsó piros golyó után kihúzva. Ha a 100 kék golyóhoz egyenként valószínűségi változókat rendelünk, melyek értéke 1, ha a golyó az utolsó piros után kerül kihúzásra, és 0, ha nem, akkor a keresett várható érték a 100 valószínűségi változó összegének várható értéke. Változók összegének várható értéke pedig egyenlő a változók várható értékeinek összegével. Mivel minden golyóhoz tartozó változó $\frac{1}{101}$ eséllyel lesz 1, és a maradék eséllyel 0, minden változóhoz $\frac{1}{101}$ várható érték tartozik. Így a 100 kék golyóhoz tartozó változók várható értékeinek összege $100 \cdot \frac{1}{101} = \frac{100}{101}$, vagyis az utolsó piros után húzott kék golyók számának is $\frac{100}{101}$ a várható értéke.

A keresett várható érték tehát $\frac{100}{101}$.

Kovács Benedek (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.)

IV. megoldás. Egy véletlenszerű, viszatevés nélküli kihúzást úgy is elképzelhetünk, mint 200 db golyót sorrendben, melyből 100 piros, 100 pedig kék színű. Ez azért igaz, mert amikor az utolsó piros golyót kihúzzuk, utána már csak kék marad a zsákban, azok kihúzása pedig egyféleképpen történhet meg.

Tekintsük a 100 piros golyót, amelyek 101 helyet határoznak meg (előttük és utánuk is van egy-egy hely). Ezen 101 helyre fogunk 100 db kék golyót elhelyezni. Jelölje d_i az i-edik helyen lévő golyók számát, a részeket értelemszerűen számozzuk.

Be fogjuk bizonyítani, hogy tetszőleges $1 < i \leqslant 100$ esetén $E(d_i) = E(d_{i+1})$. Ehhez vegyük az összes lehetséges kihúzást. Ezek egyértelműen összepárosíthatók, hiszen az i-edik helyen levő golyókat megcserélve az $(i+1)$-edik helyen lévőkkel, egyértelműen megkapjuk az adott kihúzás párját (ami akár önmaga is lehet). A párosítás lehetősége miatt igazoltuk, hogy $E(d_i) = E(d_{i+1})$. Ebből az egyenlőség tranzitivitása miatt $E(d_i) = E(d_j)$ tetszőleges $1 < i, j \leqslant 100$ esetén. Azt is tudjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{101} E(d_i) = 100 = \{\text{a kék golyók száma}\}.$$

Ezért

$$E(d_i) = \frac{100}{101},$$

így ez a végén zsákban maradó golyók számának várható értéke.

Nagy Nándor (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 9. évf.)

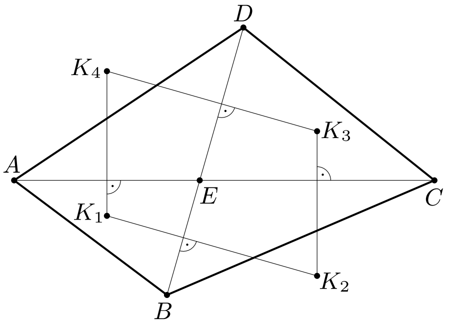
64 dolgozat érkezett. 5 pontos 35, 4 pontos 8, 3 pontos 6, 2 pontos 6, 1 pontos 3, 0 pontos 6 dolgozat.

B. 4870. *Az $ABCD$ konvex négyszög átlóinak metszéspontja az E pont. Igazoljuk, hogy az ABE, BCE, CDE és DAE háromszögek Feuerbach-köreinek középpontjai egy paralelogramma csúcsai, vagy egy egyenesbe esnek.*

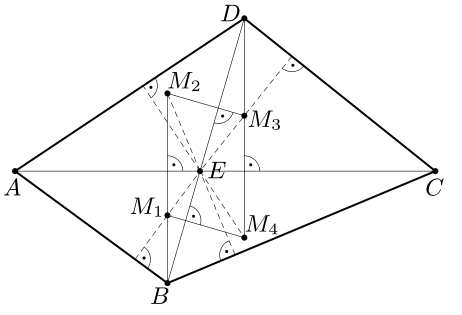
(*5 pont*) Javasolta: *Miklós Szilárd* (Herceghalom)

Megoldás. Mivel egy háromszög Feuerbach-körének középpontja a körülírt köre középpontjának és magasságpontjának a szakaszfelező pontja, így vizsgáljuk meg ezeket a pontokat.

Jelölje az ABE, BCE, CDE, ADE háromszögek körülírt körének középpontját rendre K_1, K_2, K_3, K_4 (*1. ábra*). Mivel egy háromszög körülírt körének középpontja az oldalfelezőinek a metszéspontja, így $K_1K_2 \parallel K_3K_4 \perp BD$ és $K_1K_4 \parallel K_2K_3 \perp AC$, így mivel két párhuzamos oldalpárja van $K_1K_2K_3K_4$ paralelogramma.



1. ábra



2. ábra

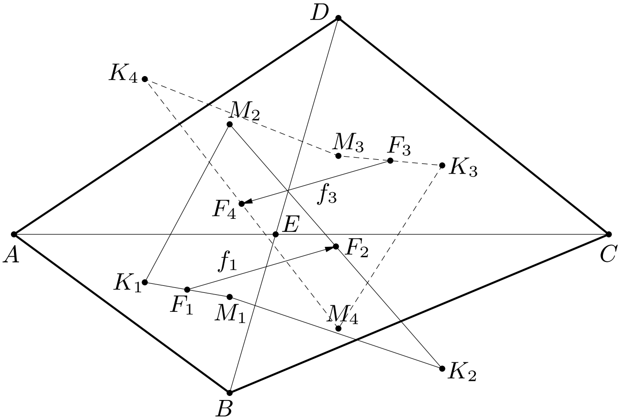
Legyenek a fenti háromszögek magasságpontjai rendre M_1, M_2, M_3, M_4 (*2. ábra*). A magasságpont a csúcsokból a szemközti oldalakra állított merőlegesek metszéspontja, így $M_1M_2 \parallel M_3M_4 \perp AC$ és $M_1M_4 \parallel M_2M_3 \perp BD$, tehát hasonlóan az előzőhöz $M_1M_2M_3M_4$ is paralelogramma.

Legyen $\overrightarrow{K_1K_2} = \overrightarrow{k_1}$, $\overrightarrow{K_3K_4} = \overrightarrow{k_3}$, $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{m_1}$, $\overrightarrow{M_3M_4} = \overrightarrow{m_3}$. Mivel $K_1K_2K_3K_4$ és $M_1M_2M_3M_4$ paralelogramma, így tudjuk, hogy $\overrightarrow{k_1} = -\overrightarrow{k_3}$ és $\overrightarrow{m_1} = -\overrightarrow{m_3}$. Mivel $K_1M_1K_2M_2$ négyszögben F_1F_2 középvonal (*3. ábra*), ezért tudjuk, hogy

$$\overrightarrow{F_1F_2} = \overrightarrow{f_1} = \frac{\overrightarrow{k_1} + \overrightarrow{m_1}}{2}$$

Valamint hasonlóan a $K_3M_3K_4M_4$ négyszögben

$$\overrightarrow{F_3F_4} = \overrightarrow{f_3} = \frac{\overrightarrow{k_3} + \overrightarrow{m_3}}{2} = \frac{-(\overrightarrow{k_1} + \overrightarrow{m_1})}{2} = -\overrightarrow{f_1}.$$



3. ábra

Tehát $\overrightarrow{f_3} = -\overrightarrow{f_1}$, így $F_1F_2 \parallel F_3F_4$ és egyenlő hosszúak, vagyis $F_1F_2F_3F_4$ valóban paralelogramma, vagy a négy pont egy egyenesre esik. Ezt kellett bizonyítani.

Csahók Tímea (Budapest, Németh László Gimn., 12. évf.)
dolgozata alapján

40 dolgozat érkezett. 5 pontos 33, 4 pontos 3, 2 pontos 2, 1 pontos 1 dolgozat. Nem versenyszerű 1 dolgozat.

POLYGON

Polygon pályázat matematikából középiskolásoknak

A Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézete pályázatot hirdet középiskolás diákok (9–12. évfolyam) számára.

A pályázat témája:

Középiskolai matematikához kapcsolódó problémák, érdekességek

Ami biztosan ide tartozik: hogyan lehet egy ismert feladatot folytatni, újszerű és érdekes feladatok vagy trükkös megoldások, régi korok matematikája, hétköznapok matematikája, a matematika és a természettudományok kapcsolata, gyakorlati alkalmazások, informatikai alkalmazások és kapcsolatok (például algoritmusok) stb. Pályázni egyénileg lehet, vagy maximum 3 fős csapattal. A pályamunkákat a Bolyai Intézet oktatóiból álló zsűri fogja elbírálni.

A legjobb pályamunkákat díjakkal és dicséretekkel (oklevél, könyvutalvány) jutalmazzuk. A pályázó(k) által megnevezett felkészítő tanár(ok) a díjazottakkal és a dicséretben részesültekkel azonos jutalomban és szintén oklevélben részesülnek. Minden pályamunkáról szöveges szakmai értékelést készítünk, amit a díjkiosztó ünnepségen vehetnek át a versenyzők. A legjobb dolgozatokat a Polygon c. folyóirat szerkesztőbizottsága is megvizsgálja közölhetőség szempontjából. A beadott dolgozatok maximális terjedelme 10 oldal lehet (ábrákkal, képekkel, táblázatokkal, grafikonokkal együtt).

Beküldési határidő: **2017. december 15.** A pályamunkákat a következő címre kérjük beküldeni: Katonáné dr. Horváth Eszter egyetemi adjunktus, SZTE Bolyai Intézet, 6720 Szeged, Aradi vértanúk tere 1. A borítékra kérjük ráírni: Polygon pályázat matematikából, középiskolásoknak. A dolgozatokhoz az alábbi adatok mellékelését kérjük:

1. a pályázó(k) neve, lakcíme, telefonszáma, email címe,
2. a pályázó(k) iskolájának neve, címe, telefonszáma, email címe,
3. a felkészítő tanár(ok) neve, email címe.

Kérjük, tekintsék meg a pályázat honlapját is:

`http://www.math.u-szeged.hu/~horvath/palyazat.htm`.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (547–552.)

K. 547. Péter gondolt egy pozitív egész számot, és hozzáadta a fordítottját. Így olyan háromjegyű számot kapott, amiben csak 6-os és/vagy 9-es számjegy szerepel. Melyik számra gondolhatott Péter? (Például 26 fordítottja 62, 530 fordítottja 35.)

K. 548. Van négy, 1-től 4-ig sorszámozott dobozunk, és négy cédulánk, melyeken sorban az 1, 2, 3, 4 számok láthatók. A négy doboz mindegyikébe egy-egy cédulát helyezünk a következő szabálynak megfelelően: minden cédula azt mutatja meg, hogy az őt tartalmazó doboz sorszámának megfelelő cédula melyik dobozban található. Hányféleképpen helyezhetjük el a dobozokban a cédulákat ennek a feltételnek megfelelően?

K. 549. Egy úton három autó halad azonos irányban, mindegyik más-más sebességgel, de egyenletes tempóval. Az autók az úton egymás mögött hatféle sorrendben helyezkedhetnek el (elvileg). Létrejöhet-e útjuk során mind a hat lehetséges sorrend?

Javasolta: *Loránt László* (Budapest)

K. 550. Egy különleges távírdában az elküldendő szavakért fizetendő összeget a benne foglalt betűk értéke határozza meg. A mássalhangzók ingyenesek, a magánhangzóknak azonban meghatározott értékük van. Ezeket az értékeket mi nem ismerjük, viszont tudjuk a következő néhány, korábban elküldött szó árát: TÉGLALAP, PARALELOGRAMMA, NÉGYZET, HÁROMSZÖG, NÉGYSZÖG, ROMBUSZ, TRAPÉZ, DELTOID. Mutassunk egy lehetséges módszert, amivel a fenti szavakért fizetendő összegek segítségével meghatározhatjuk a GEOMETRIA szóért fizetendő összeget.

K. 551. Adjunk meg olyan $x > y > z$ pozitív egész számokat, hogy

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{z^2}$$

teljesüljön.

K. 552. Melyik az a legnagyobb osztója 9900-nak, ami 22-vel, 33-mal és 55-tel osztható, azonban 44-gyel, 50-nel és 99-cel nem osztható?

Beküldési határidő: 2017. október 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1427–1433.)

Feladatok 10. évfolyamig

C. 1427. Osszunk fel egy négyzetet tíz darab egyenlő szárú, hegyesszögű háromszögre.

(*Elemente der Mathematik*)

C. 1428. Ha négy egymás után következő páratlan szám szorzata 9-re végződik, akkor mi lehet a 9 előtt álló számjegy?

Matlap (Kolozsvár)

Feladatok mindenkinek

C. 1429. Egy 5 cm $\times$ 8 cm méretű téglalapban elhelyeztünk tíz pontot. Bizonyítsuk be, hogy van két olyan pont, amelyek távolsága nem nagyobb $\sqrt{10}$ cm-nél.

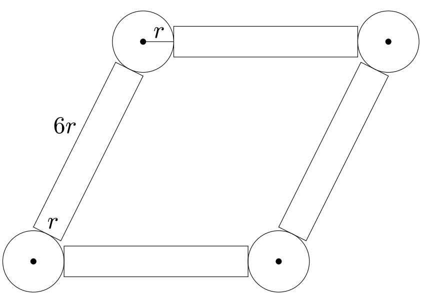
C. 1430. Határozzuk meg azokat az x, y természetes számokat, amelyekre $\frac{20}{x}+\frac{17}{y}=1$ és xy négyzetszám.

Javasolta: *Kovács Béla* (Szatmárnémeti)

C. 1431. Egy trapéz rövidebb alapjának, egyik, majd másik szárának, végül hosszabbik alapjának hossza ebben a sorrendben egy számtani sorozat egymást követő tagjai. Mekkora a sorozat differenciája, ha a legrövidebb oldal 3 cm, és a hosszabbik alapon fekvő egyik szög 60 fok?

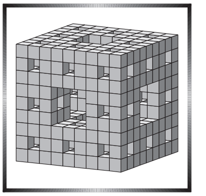
Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1432. Mutassuk meg, hogy bármely n természetes szám esetén található olyan 2^n-nel osztható n-jegyű szám, amelynek számjegyei kizárólag 1-esből és 2-esből állnak.



C. 1433. Egy csuklós szerkezet keresztmetszete négy darab r sugarú kör, és közöttük egy rombusz alakban kifeszülő négy, $r\times 6r$ oldalhosszúságú téglalap úgy, hogy a téglalapok r hosszú oldala érinti a kört. (Az érintési pont az oldal felezőpontjába esik.) A körök mozgatásával a rombusz szöge változhat, de a téglalapok nem lóghatnak egymásba. Mekkora a legkisebb és a legnagyobb lehetséges szög?

Beküldési határidő: 2017. október 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518



A B pontversenyben kitűzött feladatok (4885–4893.)

B. 4885. Legyen k és m két különböző, 14-jegyű pozitív egész szám, mindkettőben 2 darab 1-es, 2-es, 3-as, 4-es, 5-ös, 6-os és 7-es számjegyet tartalmaz (mint pl. a 22133456456717). Bizonyítsuk be, hogy $\frac{k}{m}$ nem lehet egész.

(*4 pont*) (*M&IQ*)

B. 4886. Hányféle konvex poliédert határoznak meg egy adott kocka csúcsai? (Két poliédert akkor tekintünk különbözőnek, ha nem egybevágók.)

(*3 pont*)

B. 4887. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok olyan (a, b) számpár van, amelyre $a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{a}$, ahol $a \neq b$. Adjuk meg ab lehetséges értékeit.

(*3 pont*) Javasolta: *Szoldatics József* (Budapest)

B. 4888. Sebestyén a harmadiktól kezdve minden születésnapjára olyan háromszög alapú hasáb alakú tortát kap, amelynek a felső három csúcsában van egy-egy gyertya, és a tetején még annyi, hogy az életkorával megegyező számú gyertya legyen összesen a tortán úgy, hogy semelyik három nem esik egy egyenesbe. Sebestyén olyan, háromszög alakú szeletekre szeretné vágni a tortát, melyeknek a csúcsait a gyertyák helye adja (a háromszögek belseje nem tartalmazhat gyertyát). Hány szeletre oszthatja a tortát a k-adik születésnapján?

(*4 pont*)

B. 4889. Az $ABCD$ érintőtrapéz beírt köre az AB alapot a T, a vele párhuzamos CD alapot az U pontban érinti. Legyen M az AD és BC száregyenesek metszéspontja, és legyen V az AB oldal és az MU egyenesek metszéspontja. Mutassuk meg, hogy $AT=VB$.

(*4 pont*)

B. 4890. Oldjuk meg a pozitív egész számok halmazán a következő egyenletet:

$$x-y-\frac{x}{y}-\frac{x^3}{y^3}+\frac{x^4}{y^4}=2017.$$

(*5 pont*) Javasolta: *Kovács Béla* (Szatmárnémeti)

B. 4891. Az S_1, S_2, S_3 körök páronként kívülről érintik egymást. Legyenek A, B és C rendre az S_1 és S_2, S_1 és S_3, S_2 és S_3 körök közös pontjai. Az AB egyenes ismételten elmetszi az S_2 és S_3 köröket a D, illetve az E pontokban. A DC egyenes újabb metszéspontja az S_3 körrel legyen az F pont. Bizonyítsuk be, hogy a DEF háromszög derékszögű.

(*5 pont*) (*Kvant*)

B. 4892. Kezdő és Második a következő játékot játsszák. Kezdetben 2017 kavicsot helyeznek az asztalra, először Kezdő elvesz 1 kavicsot, majd Második dönt, hogy 1 vagy 2 kavicsot vesz el. Ezután Kezdő elvesz 1, 2, 3 vagy 4 kavicsot, majd Második vesz el legalább 1, de legfeljebb 8 kavicsot. És így tovább, az i-edik lépésben a soron következő játékosnak legalább 1, de legfeljebb 2^{i-1} kavicsot kell elvennie. A játékot az nyeri, aki az utolsó kavicsot elveszi. Kinek van nyerő stratégiája?

(*6 pont*)

B. 4893. Az ABC háromszögben $AB \neq BC$. A B pontból induló szögfelező a háromszög AC oldalát a D pontban, körülírt körét pedig (a B ponton kívül) az E pontban metszi. A DE szakasz, mint átmérő fölé emelt kör a körülírt kört az E, majd másodszor az E-től különböző F pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy a BF egyenest a BD tengelyre tükrözve az ABC háromszög súlyvonalát kapjuk.

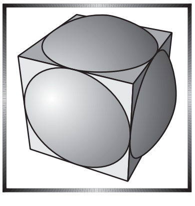
(*6 pont*)

Beküldési határidő: 2017. október 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

Figyelem! Az idei Kürschák József Matematikai Tanulóverseny 2017. október 6-án, pénteken 14 órakor kerül megrendezésre. A versenyzőknek előzetesen regisztrálniuk kell a versenyre, az ezzel kapcsolatos információ a

`http://bolyai.hu/kurschak.htm`

oldalon található.



Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (701–703.)

A. 701. Egy légitársaság az Európai Unió bármely két tagállamának fővárosa között egy rögzített árú járatot üzemeltet (az ár oda és vissza mindig megegyezik). Tudjuk még, hogy egy városból nem indul két azonos árú járat. Anna és Bella mindegyik várost pontosan egyszer szeretné meglátogatni, nem feltétlenül ugyanabból a városból indulva. Anna úgy tervezi útját, hogy egy városból mindig abba a még nem meglátogatott városba megy tovább, amibe a lehető legolcsóbb járat vezet. Bella pedig minden városból a lehető legdrágább járaton megy tovább.

Igaz-e, hogy Bella útja biztosan legalább annyi pénzbe kerül, mint Anna útja?

(*Szovjet feladat alapján*)

A. 702. Adott egy ABC háromszög. Azt mondjuk, hogy az XYZ háromszög esztétikus, ha X a BC, Y a CA, Z pedig az AB oldalszakasz pontja, valamint az XYZ és az ABC háromszög hasonló (tehát $A\sphericalangle = X\sphericalangle$, $B\sphericalangle = Y\sphericalangle$, $C\sphericalangle = Z\sphericalangle$). Melyik esztétikus háromszög kerülete a lehető legkisebb?

A. 703. Adott egy $n \geqslant 2$ egész szám. Egy egész számokból álló rendezett szám-n-est primitívnek nevezünk, hogyha a benne szereplő számok legnagyobb közös osztója 1. Bizonyítsuk be, hogy minden primitív szám-n-esekből álló véges H halmazhoz létezik olyan nem konstans homogén egész együtthatós $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ polinom, amelynek értéke minden H-beli szám-n-esben 1.

Az *58. Nemzetközi Matematika Diákolimpia* 6. feladata nyomán

❄

Beküldési határidő: 2017. október 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

Informatikából kitűzött feladatok

I. 433. Készítsünk programot `i433` néven, amely egy szöveg karaktereit egy négyzet oldalán fényújságszerűen mozgatva jeleníti meg.

A program bemenete az S szöveg (Hossz$(\mathsf{S}) \leqslant 100$) és a négyzet N oldalhossza (Hossz$(\mathsf{S})/4 \leqslant N \leqslant 60$).

A program a karakteres vagy grafikus kimeneten jelenítse meg a fényújságot az óramutató járásának megfelelő irányban. A mozgatás sebességét válasszuk meg úgy, hogy a szöveg élvezhetően olvasható legyen. A szöveg mozgatása egy adott billentyű lenyomásáig folytatódjon.

<table>
<tr><th>Példa bemenet</th><th>Kimenet</th></tr>
<tr><td><pre>KöMaL pontverseny 2017-2018
10</pre></td><td><pre> KöMaL po
         n
         t
         v
         e
         r
         s
         e
8   n
102-7102 y</pre></td></tr>
</table>

Beküldendő egy tömörített `i433.zip` állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

I. 434 (É). A 2016. évi nyári olimpiai játékokon az atlétika férfi kalapácsvetés döntőjének eredményeit értékeljük ki táblázatkezelő-rendszerrel.

A döntő előtt a selejtező nevezési szintje 77,00 méter volt. Ezt csak ketten dobták túl, így a döntőbe a legjobb 12 eredményű versenyző jutott. A döntő 6 dobási sorozatból állt, de a 3. sorozat után csak az addigi legjobb 8 eredményt elért versenyző folytathatta tovább. A dobás távolságát centiméter pontossággal mérik. Ha a dobás érvénytelen volt, akkor az eredmény helyén az „x” karakter szerepel.

A döntőbe jutott versenyzők dobási adatait rögzítettük méterben a `kalapacsforras.txt` tabulátorral tagolt, UTF-8 kódolású állományban.

1. Töltsük be a `kalapacsforras.txt` szövegfájlt a táblázatkezelő egy munkalapjára az A1-es cellától kezdődően. Munkánkat `i434` néven mentsük el a táblázatkezelő alapértelmezett formátumában.
2. A J2:J13 tartomány celláiban írassuk ki a versenyzők legjobb dobásainak távolságát, azaz a versenyen elért eredményüket.
3. Az A2:A13 tartomány celláiban egyetlen képlettel és annak másolásával határozzuk meg a versenyzők helyezését.
4. Az első három sorozat után az addigi legjobb 8 eredményt elérő versenyző folytathatja a versenyt. Az M3 cellában adjuk meg a verseny folytatásához szükséges dobástávolságot.
5. Az M2 cellában a selejtező nevezési szintje szerepel. Határozzuk meg függvény segítségével, hogy a verseny összes résztvevője közül hányan teljesítették ezt.
6. Az M5 cellában képlettel adjuk meg, hogy a döntő összes dobásának hány százaléka volt érvénytelen.
7. Az M6 cellában határozzuk meg, hogy a 3. sorozat után még versenybe maradók hány százaléka tudott még a további dobásokkal az eredményén javítani.
8. Az M2:M6 cellatartományban állítsuk be a mértékegységeket.
9. Az A15:C22 tartomány celláiban függvények segítségével jelenítsük meg a végeredményt, soroljuk fel helyezési sorrendben a versenyzők nevét és országát.
10. A D2:I13 cellatartományban minden versenyző legnagyobb dobását feltételes formázással, félkövér betűstílussal jelenítsük meg.
11. Az A2:J13 cellatartományban az első három helyezett sorának celláiban a cellakitöltését az érem színének megfelelően feltételes formázással adjuk meg: arany RGB(255,215,0), ezüst RGB(192,192,192), bronz RGB(204,153,102).

Minta:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	**Helyezés**	**Név**	**Ország**	**#1**	**#2**	**#3**	**#4**	**#5**	**#6**	**Eredmény**			
2	12.	Wagner Domingos	Brazília	x	71,97	**72,28**				72,28		**Nevezési szint a selejtezőben:**	m
3	2.	Ivan Cihan	Fehéroroszország	76,13	77,43	73,48	x	**77,79**	76,34	77,79		**Továbbjutás határa:**	m
4	9.	Szjarhej Kalamojec	Fehéroroszország	**74,22**	74,17	73,70				74,22		**Nevezési szintet elérők száma:**	fő
5	8.	David Söderberg	Finnország	72,30	x	**74,61**	74,38	x	x	74,61		**Érvénytelen dobások aránya:**	%
6	6.	Amgad Elseify Ashraf	Katar	73,88	75,40	74,45	75,20	**75,46**	74,25	75,46		**Javítók aránya:**	%
7	3.	Wojciech Nowicki	Lengyelország	x	74,94	74,97	x	x	**77,73**	77,73			
8	7.	Pars Krisztián	Magyarország	74,77	75,15	**75,28**	74,89	74,62	x	75,28			
9	4.	Diego del Real	Mexikó	73,35	73,58	**76,05**	x	70,83	73,57	76,05			
10	10.	Serghei Marghiev	Moldova	73,31	**74,14**	x				74,14			
11	5.	Marcel Lomnický	Szlovákia	73,33	72,65	74,96	75,09	**75,97**	74,64	75,97			
12	1.	Dilsod Nazarov	Tádzsikisztán	76,16	77,27	78,07	77,17	**78,68**	77,68	78,68			
13	11.	Jevhen Vinohradov	Ukrajna	73,39	x	**74,11**				74,11			
14													
15	1.	Dilsod Nazarov	Tádzsikisztán										

Beküldendő egy `i434.zip` tömörített állományban a megoldást tartalmazó munkafüzet, valamint egy rövid dokumentáció, amelyből kiderül az alkalmazott táblázatkezelő neve és verziószáma.

A munkafüzetbe importálandó adattábla: a `kalapacsforras.txt`.

I. 435. Mint ismeretes, az Európában is használatos keresztény naptár szerinti 1. év Jézus születésének éve, és Gergely pápa naptárreformjáig a ma használatostól csak annyiban tért el, hogy minden negyedik év szökőév volt. A Gergely-naptár 1582. október 4-én csütörtökön lépett életbe úgy, hogy az azt követő nap október 15. péntek lett, és ettől kezdve a 100-zal osztható évszámok közül csak a 400-zal is oszthatók maradtak szökőévek. A keresztény időszámítás így a Nap járásához igazodik.

Az iszlám naptár a Hold járásán alapuló éveket használó holdnaptár, melynek kezdőnapja (a keresztény időszámítás szerint) 622. július 16. Ez az iszlám időszámítás kezdete, vagyis az 1. év 1. hónapjának (Muharram hónap) 1-je. (Az iszlám időszámítás a hidzsráról kapta a nevét, amelynek jelentése: kivándorlása, áttelepülése – bár az esemény, vagyis Mohamed próféta Mekkából való kivonulása valójában néhány hónappal később történt.)

A hónapok felváltva 30 (páratlan számú hónapok) és 29 naposak (páros számúak). Az éveket 30 éves ciklusokba sorolják. E ciklusokban 19 normál év (354 napos) található, míg a 2., 5., 7., 10., 13., 16., 18., 21., 24., 26. és 29. év 355 napos. Ezekben az években az utolsó hónap is 30 napból áll.

A két dátum összevetésére itt találunk egy példát:
`https://calendar.zoznam.sk/islamic_calendar-hu.php`.

Készítsünk táblázatkezelővel táblázatot vagy írjunk programot, amely egy hidzsra utáni iszlám dátumot átvált keresztény dátumra és fordítva. Például: 1439.01.01 – 2017.09.22.

Beküldendő egy `i435.zip` tömörített állományban a táblázatkezelő munkafüzet vagy a program forráskódja, továbbá a dokumentáció, amely tartalmazza a megoldás rövid leírását, és megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható vagy milyen táblázatkezelővel készült.

I/S. 19. Keressük meg azt a legkisebb b nevezőjű $\frac{a}{b}$ törtet, amelynek t tizedes jegyre kerekített értéke megegyezik egy t tizedes jegyet tartalmazó r tizedes törttel.

A feladatot megoldó program olvassa be a standard bemenetről r és t szóközzel elválasztott értékét (tizedesvessző helyett pontot használjunk), majd írja a standard kimenet egyetlen sorába szóközzel elválasztva a és b egészeket.

Példák:

Bemenet	Kimenet
`3.141592653 9`	`103993 33102`
`2017.0901 4`	`223897 111`
`1.2345678901234 13`	`12345611 9999945`

Korlátok: az r pozitív szám e egész és t tizedes jegyet tartalmaz $(1 \leqslant e, t \leqslant 14)$, $(1 \leqslant e + t \leqslant 15)$.

Értékelés: a megoldás lényegét leíró dokumentáció 1 pontot ér. További 9 pont kapható arra a programra, amely a korlátoknak megfelelő bemenetekre helyes kimenetet ad 1 másodperc futásidő alatt. Részpontszám kapható arra programra, amely csak kisebb e, t értékek esetén ad helyes eredményt 1 másodpercen belül.

Beküldendő egy `is19.zip` tömörített állományban a megoldást leíró dokumentáció és a program forráskódja.

S. 118. Egy tengeren adott N sziget, melyek kiterjedése elhanyagolható a tenger méreteihez képest. Az i-edik $(1 \leqslant i \leqslant N)$ sziget helyzetét derékszögű koordináta-rendszerben az (X_i, Y_i) egész számpárral adjuk meg $(0 \leqslant X_i, Y_i \leqslant \leqslant 10\,000)$. Az egyik szigetről egy másik szigetre szeretnénk eljutni. Bármely két sziget között hajóval lehet az utat megtenni. A hajók bármely szigeten tudnak üzemanyagot tankolni, amellyel egy adott távolságig tudnak közlekedni. Keressük meg, hogy mekkora az a legkisebb hatótávolságú hajó, amellyel az utazás a két kiválasztott sziget között biztosítható.

A feladatot megoldó program olvassa be a standard bemenet első sorából N értékét, majd a következő N sorból az X_i, Y_i szóközzel elválasztott számokat, végül az utolsó sorból az utazás induló és érkező szigetének sorszámát. A program írja a standard kimenetre a legkisebb hatótávolság öt tizedes jegyre kerekített értékét.

Példa (a sortörést a tömörebb írásmód kedvéért `/` jellel helyettesítettük):

Bemenet	Kimenet
`5 / 4 9 / 1 8 / 6 5 / 3 3 / 2 5 / 1 5`	`3.16228`

Értékelés: a megoldás lényegét leíró dokumentáció 1 pontot ér. További 9 pont kapható arra a programra, amely a korlátoknak megfelelő bemenetekre helyes kimenetet ad 1 másodperc futásidő alatt. Részpontszám kapható arra programra, amely csak kisebb N érték esetén ad helyes eredményt 1 másodpercen belül.

Beküldendő egy `s118.zip` tömörített állományban a megoldást leíró dokumentáció és a program forráskódja.

A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:
`https://www.komal.hu/munkafuzet`
Beküldési határidő: 2017. október 10.

Sikeres szereplés a 48. Nemzetközi Fizikai Diákolimpián

(Yogyakarta, Indonézia, 2017. július 16–24.)

A magyar csapat 1 arany- és 4 ezüstéremmel végzett a Yogyakartában (kiejtve: Dzsogdzsakarta) megrendezett versenyen. A rendezés súlyos hibái miatt a végleges pontszámok nem kerültek megállapításra, így az országok közötti nemhivatalos sorrendet ebben az évben nem lehet meghatározni.

A csapat és eredményeik:

Tompa Tamás Lajos (Miskolc, Földes Ferenc Gimn., 12. oszt.) *aranyérem,* felkészítő tanára: *Zámborszky Ferenc;*

Kovács Péter Tamás (Zalaegerszegi Zrínyi Miklós Gimn., 12. oszt.) *ezüstérem,* felkészítő tanárai: *Juhász Tibor* és *Pálovics Róbert;*

Marozsák Tóbiás (Budapest, Óbudai Árpád Gimn., 11. oszt.) *ezüstérem,* felkészítő tanárai: *Gärtner István* és *Mezei István;*

Nagy Botond (Zalaegerszegi Zrínyi Miklós Gimn., 12. oszt.) *ezüstérem,* felkészítő tanára: *Pálovics Róbert*

Németh Balázs (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. oszt.) *ezüstérem,* felkészítő tanárai: *Dvorák Cecília* és *Csefkó Zoltán.*

Az olimpiára való készülés szokás szerint a budapesti (*Szász Krisztián, Tasnádi Tamás, Vankó Péter, Vigh Máté*), a miskolci (*Zámborszky Ferenc*), a pécsi (*Kotek László*), a szegedi (*Hilbert Margit, Sarlós Ferenc*) és a székesfehérvári (*Orosz Tamás, Ujvári Sándor*) olimpiai szakkörökön, valamint a BME Fizika Tanszékén szervezett mérési foglalkozásokon kezdődött. A csapatot a szakkörök résztvevői és az országos versenyeken kimagasló eredményeket elért tanulók közül az áprilisban megrendezett, kétfordulós *Kunfalvi Rezső versenyen* válogattuk ki. A résztvevőknek a versenyen az olimpián szokásos stílusú és nehézségű elméleti és mérési feladatokat kellett megoldaniuk. Az egymást követő fordulók – az olimpiához hasonlóan – a versenyzők fizikai állóképességét is próbára tették. A csapat kiválasztásánál a válogatóversenyen elért eredmény mellett a korábbi versenyeredményeket és a KöMaL mérési versenyében elért eredményt is figyelembe vettük.

A felkészülés folytatásaként a csapat fiatalabb tagjai részt vettek az első alkalommal megrendezett Európai Fizikai Diákolimpián (EuPhO, Tartu, Észtország, 2017. május 20–24., `http://eupho.ut.ee`). (Lásd még külön beszámolónkat a 365. oldalon.) A verseny ütközött az érettségivel, így a tizenkettedikesek nem tudtak részt venni rajta. Ezt követte a hagyományos Román-Magyar Előolimpia, ami ebben az évben Szatmárnémetiben (Románia) került megrendezésre; ezen a teljes csapat és három fiatalabb diák vett részt.

A csapat július 15-én, szombaton délelőtt Vankó Péter (BME Fizikai Intézet) és Tasnádi Tamás (BME Matematikai Intézet) csapatvezetőkkel, valamint Szász Krisztián (BME Fizikai Intézet) megfigyelővel amszterdami és jakartai átszállásokkal utazott az indonéziai Yogyakartába, és az összességében 30-35 órás út után vasárnap éjfélre érkezett meg a szálláshelyekre. Hétfőn délelőtt volt a megnyitó, a csapatvezetők ezután vitatták meg és fordították le (reggelig tartó munkával) a mérési feladatokat, amelyeket a versenyzőknek másnap (kedden) kellett volna megoldaniuk.

Az első mérési feladatban sóoldatok diffúzióját kellett vizsgálni optikai módszerrel. Keskeny edénybe adott koncentrációjú sóoldatra desztillált vizet rétegezve, idővel a határrétegben a sóoldat és a tiszta víz diffúzió útján keveredik, és a sókoncentráció, és így az oldat optikai törésmutatója is folytonosan változik a magassággal. Ez a törésmutató-gradiens a sóoldaton áthaladó lézerfényt eltéríti. Az eltérülés mértékéből következtethetünk a törésmutató-gradiensre, és ebből megkapható a diffúziós folyamatot leíró paraméter, a diffúziós együttható értéke. A mérés során ferde síkban szétterülő lézernyalábot kellett használni, így egyetlen leképezéssel meg lehetett kapni a különböző magasságokhoz tartozó törésmutató-gradienst. Három különböző koncentrációjú oldat diffúziós együtthatóját kellett meghatározni. A méréshez szükséges elmélet nagy része meg volt adva. A fő nehézséget a kísérlet pontos beállítása okozta, valamint a sok mérési pont leolvasása, transzformálása, ábrázolása.

A második mérési feladatban mágneses csapdán alapuló földrengés- és vulkánérzékelőt kellett tanulmányozni. Két, megfelelő hosszúságú, erős, átmérőjük irányában felmágnesezett hengeres mágnes felett mágneses csapda alakul ki, amelyben egy grafit ceruzabéldarab lebegtethető. A ceruzabél a mágnesek meglökésekor csillapított rezgésbe kezd, a mágnesek megdöntésekor pedig elmozdul – ezt lehet felhasználni földrengések detektálására (szeizmográf) és vulkánkitörések előjelzésére (a talaj kicsiny dőlésének regisztrálásával). A hosszú mérési feladatban többek közt a mágnes terét, a grafit szuszceptibilitását, a rezgés jósági tényezőjét, és ebből a levegő viszkozitását kellett megmérni. (A feladatok teljes szövege és megoldása a `http://ipho.elte.hu` honlapon megtalálható.)

A reggelig elhúzódó fordítás, valamint súlyos szervezési készületlenségek miatt (feltehetőleg nem volt megfelelő nyomtatási kapacitás és cselekvőképes munkaerő) a diákokat először csak néhány órás, majd félnapos várakozásra kérték, végül – egy értelmetlen és reménytelen várakozással eltöltött nap után – a versenyt másnapra halasztották. (Ezzel a diákoknak egy kirándulós napjuk is elveszett.) Szerdán a csapatvezetők is újra dolgoztak: reggeltől másnap hajnalig megvitatták és lefordították az elméleti feladatokat.

Az első elméleti feladat galaxisokról és a sötét anyagról szólt. A kozmológiában a sötét anyag olyan anyagfajta, amely semmiféle elektromágneses sugárzást nem bocsát ki és nem nyel el, jelenlétére csak más (csillagászati eszközökkel közvetlenül megfigyelhető) anyagokra kifejtett gravitációs hatásából következtethetünk. A feladatban a sötét anyag jelenlétére, mennyiségére, eloszlására kellett következtetni galaxishalmazokon, galaxisokon, illetve csillagokon belül, kísérletileg is mérhető mennyiségekből, leegyszerűsített elméleti modellek alapján. Egy galaxishalmazban mozgó galaxisok Földhöz képesti sebessége például a vöröseltolódásból mérhető. Ezen sebességek eloszlásából következtethetünk a galaxisok mozgási energiájára a galaxishalmaz tömegközéppontjához viszonyítva. Ezután egy érdekes tétel, a viriáltétel felhasználásával megkaphatjuk a galaxishalmaz átlagos gravitációs potenciális energiáját, ami kapcsolatba hozható a galaxishalmaz méretével és tömegével. Az így kapott tömeg nagyobb, mint a galaxishalmaz „látható" tömege; ez utal a sötét anyag jelenlétére. A probléma érdekes volt, és talán ez a feladat ment a legjobban a magyar versenyzőknek.

A második feladat témáját a helyszín sejtette: földrengés, vulkánkitörés, cunami. A feladat első része a vulkán kürtőjében a forró magma és befolyó esővíz keveredésének hatására kialakuló piroklasztikus árral foglalkozott. A piroklasztikus ár forró kőzetdarabokból és gázból áll, amely a vulkánból kb. 700 km/h sebességgel függőlegesen áramlik ki, és akár 22 km magasságot is elér. Ezután a saját súlya alatt összeroskadva lezuhan a felszínre. Ilyen robbanás temetett be nagy területet a város mellett magasodó, közel 3000 m magas Merapi 2010-es kitörésekor. A feladat második része a földrengések észlelésével volt kapcsolatos: földrengéshullámok terjedését kellett tanulmányozni. A konkrét példáért itt sem kellett messze menni: a 2006-os yogyakartai földrengés adatait kellett elemezni. A feladat harmadik része a 2006-os jávai cunamival foglalkozott: a cunami hullám terjedését kellett vizsgálni. A második feladat témája is nagyon érdekes volt, a verseny helyéhez is kötődött, de sajnos nem volt kellően kidolgozva a probléma.

A harmadik feladatot a csapatvezetők leszavazták, így ahelyett a tartalék feladat került kitűzésre. A feladat első részében a versenyzők a homogénnek és izotropnak feltételezett Univerzum tágulását leíró Friedmann-egyenleteket klasszikus fizikai meggondolásokkal vizsgálták. A feladat fizikája itt véget is ért, ugyanis a további részekben a már megkapott, vagy a feladat további részében megadott (fizikailag nem kielégítően megmagyarázott) formulákkal kellett dolgozni. Innentől a feladat az Univerzum fejlődésének ún. inflációs (gyorsan felfúvódó) periódusával foglalkozott. Ennek feltételeire kérdeztek rá a második részben, majd a harmadik részben az itt megadott közelítésben a szintén itt definiált, nehezen értelmezhető paraméterek meghatározása volt a feladat. A negyedik részben, amely még nehezebben volt követhető, újabb egyenlet felhasználásával újabb paraméterek elméleti és kísérleti értékeinek összehasonlítása volt a cél. A feladat témaköre izgalmas, viszont láthatóan nem úgy próbálták megközelíteni, hogy az a középiskolások (vagy akár a témában kevésbé jártas felkészítők) számára teljesen érthető legyen. Ugyanakkor az sem volt szerencsés, hogy az első feladathoz hasonlóan ez is kozmológiával foglalkozott.

Csütörtökön délelőtt, a mérési fordulóhoz hasonlóan, a versenyzőknek ismét 5 órájuk volt a feladatok megoldására. A verseny megint csúszással (2 órával később) kezdődött, és mint később kiderült, a versenyzők jelentős része nem megfelelő feladatlapot kapott. A magyar versenyzők például az egész napos munkával lefordított magyar verzió helyett egy gyenge minőségű angol változatot kaptak, amely nemcsak az idegen nyelv, hanem a sokszor nem egyértelmű megfogalmazások miatt is hátrányt okozott a versenyzőknek. Bár a szokásos rend szerint a csapatvezetők és a rendezők is kijavították a dolgozatokat, a súlyos rendezési hibák miatt a végső pontszámokat kialakító egyeztetésre (az úgynevezett moderációra) nem került sor. Ehelyett a Nemzetközi Fizikai Diákolimpia holland elnöke és ausztrál főtitkára próbálta a lehető legigazságosabban (vagy inkább a lehető legkevésbé igazságtalanul) korrigálni a hibákat. A csapatvezetők bejelenthették panaszaikat, amelyek alapján módosulhattak a rendezők (meglehetősen kérdéses színvonalú) pontozása alapján megállapított eredmények. Ennek értelmében csak az érmekről született döntés, a pontszámokról és az egyes éremcsoportokon belül a sorrendről nem. Ezek után az eredmények nagyban függenek az egyes országok csapatvezetőinek hozzáállásától (ezért is nem közöljük az éremtáblázatot). Sok év tapasztalata alapján nyugodt lelkiismerettel kijelenthető, hogy a magyar csapat eredménye reális, a versenyzők egy tisztességes pontozás és moderáció után is ezeket az érmeket kapták volna.

A két forduló között és a verseny után a szervezők különböző programokat szerveztek. A diákok és a tanárok is megnézték a IX. században épült, gyönyörű (az UNESCO világörökség részét képező) Borobudur templomot, amely megépülésekor a déli félteke legnagyobb épülete volt, és ma is a világ legnagyobb buddhista temploma. (Közben közel ezer évig, részben vulkáni hamuval befedve, ismeretlenül rejtőzött az őserdőben.) Emellett a nem túl izgalmas yogyakartai szultáni palotába volt mindenki számára szervezett látogatás, a diákok pedig ezen kívül az egyik szabad napjukon falusi környezetben ismerkedhettek a rizsültetéssel és a batikolással. Sajnos a verseny alatt nagyon sok idő értelmetlenül telt (a helyi hálózat működőképessé tétele órákig tartott, az egész napos fordítás lényegében értelmetlen volt, hiszen nem kapták meg a diákok, a súlyos problémák kiderülése után hosszas egyeztetések voltak). A közben adódó rövid szabad időkben néhányan – saját szervezésben – eljutottak a szintén IX. századi Prambanan hindu templomegyütteshez (amely szintén az UNESCO világörökség része és szintén gyönyörű), valamint a kicsi, de érdekes yogyakartai állatkertbe és a város bazárokkal zsúfolt bevásárlóutcájába is. A tanárok – néhány más ország csapatvezetőjével közösen – egy rövid dzsiptúrával felmentek a város fölött magasodó, lenyűgöző Merapi vulkán oldalába, ahol megnézték a vulkán 2010-es kitörésekor forró hamuval befedett egyik falu maradványait is: szomorú látvány, amolyan XXI. századi Pompeii, elolvadt monitorokkal, CD-kel és varrógépekkel.

Vasárnap délelőtt került sor a díjkiosztóra, ahol – ahogy az sajnos várható volt – a rendezők úgy tettek, mintha minden tökéletes rendben ment volna (ezt a verseny elnöke beszédében el is mondta). A rendkívüli körülményekből csak annyi látszott, hogy az érmeket nem pontszám szerint fordított sorrendben, hanem keresztnév szerinti sorrendben osztották ki. Megdöbbenésünkre abszolút első helyezettet is hirdettek, pedig erről nem volt szavazás az előző nap. (És az adott körülmények között ezt nem is lehetett tisztességesen eldönteni, így azóta több csapatvezető az eredmény törlését kérte. Döntés még nincsen.)

A nem túl ünnepélyes záróebéd után még volt egy szabad délután pihenni az újabb 30-35 órás hazaút előtt. A csapat július 25-én délben, ismét jakartai és amszterdami átszállással érkezett haza.

Köszönettel tartozunk az Emberi Erőforrások Minisztériumának, a BME Fizikai Intézetnek és a MOL-nak a versenyfelkészüléshez és a részvételhez nyújtott támogatásukért.

Jövőre az olimpiát július 21–29. között Portugáliában (Lisszabonban) rendezik meg. A versenyre való felkészülést négy vidéki szakkör, valamint a budapesti elméleti és mérési szakkör segíti (a szakkörökről a legátfogóbb információ a `http://ipho.elte.hu` honlapon található):

Székesfehérvár: *Orosz Gábor* (Óbudai Egyetem Alba Regia Műszaki Kar, Székesfehérvár, Budai út 45.),

Szeged: *Hilbert Margit* (Szegedi Tudományegyetem, Dóm tér 9., I. em. Budó Ágoston terem),

Pécs: *Kotek László* (Pécsi Tudományegyetem, Fizikai Intézet, Ifjúság útja 6., II. em. A408-as terem),

Miskolc: *Zámborszky Ferenc* (Földes Ferenc Gimn., 3525 Miskolc, Hősök tere 7.),

Budapest: *Vankó Péter* (BME, Fizikai Intézet, 1111 Budafoki út 8., Fizikus Hallgatói labor, F épület, III. lépcsőház, II. emelet). Az elméleti szakkört hétfőnként 3-tól 5 óráig tartjuk, jelentkezni nem kell, az első foglalkozás 2017. szeptember 25-én lesz. Info: `http://eik.bme.hu/~vanko/labor/Bpszakkor.pdf`. A tehetséggondozó mérési szakkörre írásban jelentkezni kell (erről lásd még külön felhívásunkat). Info: `http://eik.bme.hu/~vanko/labor/Tehetseggondozas.pdf`.

A fenti szakkörökön való *aktív* részvétel mellett elsősorban önálló munkával, a KöMaL elméleti és mérési feladatainak rendszeres megoldásával lehet készülni a jövő évi Fizikai Diákolimpiára.

Eredményes felkészülést kívánunk!

Szász Krisztián, Tasnádi Tamás és **Vankó Péter**

Beszámoló az 1. Európai Fizikai Diákolimpiáról

2017. május 20. és 24. között rendezték meg Észtországban az 1. Európai Fizikai Diákolimpiát, röviden EuPhO-t, ahol Magyarország is képviseltette magát. A versenyre való kiválasztás a Kunfalvi Rezső válogatóverseny alapján zajlott, ahonnan a három legjobb eredményt elért, nem végzős diák került a csapatba (a verseny időpontja ugyanis egybeesett az érettségi vizsgák időpontjával). A csapatot két tanár kísérte: *Vankó Péter* (BME Fizikai Intézet) mint csapatvezető és *Vigh Máté* (ELTE Fizikai Intézet) mint a javító bizottság tagja.

Maga a verseny Tartu városában zajlott, mely Észtország egyik egyetemi központja. Itt alkalmunk volt megnézni a gyönyörű városközpontot és a történelmi jelentőségű tartui obszervatóriumot. A javítás és az eredményhirdetés a fővárosban, Tallinnban történt, ahol lehetőségünk adódott megtekinteni a fantasztikus óvárost.

A versenyen – a Nemzetközi Diákolimpiához hasonlóan – egy elméleti és egy gyakorlati forduló volt, mindkettő öt órás terjedelemben. A szervezők törekedtek rövid, ötletes feladatok kitűzésére, melyek mellőzték a hosszadalmas számolásokat. Az elméleti fordulóban három feladat volt: az első egy kötél rezgéseit vizsgálta, a második egy termodinamikai probléma volt, míg a harmadik feladat egy szupravezető háló és egy mágneses dipólus kölcsönhatásával foglalkozott. A gyakorlati fordulóban egy LED hatásfokát és $U-I$ karakterisztikáját mérték meg a versenyzők a rendelkezésükre álló eszközökkel.

A csapat és eredményeik (a maximális pontszám 50):

Németh Balázs (24,2 pont) *ezüstérem;* Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf., felkészítő tanár: *Csefkó Zoltán, Dvorák Cecília;*

Marozsák Tóbiás (23,0 pont) *ezüstérem;* Budapest, Óbudai Árpád Gimnázium, 11. évf., felkészítő tanár: *Mezei István, Gärtner István;*

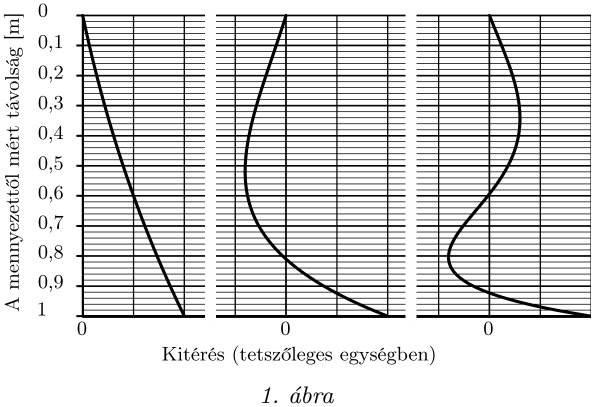
Simon Dániel Gábor (17,3 pont) *bronzérem;* Kecskeméti Bányai Júlia Gimnázium, 11. évf., felkészítő tanár: *Bakk János.*

A versenyen szerzett pozitív tapasztalatok alapján a résztvevők egyetértettek, hogy folytatják az EuPhO szervezését, így ha minden igaz, jövőre Oroszországban, Moszkvában kerül megrendezésre a 2. EuPhO, ahol reményeink szerint ötfős csapat fogja képviselni hazánkat, akár végzős diákok is.

A továbbiakban ismertetjük az elméleti feladatokat, valamint azok hivatalos megoldását.

1. Rezgő kötél

Egy súlyos, állandó vastagságú, L hosszúságú kötél függőlegesen lóg a mennyezetről. A kötél rezgéseket végezhet az egyensúlyi helyzete körül különböző sajátfrekvenciákkal, amelyeket növekvő sorrendben így jelölünk: f_i $(i = 1, 2, \ldots)$. Az *1. ábra* egy számítógépes szimuláció alapján a kötél alakját mutatja az első három sajátfrekvencián végzett rezgés esetében. Figyelj arra, hogy az ábrán a vízszintes és a függőleges skála nem egyforma. Felteheted, hogy a kötél kitérése sokkal kisebb a hosszánál (kis amplitúdójú közelítés).



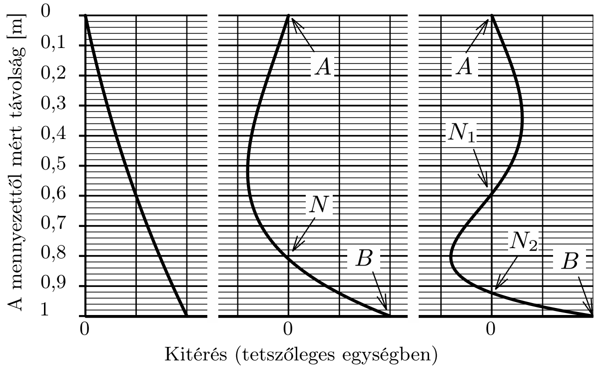
1. ábra

A) *Dolgozz ki egy egyszerűsített modellt, amellyel meg tudod becsülni a kötél alaprezgésének f_1 frekvenciáját! Ez alapján számítsd ki közelítőleg f_1 értékét, ha a kötél hossza $L = 1{,}0$ m. Számolj $g = 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$ értékkel.*

B) *Olvasd le a szükséges adatokat az ábráról, és becsüld meg az $f_1 : f_2 : f_3$ frekvenciaarányt!*

Megoldás. A) A *2. ábráról* leolvasható, hogy az első esetben a kötél görbülete elhanyagolható, vagyis kis kitéréseknél közelíthetünk egy fizikai ingával:

$$f_1=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mg\frac{L}{2}}{\theta}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mg\frac{L}{2}}{\frac{1}{3}mL^2}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3g}{2L}}=0{,}61\ \mathrm{Hz}.$$



2. ábra

B) Dimenzióanalízis segítségével megállapítható, hogy a frekvencia csak g-től és L-től függhet, méghozzá a következő módon:

$$f_k=c_k\sqrt{\frac{g}{L}}\,.$$

Itt c_k egy dimenziótlan együttható, mely csupán a k módusszámtól függ. Bejelölve a *2. ábrán* az N pontot világos, hogy az N pont kitérése 0 a mozgás során, így az NB kötélszakasz közelítőleg a kötél alapfrekvenciáján rezeg. Tehát írhatjuk:

$$f_2(L)\equiv f_1(NB)=f_1(L-NA).$$

Ezáltal:

$$\frac{f_2(L)}{f_1(L)}=\frac{f_1(L-NA)}{f_1(L)}=\sqrt{\frac{L}{L-NA}}.$$

A kötél vízszintes kitérése igen kicsiny a hosszához képest, így mérhetjük az NA szakaszt a függőleges tengelyen. Ekkor $NA\approx 0{,}8$ m, $L=1{,}0$ m, tehát:

$$\frac{f_2}{f_1}\approx 2{,}2.$$

Hasonló gondolatmenetet alkalmazva mint az előbb, lemérhetjük, hogy $N_1A\approx 0{,}6$ m:

$$f_3(L)\equiv f_2(L-N_1A),$$

$$\frac{f_3(L)}{f_2(L)}=\frac{f_2(L-N_1A)}{f_2(L)}=\sqrt{\frac{L}{L-N_1A}}\approx 1{,}6.$$

Ezek szerint

$$\frac{f_3}{f_1} = \frac{f_3}{f_2} \cdot \frac{f_2}{f_1} \approx 3{,}5,$$

így a végeredmény:

$$f_1 : f_2 : f_3 \approx 1 : 2{,}2 : 3{,}5.$$

2. Korong gázban

Tekintsünk egy vékony, lapos, M tömegű, S területű, kezdetben T_1 hőmérsékletű korongot, amely kezdetben a súlytalanság állapotában nyugalomban van egy ϱ sűrűségű, T_0 hőmérsékletű gázban ($T_1 = 1000\,T_0$). A korong egyik oldala hőszigetelő réteggel van bevonva, a másik oldala viszont nagyon jó hőkontaktusban van a környező gázzal: az m tömegű gázmolekulák a felülettel történő egyetlen ütközés során elnyerik a korong hőmérsékletét.

Becsüld meg a korong kezdeti a_0 gyorsulását és a kialakuló mozgás során elért $v_{\max}$ maximális sebességét!

Tedd fel, hogy a korong hőkapacitása Nk_B nagyságrendű, ahol N a benne lévő atomok száma, k_{B} pedig a Boltzmann-állandó, valamint hogy a gáz és a korong anyagának moláris tömege ugyanakkora nagyságrendű. A molekulák átlagos szabad úthossza (az az átlagos távolság, amit egy molekula két ütközés között megtesz) sokkal nagyobb, mint a korong mérete. Hanyagolj el minden, a korong pereménél fellépő széleffektust.

Megoldás. A gáz által a korong hőszigetelő réteggel bevont oldalára kifejtett nyomás kezdetben $P_0 = nk_BT_0$, ahol n a gáz részecskeszám-sűrűsége. Erre az eredményre a $j_0 \sim v_{x0}$ részecskeáram, valamint az egy molekula által átadott $p_0 = 2mv_{x0}$ impulzus (v_{x0} a molekulák sebességének normál irányú komponense) szorzatának átlagolásával juthatunk ($\overline{2v_{x0}^2} \sim T_0$).

Hasonló gondolatmenetet követve számíthatjuk ki a korong jó hővezető oldalán fellépő nyomást. Itt a részecskeáram-sűrűség az előbbi érték, azonban a molekulánként átadott impulzus nagyobb a teljesen rugalmas ütközés esetéhez képest:

$$p_1 = m(v_{x0} + v_{x1}) \approx mv_{x1},$$

ahol v_{x1} a kontaktust követően a korongtól távolodó molekulák sebességének a felületre merőleges komponense. Ennélfogva a P_1 nyomásra:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\overline{v_{x0}v_{x1}}}{\overline{2v_{x0}^2}} \approx \frac{\sqrt{T_1T_0}}{T_0},$$

ami egy konstans (egy nagyságrendű) szorzótényezőtől eltekintve helyes eredmény.

A korongra ható eredő erő:

$$F = (P_1 - P_0)S \approx Snk_B\sqrt{T_0T_1},$$

így a kezdeti gyorsulás:

$$a_0 \approx \frac{Snk_B}{M}\sqrt{T_0T_1} = \frac{S\varrho k_B}{mM}\sqrt{T_0T_1}.$$

Mivel $P_1 \gg P_0$, a korong gyorsulni fog egészen addig, amíg a sebessége el nem éri a gázmolekulák sebességének nagyságrendjét. Amikor ez bekövetkezik, azaz a korong v sebessége eléri a $v_0 = \sqrt{kT_0/m}$ nagyságrendet, a hátoldalt érő $j(v)$ részecskeáram exponenciális ütemnél is gyorsabban csökkenni kezd, összhangban az ideális gáz molekuláinak sebességeloszlásával (például $j(2v_0) \approx j_0 10^{-3}$, míg $j(3v_0) \approx j_0 10^{-6}$). Hasonló ütemben csökken a korongot előre hajtó P_1 nyomás is, így a korong nem gyorsul tovább. Ennélfogva a korong legnagyobb sebessége:

$$v_{\max} \approx v_0 = \sqrt{\frac{k_B T_0}{m}}.$$

Az előzőekben feltettük, hogy a korong nem hűl le jelentősen az említett sebesség eléréséig. Ennek belátásához tekintsük először a hozzávetőleges gyorsulási időt:

$$t_{\mathrm{gy}} \approx \frac{v_{\max}}{a_0} \approx \frac{M\sqrt{mk_B T_0}}{S\varrho k_B \sqrt{T_0 T_1}} = \frac{M}{\varrho S} \Bigg/ \sqrt{\frac{k_B T_1}{m}}\,.$$

Mivel a hűlést jellemző P_{h} teljesítmény a korong indulásakor maximális, felső becslést adhatunk a hűlés idejére $t_{\mathrm{h}} = \frac{Q}{P_h}$ alakban, ahol Q a korong teljes hőmennyisége. A P_{h} teljesítmény becsült értéke:

$$P_{\mathrm{h}} \approx Sj_0 \cdot k_B T_1 \approx Snk_B \sqrt{T_0 T_1} \sqrt{\frac{k_B T_1}{m}}\,,$$

továbbá a teljes hőmennyiség $Q \approx Nk_B T_1$. Felhasználva, hogy $M \approx Nm$, a hűlés idejére a következő adódik:

$$t_{\mathrm{h}} \approx \frac{(M/m)k_B T_1}{Snk_B T_1 \sqrt{k_B T_0/m}} = \frac{M}{\varrho S} \Bigg/ \sqrt{\frac{k_B T_0}{m}}\,.$$

Végül vegyük észre, hogy $t_{\mathrm{gy}}/t_{\mathrm{h}} \approx \sqrt{T_0/T_1} \ll 1$, azaz a korong valóban nem hűl le jelentősen a v_0 sebesség elérése előtt.

3. Szupravezető háló

Tekintsünk egy hálót, amely egy lapos szupravezető lapból úgy készül, hogy abba rácsszerűen, sűrűn egymás mellé kis lyukakat fúrunk. Kezdetben a lap nincs szupravezető állapotban, és egy m dipólmomentumú, a hálótól a távolságban lévő mágneses dipólus merőlegesen a háló felé mutat. Ekkor a hálót lehűtjük, és így szupravezetővé válik. Ezután a dipólust a felületre merőleges irányban elmozdítjuk úgy, hogy az új távolsága a hálótól b legyen.

Határozd meg a háló és a dipólus közt fellépő erőt! A lyukrács rácsállandója (a lyukak egymástól mért távolsága) sokkal kisebb, mint a és b, a lap lineáris mérete viszont sokkal nagyobb, mint a és b.

Megoldás. A megoldás kulcsa az, hogy észrevegyük: a mágneses fluxus „beszorul" a szupravezető hálóba. Mindenekelőtt ezt a hatást gondoljuk meg. Miután a hálót szupravezető állapotúra hűtjük, a mágneses mező minden helyen „állandósul", nem változhat meg, akárhogyan is mozgatjuk a mágneses dipólust. Mivel a mágneses mező jól meghatározott a háló mentén, a feladat igazából egy határfeltétel-probléma, amit általában tükörtöltésekkel szoktunk megoldani.

Nézzük meg, mit történik, ha a dipólust eltávolítjuk a hálótól nagyon messzire. El kell helyeznünk egy tükördipólust, ami pont ugyanazt a mágneses mezőt hozza létre a háló mentén, mint az eredeti mágnes. Ezt megoldhatjuk egy dipólussal, amely a távolságra van a háló mögött, és szintén m a dipólmomentuma. Most hozzuk vissza az eredeti dipólust b távolságra a hálótól. Ennek a mezejét viszont ki kell zárnunk a szupravezető hálóból, ezt egy $-m$ momentumú, a háló mögött b távolságra lévő dipólussal tehetjük meg.

A továbbiakban a tükördipólusok által a dipólusra ható erőt kell meghatároznunk. Ezt például a mágneses és az elektromos dipólusok közötti analógia felhasználásával tehetjük meg. A mágneses dipólusokra egymáshoz nagyon közeli, q_m és $-q_m$ nagyságú „mágneses töltésekként" is gondolhatunk, amelyek egymástól d távolságra vannak, ahol $m = q_m d$.

Határozzuk meg a dipólus mágneses térerősségét a dipólus tengelye mentén, a dipólustól $x \gg d$ távolságban:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_m}{x^2} + \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{-q_m}{(x+d)^2} \approx \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_m}{x^2} - \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_m}{x^2}\left(1 - 2\frac{d}{x}\right) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{q_m d}{x^3} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{m}{x^3}.$$

Most vizsgáljuk meg az x helyen lévő dipólusra ható erő nagyságát egy inhomogén, $B(x)$ helyfüggésű mágneses mezőben:

$$F = -q_m B(x) + q_m B(x+d),$$

amit kifejezhetünk $B(x)$ deriváltja segítségével is:

$$F \approx -q_m B(x) + q_m \left(B(x) + d \cdot \left.\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}x}\right|_x \right) = q_m d \left(-\frac{3\mu_0}{2\pi}\frac{m}{x^4} \right) = -\frac{3\mu_0}{2\pi}\frac{m^2}{x^4}.$$

A negatív előjel azt jelenti, hogy két párhuzamos dipólus vonzza egymást.

Visszatérve a feladathoz, a b távolságra lévő dipólust vonzza a $-a$ távolságra lévő dipólus, de taszítja a $-b$ távolságra lévő. Vagyis az eredő erő:

$$F = -\frac{3\mu_0}{2\pi}\frac{m^2}{(a+b)^4} + \frac{3\mu_0}{2\pi}\frac{m^2}{(b+b)^4} = \frac{3\mu_0 m^2}{2\pi}\left(\frac{1}{16b^4} - \frac{1}{(a+b)^4}\right),$$

ahol a negatív előjel azt jelenti, hogy a dipólus vonzást érez a háló felé.

Izgalmas megnézni azt az esetet, ha b és a közel egyenlőek, vagyis $b = a + \delta$ ($\delta \ll a$). Ebben az esetben

$$F = \frac{3\mu_0 m^2}{2\pi}\left(\frac{1}{16(a+\delta)^4} - \frac{1}{(2a+\delta)^4}\right),$$

vagyis

$$F \approx \frac{3\mu_0 m^2}{2\pi}\frac{1}{16a^4}\left(\left(1 - 4\frac{\delta}{a}\right) - \left(1 - 4\frac{\delta/2}{a}\right)\right),$$

ami tovább egyszerűsödik:

$$F \approx -\frac{3\mu_0 m^2}{16\pi a^5}\delta.$$

A negatív előjel miatt ez az erő $\delta > 0$ esetén a háló felé mutat. A pozitív δ itt azt jelenti, hogy távolítjuk a dipólust a hálótól. Látható, hogy az F erő *lineárisan* változik a hely függvényében, tehát ha kicsit kimozdítjuk a dipólust az eredeti (egyensúlyi) helyzetéből, akkor – egyéb erők hiányában – harmonikus rezgőmozgást fog végezni.

Marozsák Tóbiás, Németh Balázs és **Simon Dániel Gábor**

Tehetséggondozás: Mérési szakkör a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Fizikai Intézetében

A fizika iránt érdeklődő, tehetséges középiskolás diákok számára a BME Fizikai Intézet gyakorlati foglalkozásokat tart. A foglalkozásokon lehetőséget biztosítunk arra, hogy a tanulók mérőpárokban fizikai kísérleteket és méréseket végezhessenek. A foglalkozásokra októbertől kezdődően kéthetente, kedden 15.00-tól 18.00-ig kerül sor, összesen nyolc alkalommal. Információ: `http://eik.bme.hu/~vanko/labor/Tehetseggondozas.pdf`.

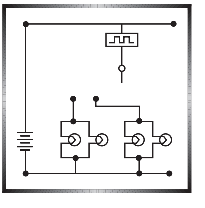
Az érdeklődők e-mail-ben jelentkezhetnek **2017. szeptember 30-ig** az alábbi címen: `vanko@eik.bme.hu`.

Elsősorban a gimnáziumok utolsó két évfolyamára járók jelentkezését várjuk. A jelentkezők írjanak pár sort magukról, ismertessék a fizika és a matematikai tanulmányaik során elért eredményeiket (versenyeredmények, KöMaL szereplés stb.), és továbbtanulási elképzeléseiket.

A foglalkozások ingyenesek! Minden jelentkezőt e-mail-ben értesítünk (aki nem kap választ, küldje el még egyszer a jelentkezését).

Vankó Péter

Fizika gyakorlatok megoldása



G. 587. *Egy kezdetben nyugalomban lévő, m tömegű, könnyen gördülő kiskocsira t ideig F nagyságú húzóerő hat, majd az erő megszűnte után szabadon gördül vízszintes pályán. Mekkora utat tett meg a kocsi az indulástól számított $2t$ idő alatt?*

Adatok: $m = 1{,}6$ kg, $F = 2$ N, $t = 0{,}5$ s.

(*3 pont*)

Megoldás. A kiskocsi gyorsulása a mozgás első szakaszában

$$a=\frac{F}{m}=\frac{2\ \mathrm{N}}{1{,}6\ \mathrm{kg}}=1{,}25\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Az elért végsebesség

$$v=at=1{,}25\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 0{,}5\ \mathrm{s}=0{,}625\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

A továbbiakban a kiskocsi egyenletesen mozog, sebessége nem változik.

A mozgás első szakaszában a kiskocsi

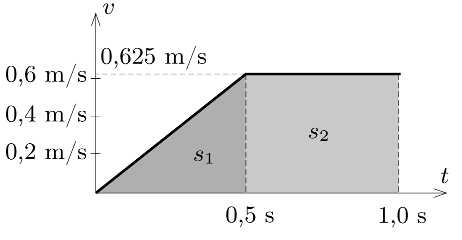
$$s_1=\frac{a}{2}t^2=0{,}156\ \mathrm{m},$$

a második szakaszban pedig

$$s_2=vt=0{,}312\ \mathrm{m}$$

utat tesz meg. A teljes megtett út az indulástól számított $2t=1$ s idő alatt

$$s=s_1+s_2=0{,}468\ \mathrm{m}\approx 47\ \mathrm{cm}.$$



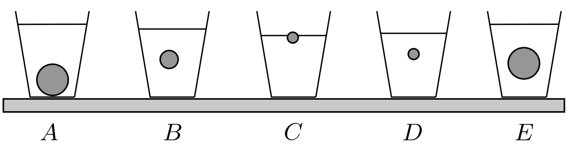
Ugyanezt az eredményt a kiskocsi sebesség–idő grafikonjáról is leolvashatjuk: a megtett út a grafikon görbéjének (két egyenes vonalának) „görbe alatti területével” egyezik meg.

Kozák Áron (Budapest, Békásmegyeri Veres P. Gimn., 9. évf.)

Megjegyzés. A megoldás során nem vettük figyelembe a kiskocsi kerekeinek véges nagyságú tömegét (és az emiatt fellépő, a pálya és a kerekek között ható tapadási súrlódási erőt), valamint elhanyagoltuk a légellenállás és a gördülő súrlódás fékező hatását.

52 dolgozat érkezett. Helyes 38 megoldás. Kicsit hiányos (2 pont) 7, hiányos (1 pont) 7 dolgozat.

G. 588. *Öt egyforma pohárba azonos mennyiségű vizet töltöttünk. Minden pohárba tettünk egy-egy golyót is. A golyók sugara* 1 cm, 2 cm *vagy* 3,5 cm. *Ezután megmértük mindegyik pohár súlyát vizestül, golyóstul, és eszerint növekvő sorrendbe rendeztük őket. Mi lett a sorrend, és miért?*



(*3 pont*)

Megoldás. Az egyes golyók a sűrűségük nagyságától függően úsznak, lebegnek, vagy elsüllyednek a vízben. A C golyó úszik a víz felszínén, a sűrűsége tehát kisebb, mint a víz sűrűsége. Mivel a B, D és E golyó lebeg a vízben, ezek sűrűsége tehát pontosan megegyezik a víz sűrűségével. Az A golyó a víznél nagyobb sűrűségű, hiszen elsüllyedt.

Mivel mindegyik pohárban ugyanannyi víz van, és a poharak is egyformák, ezért csak a golyók tömegét kell vizsgálnunk a poharak (vízzel és golyóval együtt mért) súlyának összehasonlításánál.

A feladat szövege szerint a golyók 1, 2, és 3,5 cm sugarúak. Az ábráról leolvasható, hogy a C és D golyó sugara 1 cm, a B golyóé 2 cm, az A és E jelű golyók pedig 3,5 cm sugarúak. Magától értetődő az is, hogy két golyót összehasonlítva a nagyobb sugarúnak nagyobb a térfogata. Az 1 cm sugarú golyók közül – a fentebb leírtak alapján – a C sűrűsége kisebb, mivel sugara 1 cm, ezért a tömege kisebb a D és az összes többi golyó tömegénél. Tehát a sorban az első a C jelű elrendezés lesz, ennek legkisebb a súlya.

Ugyancsak a fentebb leírtak alapján a B, D és E golyók egyforma sűrűségűek, de térfogatuk a következő sorrendben növekszik: D, B és E. Ez azt jelenti, hogy a tömegük is ebben a sorrendben növekszik. Az A golyó sűrűsége nagyobb, mint az összes többi golyó sűrűsége, és a térfogata is a lehető legnagyobb, tehát ennek a golyónak van a legnagyobb tömege.

A kérdezett sorrend tehát: C, D, B, E és A.

Kozmér Barbara (Révkomárom, Selye János Gimn., 9. évf.)

46 dolgozat érkezett. Helyes 32 megoldás. Hiányos (1–2 pont) 12, hibás 2 dolgozat.

G. 592. *H magasságból elejtett labda $h<H$ magasságban a vízszintessel 45°-os szöget bezáró ferde fallal ütközik, amelyről tökéletesen rugalmasan visszapattan.*

a) Mekkora h magasságból pattan a labda (vízszintes irányban mérve) a legmesszebbre?

b) Mekkora ez a maximális távolság?

(*3 pont*)

Megoldás. Feltesszük, hogy nincs mechanikai energiaveszteség (ez akkor jogos, ha H nem túl nagy). Felírhatjuk az energiamegmaradás törvényét, és abból kiszámíthatjuk a labda sebességének v nagyságát az ütközési pontnál:

$$mg(H-h)=\frac{1}{2}mv^2, \quad \text{ahonnan} \quad v=\sqrt{2g(H-h)}\,.$$

Rugalmas ütközésnél a labda sebességének nagysága nem változik. Mivel a fal 45°-os szöget zár be a vízszintessel és a becsapódási szög egyenlő a visszaverődési szöggel, ezért a labda vízszintesen repül tovább. Így a mozgás ezen szakasza olyan, mint egy vízszintes hajítás. A talajt

$$t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

idő alatt éri el a labda (mintha h magasságból szabadon esne), ezalatt vízszintesen

$$s = vt = \sqrt{2g(H-h)} \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} = 2\sqrt{h(H-h)}$$

utat tesz meg.

A számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség miatt:

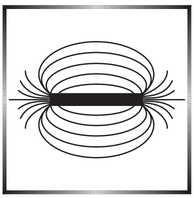
$$\sqrt{h(H-h)} \leqslant \frac{h+H-h}{2}, \quad \text{vagyis} \quad s \leqslant H.$$

A maximum értéket akkor veszi fel az $s(h)$ függvény, ha

$$h = H - h, \qquad \text{azaz} \qquad h = \frac{H}{2}.$$

Vincze Lilla (Szeged, Radnóti M. Kísérleti Gimn., 9. évf.)

30 dolgozat érkezett. Helyes 23 megoldás. Kicsit hiányos (1–2 pont) 7 dolgozat.



Fizika feladatok megoldása

Áprilisi pótfeladat*. *Egy végtelen hosszú, vízszintes rúdon N darab azonos tömegű, tökéletesen rugalmas gyöngyszem csúszhat súrlódásmentesen. A gyöngyöket egy adott pillanatban valamilyen (tetszés szerint választható) kezdőállapotból elindítjuk.*

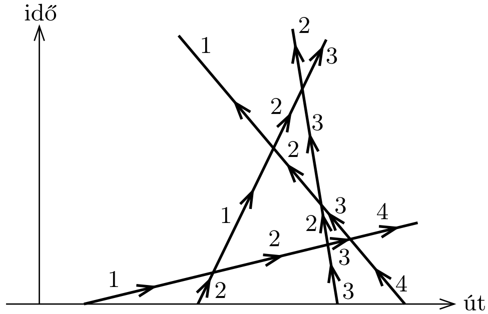
a) Legfeljebb hány ütközés jöhet létre a továbbiakban?

b) Hogyan módosul az eredmény, ha a rúd egyenes, de nem vízszintes?

Orosz feladat

Megoldás. *a*) Az ütközések közötti időszakokban a gyöngyszemek (amelyeket az egyszerűség kedvéért pontszerűnek tekintünk) egyenes vonalú egyenletes mozgással mozognak. Tudjuk továbbá, hogy azonos tömegű testek rugalmas ütközésekor a testek sebessége „felcserélődik”.

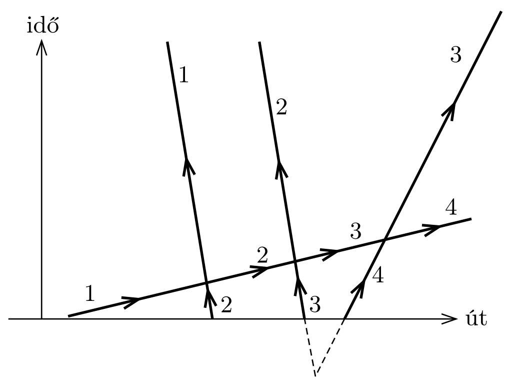
Ábrázoljuk a gyöngyszemek mozgását és ütközését egyetlen út–idő diagramon! Az ütközésmentes időszakokban mindegyik gyöngyszem mozgása egy-egy egyenessel adható meg. Ezek az egyenesek (a gyöngyszemek „világvonalai”) az ütközések után is „törésmentesen” folytatódnak, csak az ütközések résztvevői szerepet cserélnek. Az ütközések számát a gyöngyszemek mozgását megadó egyenesek metszéspontjainak száma adja meg (*1. ábra*). (Az ábrán látható számok a gyöngyszemek



1. ábra

azonosítását segítik.) Az ütközések (metszéspontok) száma legfeljebb $N(N-1)/2$ lehet.

Természetesen előfordulhat, hogy valamelyik két egyenes párhuzamos, ezeknek nincsen metszéspontja, illetve az is lehet, hogy két egyenes metszéspontja az indításnál korábbi időpontot jelöl ki (*2. ábra*). Ezekben az esetekben a ténylegesen bekövetkező ütközések száma *kevesebb,* mint $N(N-1)/2$.



2. ábra

b) A lejtős rúdon súrlódásmentesen csúszó, tehát egyenletesen gyorsuló gyöngyszemek mindegyikének világvonala parabola. Ezen parabolák metszéspontjainak összeszámlálása az előzőnél sokkal bonyolultabb feladatnak látszik, de – szerencsére – nem ez a helyzet.

A gyöngyszemek a gyorsulását a rúd α hajlásszöge határozza meg ($a=g\sin\alpha$). Üljünk bele – gondolatban – egy olyan koordináta-rendszerbe, amely éppen a gyorsulással mozog a rúddal párhuzamosan. Ebből a rendszerből szemlélve a gyöngyszemek „súlytalanok", mozgásuk tehát ugyanolyan egyenes vonalú, egyenletes mozgás, mint amilyen a vízszintes rúdnál volt. Emiatt az ütközések száma most is legfeljebb $N(N-1)/2$ lehet.

(G. P.)

[1]A KöMaL 2017. évi áprilisi számában megjelent, pontversenyen kívüli feladat.

P. 4886. *Egy* 10 m^3*-es állandó térfogatú tartályban a kezdetben* 30 °C*-os és* 50% *relatív páratartalmú levegő* 5 °C*-ra hűl le. Mennyi víz csapódik ki?*

(*4 pont*) *Vermes Miklós* (1905–1990) feladata

Megoldás. Táblázatból kiolvasható, hogy $T_1 = 30\,^\circ\mathrm{C}$-os hőmérsékleten a telített vízgőz sűrűsége $\varrho_1 = 0{,}0303\ \mathrm{kg/m^3}$, $T_2 = 5\,^\circ\mathrm{C}$-on pedig $\varrho_2 = 0{,}0068\ \mathrm{kg/m^3}$.

A kezdeti T_1 hőmérsékleten telítettség (100%-os páratartalom) esetén a $V = 10\ \mathrm{m^3}$-es tartályban $\varrho_1 V = 0{,}303$ kg tömegű gőz lenne, az 50%-os relatív páratartalmat figyelembe véve a vízgőz tényleges tömege $m_1 = \frac{1}{2}\varrho_1 V = 0{,}151$ kg.

T_2 hőmérsékleten telített állapotot feltételezve a vízgőz tömege $m_2 = \varrho_2 V = 0{,}068$ kg. Látható, hogy $m_1 > m_2$, vagyis a folyamat kvalitatív leírása a következő: A hőmérséklet csökkenése során a kezdetben telítetlen vízgőz egy bizonyos hőmérsékleten (a harmatponton) telítetté válik, eddig vízkicsapódás nem tapasztalható. A hőmérséklet további csökkenésével a vízgőz mindvégig telített állapotú lesz, de mivel a sűrűsége fokozatosan csökken, bizonyos mennyiségű víz kicsapódik, aminek a tömege:

$$\Delta m = m_1 - m_2 = 0{,}083\ \mathrm{kg} = 83\ \mathrm{g}.$$

Megjegyzések. 1. A megoldás során elhanyagoltuk a kicsapódó víz térfogatát, ami kb. $8 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m^3}$. Ez 5 nagyságrenddel kisebb, mint a tartály térfogata, tehát az elhanyagolás jogos volt.

2. A megoldás során nem foglalkoztunk a levegő jelenlétével, mivel ez csak a tartályban mérhető nyomást befolyásolja, a vízgőz telítési viszonyait nem.

Marozsák Tóbiás (Budapest, Óbudai Árpád Gimn., 11. évf.)

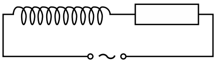
Megjegyzések. 1. A telített vízgőz nem túl magas (a kritikus ponttól távoli) hőmérsékleteken ideális gáznak tekinthető, és a sűrűsége a táblázatokban megadott gőznyomásadatokból is meghatározható. Ugyanakkor a táblázatban megtalálhatjuk a telített gőz sűrűségadatait is; célszerűbb, ha ezen (pontosabb) értékeket használjuk a számításainkban. Ha a feladat megoldása során egy elméleti képletet (esetünkben az ideális gáz állapotegyenletét) a szokásostól eltérő helyen alkalmazzuk, akkor utalnunk kell az alkalmazhatóság jogosságára.

2. A leírt gondolatmenet nem alkalmazható akkor, ha egy 10 köbméteres szoba légteréből kicsapódó pára mennyiségét keressük. Ott ugyanis a levegő és a vízgőz együttes nyomása (ami gyakorlatilag a levegő nyomása) nem változik, tehát a lehűlő levegő mellé a (nem teljesen légmentesen záró) nyílászárókon keresztül külső levegő is áramlik, aminek tömege az eredeti levegő tömegének majdnem 10 százaléka. Ha ez a beáramló levegő is ugyanakkora páratartalmú, mint a szoba eredeti levegője volt, akkor a kicsapódó pára mennyisége majdnem 10%-kal több lesz a számítottnál. Természetesen lehetséges, hogy a külső levegő páratartalma sokkal kisebb, mint a szobáé, ilyenkor nem kell korrigálnunk a korábbi, 83 grammos eredményt.

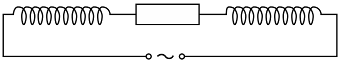
82 dolgozat érkezett. Helyes 68 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 9, hiányos (2 pont) 1, nem versenyszerű 4 dolgozat.

P. 4914. *Egy soros RL-körben (a) a feszültségforrás váltakozó feszültsége és az áram közötti fáziskülönbség 45°. Sorba kötve velük egy, az előzővel megegyező, L induktivitású tekercset, ez a fáziskülönbség 65°-nak, illetve 70°-nak adódik aszerint, hogy az új tekercset (b) az ellenállás, vagy (c) a régi tekercs oldalára tesszük. Hogy lehetséges ez?*

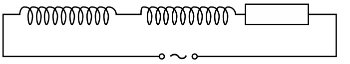
Mennyi a három esetbeli impedanciák aránya?



(*a*)



(*b*)



(*c*)

(Lásd még a „Két párhuzamosan kapcsolt ideális tekercs eredő induktivitása" című cikket a KöMaL 2011. évi decemberi számának 557. oldalán és a honlapunkon: `www.komal.hu/cikkek/cikklista.h.shtml#fiz`.)

(*5 pont*) Közli: *Szász Krisztián,* Budapest

Megoldás. A *b*) esetben a tekercsek (a közöttük lévő ellenállás miatt) feltehetően távolabb vannak egymástól, mint a *c*) esetben. Mindkét elrendezésben mindegyik tekercs mágneses indukcióvonalainak bizonyos része áthalad a másik tekercsen is. Az egyes tekercsek mágneses fluxusának változását „megérzi" a másik tekercs is, hiszen az egyik tekercs áramának megváltozása esetén feszültség indukálódik a másik tekercsben is. Így az eredő induktivitás meghatározásánál számolni kell a kölcsönös indukciós együtthatóval, amelyet a hivatkozott cikk szerint $M = k\sqrt{L_1 L_2}$ alakban írhatunk fel. Esetünkben $L_1 = L_2 = L$, tehát $M = kL$. A csatolás erősségére jellemző k szám – többek között – függ a tekercsek távolságától, tehát a *b*) és a *c*) esetben különböző lehet.

Az eredő induktivitás nem egyszerűen a két tekercs induktivitásának összegeként, hanem a következő összefüggés alapján határozható meg:

$$L_{\text{eredő}} = L_1 + L_2 + 2M = 2L(k+1).$$

Az impendanciák arányának meghatározásához érdemes Z-ket az ohmos ellenállás R nagyságával (ez mindhárom esetben ugyanakkora) és a fázisszögekkel kifejezni:

$$Z_a = \frac{R}{\cos\varphi_a}, \quad Z_b = \frac{R}{\cos\varphi_b}, \quad Z_c = \frac{R}{\cos\varphi_c},$$

ahonnan a keresett arány

$$Z_a : Z_b : Z_c = \frac{1}{\cos\varphi_a} : \frac{1}{\cos\varphi_b} : \frac{1}{\cos\varphi_b} = 1{,}41 : 2{,}37 : 2{,}92.$$

Pszota Máté (Révkomárom, Selye János Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

Megjegyzés. Az $\omega L_{\text{eredő}} = R\,\mathrm{tg}\,\varphi$ összefüggés felhasználásával kiszámíthatjuk, hogy a *b*) esetben az eredő induktivitás $2{,}14\,L$, a *c*) esetben pedig $2{,}74\,L$, és innen megkaphatjuk a csatolások erősségét is: $k_b = 0{,}07$ és $k_c = 0{,}37$. Látható, hogy az előzetes várakozásunkkal összhangban az egymás melletti tekercsek mágneses csatolása erősebb, mint az ellenállás két oldalán elhelyezkedő tekercseké.

22 helyes dolgozat érkezett.

Eötvös-verseny

Az idei Eötvös-versenyt

2017. október 13-án

pénteken délután 15^{h}-tól 20^{h}-ig rendezi meg az Eötvös Loránd Fizikai Társulat.

A versenyen azok a diákok vehetnek részt, akik vagy középiskolai tanulók, vagy a verseny évében fejezték be középiskolai tanulmányaikat. Nemcsak magyar állampolgárságú versenyzők indulhatnak, hanem Magyarországon tanuló külföldi diákok, valamint külföldön tanuló, de magyarul értő diákok is.

A megoldásokat magyar nyelven kell elkészíteni, a rendelkezésre álló idő 300 perc. Minden írott vagy nyomtatott segédeszköz használható, de zsebszámológépen kívül minden elektronikus eszköz használata tilos.

Előzetesen jelentkezni nem kell, elegendő egy személyazonosság igazolására szolgáló okmánnyal (személyi igazolvány, diákigazolvány vagy útlevél) megjelenni a verseny valamelyik helyszínén.

A helyszínek és a versennyel kapcsolatos minden további információ megtalálható a verseny honlapján:

`http://eik.bme.hu/~vanko/fizika/eotvos.htm`.

Versenybizottság

Fizikából kitűzött feladatok

Mérési feladat

FIGYELEM! *A mérési feladat megoldását azok a versenyzők küldhetik be, akik beneveztek az **M** pontversenybe. A mérés során szabad egy személy (családtag, osztálytárs, barát) segítségét is igénybe venni. A segítő személy nevét (diákoknál az iskolájukat és az osztályukat is) kérjük feltüntetni.*

M. 370. Mérjük meg legalább háromféle szemcsés élelmiszer (például rizs, mák, liszt, kristálycukor, porcukor) rézsűszögét!

(*6 pont*) Közli: *Részegh Anna,* Vácduka

Gyakorlatok

FIGYELEM! *A gyakorlatokat azok az 1–8. osztályosok, 9., illetve 10. osztályosok küldhetik be, akik beneveztek a **G** pontversenybe. Ők a **P** jelzésű feladatok pontversenyében* nem vehetnek részt. *A beküldött gyakorlatok közül **legfeljebb három feladat** megoldását számítjuk be a pontversenybe.*

G. 605. Két, egymással párhuzamosan futó sínpáron két vonat halad. Az egyik sebessége 80 km/h. A köztük levő távolság 4,8 km, negyedóra múlva a távolság ugyanennyi. Mekkora a másik vonat sebessége, ha mindkét vonat hossza 200 m?

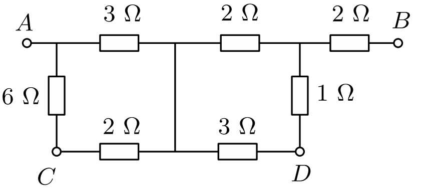
(*3 pont*)

G. 606. Egy kaloriméter hőkapacitását szeretnénk megmérni. Ezért az edényben már régóta benne levő 150 g tömegű, 17 °C hőmérsékletű vízhez 65 g tömegű, 45 °C-os vizet öntünk. A keverék hőmérséklete 25 °C lesz. Mekkora a kaloriméter hőkapacitása?

(*3 pont*)

G. 607. Számítsuk ki az *ábrán* látható kapcsolás A és B, illetve a C és D pontok közötti eredő ellenállását!

(*3 pont*)



G. 608. Függőleges vezetőben folyó, viszonylag gyenge elektromos áram mágneses hatását szeretnénk iránytűvel kimutatni. Az áram bekapcsolása előtt hogyan helyezzük el az iránytűt, hogy az a lehető legjobban eltérüljön az észak-déli iránytól az áram hatására?

(*3 pont*)

Feladatok

FIGYELEM! *A feladatokat azok küldhetik be, akik beneveztek a* ***P*** *pontversenybe. Ők a* ***G*** *jelzésű gyakorlatok pontversenyében* nem vehetnek részt. *A beküldött feladatok közül a 9–12. évfolyamosoknál* ***legfeljebb öt,*** *a náluk fiatalabbaknál* ***legfeljebb három feladat*** *megoldását számítjuk be a pontversenybe.*

P. 4949. Mire fordítódik egy „mágnesfékes" szobakerékpárt hajtó ember lábizmai által végzett munka?

(*3 pont*)

P. 4950. Egy álló helyzetből induló, 1200 kg tömegű gépkocsi vízszintes, egyenes pályán 2 m/s^2 gyorsulással 200 m utat tett meg. Kerekei nem csúsztak meg.

a) Mekkora tapadó súrlódási erő hatott összesen a talaj és a kerekek között?

b) Mekkora lett a gépkocsi mozgási energiája? (A kerekek tömege elhanyagolható.)

c) Mennyi munkát végzett a tapadási súrlódási erő?

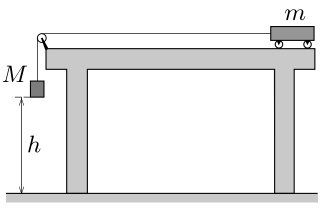
(*4 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

P. 4951. A Nap körüli keringése során másodpercenként közelítőleg mekkora távolsággal tér el a Föld az egyenes iránytól?

(*4 pont*) Közli: *Radnai Gyula,* Budapest

P. 4952. Egy fizikaórán a tanár a következő feladat kiszámított eredményét szeretné kísérletileg is ellenőrizni (lásd a **G. 587.** gyakorlat megoldását a 371. oldalon):

„Egy kezdetben nyugalomban lévő, $m = 1{,}6$ kg tömegű, könnyen gördülő kiskocsira 0,5 s ideig 2 N nagyságú húzóerő hat, majd az erő megszűnte után szabadon gördül vízszintes pályán. Mekkora utat tett meg a kocsi az indulástól számított 1 másodperc alatt?”



Mekkorának válassza az *ábrán* látható nehezék M tömegét és a h távolságot? (A kocsikerekek, a csiga és a fonál tömege elhanyagolható.)

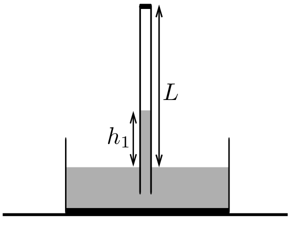
(*4 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka

P. 4953. Egy $A = 2\ \mathrm{cm}^2$ keresztmetszetű, $L = 1$ m hosszú Torricelli-csőbe argongázt juttattunk, ezért benne csak $h_1 = 0{,}40$ m magasan áll a higany. A külső légnyomás $p_0 = 10^5$ Pa, a kezdeti hőmérséklet 20 °C.

a) Mekkora tömegű argongáz jutott be a higany fölé?

b) A gáz hőmérsékletét lassan növeljük. Mekkora a hőmérséklet akkor, amikor a higany magassága a csőben $h_2 = 0{,}36$ m?

c) Mekkora munkát végzett a kitáguló gáz a folyamat során?



(*5 pont*) *Országos Mikola Sándor Fizikaverseny*

P. 4954. Egy viszonylag nagy tömegű méterrúd egyik vége egy vízszintes helyzetű tengely körül szabadon elfordulhat. A kezdetben vízszintes rúdra tegyünk egyenlő, 10 cm-es távolságokban 5 Ft-os pénzérméket, összesen 11 darabot.

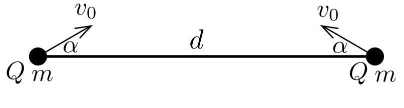
a) Mi történik a pénzérmékkel nagyon rövid idővel az elengedés pillanata után?

b) Mely érmék nem mozdulnak meg a rúdhoz képest, amikor a rúd az eredeti helyzetével már 10°-ot zár be?

A pénzérmék és a méterrúd közötti tapadó súrlódás együtthatója 0,5.

(*5 pont*) *Budó Ágoston Fizikai Feladatmegoldó Verseny,* Szeged

P. 4955. Két m tömegű, Q töltésű, kis méretű golyó vízszintes síkban mozogva adott pillanatban d távolságra van egymástól. Ebben a pillanatban a sebességük v_0, és a sebességvektorok az *ábrán* látható módon α szöget zárnak be a golyókat összekötő egyenessel.



a) Milyen minimális távolságra közelíti meg egymást a két golyó?

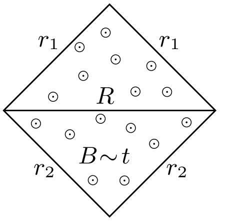
b) Milyen nagy ekkor a sebességük?

(*5 pont*) *Párkányi László Fizikaverseny,* Pécs

P. 4956. Egy csillagászati távcső f fókusztávolságú parabolatükrének tengelye egy adott pillanatban éppen függőleges. A tükör pereme ekkor H-val magasabban van, mint a tükör legmélyebb pontja. Egy m tömegű kis test a tükör peremétől indulva súrlódásmentesen lecsúszik a tükör középpontjáig. Mekkora erővel nyomja ott a tükröt?

(*5 pont*) A *Kvant* nyomán

P. 4957. Egy négyzet alakú drótkeret oldalélei az *ábrán* látható r_1 és r_2 ellenállású huzalokból készültek. A keret az ábra síkjára merőleges, homogén, időben egyenletesen növekvő mágneses indukciójú mezőben van. Mekkora R ellenállású vezetéket kapcsoljunk a négyzet átlójára, hogy az a leggyorsabb ütemben melegedjen?

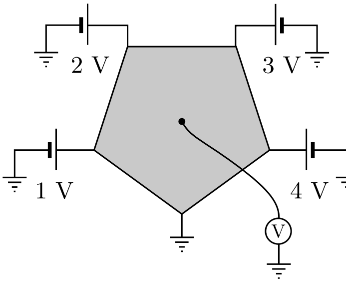


(*5 pont*) *Izsák Imre Gyula verseny* (Zalaegerszeg) feladata nyomán

P. 4958. Egy uránércdarabban 200 millió ^{233}U atom található. Az ^{233}U izotóp felezési ideje $1{,}6 \cdot 10^5$ év, és ^{229}Th-ra bomlik, melynek felezési ideje $7,8 \cdot 10^3$ év. Ez tovább bomlik ^{225}Ra-ra, melynek felezési ideje 15 nap. Becsüljük meg az uránércdarabban levő ^{225}Ra atommagok számát!

(*5 pont*) *Országos Szilárd Leó Fizikaverseny,* Paks

P. 4959. Egy szabályos ötszög alakú, vékony fémlemez egyik csúcsát leföldeljük, a többire az ábrán látható módon kis belső ellenállású feszültségforrásokat kapcsolunk. Mekkora feszültséget mutat a lemez középpontjához kapcsolt voltmérő?



(*6 pont*) *Példatári feladat nyomán*

Beküldési határidő: 2017. október 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 67. No. 6. September 2017)

Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 353): **K. 547.** Peter thought of a positive integer. He added the number containing the same digits in reverse order. (For example, starting with 26 he added 62 to it, or starting with 530 he added 35.) He obtained a three-digit number that only contained digits of 6 and/or 9. What may have been Peter's original number? **K. 548.** We have four boxes numbered 1 to 4, and four cards with the numbers 1, 2, 3, 4 on them. We place one card in each box, according to the following rule: every card shows the number of the box that contains the card corresponding to the number of the box containing it. In how many different ways is it possible to place the cards in the boxes? **K. 549.** Three cars are travelling along the same road, in the same direction but at different uniform speeds. In principle, there are six possible orders for the three cars behind each other. Is it possible that all six orders actually occur during their journey? (Proposed by *L. Loránt,* Budapest) **K. 550.** An unusual telegraph company charges for the various words by the letters they contain. Consonants are free, but each vowel costs a certain amount. We do not know these prices, but we do know the charges for a few words we have sent before: TÉGLALAP, PARALELOGRAMMA, NÉGYZET, HÁROMSZÖG, NÉGYSZÖG, ROMBUSZ, TRAPÉZ, DELTOID. (These are all mathematical terms in Hungarian. Y is not a vowel, and vowels with accents on them count as different vowels.) Show a possible method to determine the charge for the word GEOMETRIA. **K. 551.** Find appropriate positive integers $x > y > z$ such that $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{z^2}$ should hold. **K. 552.** What is the largest divisor of 9900 that is divisible by 22, 33 and 55, but not divisible by 44, 50 or 99?

New exercises for practice – competition C (see page 354): **Exercises up to grade 10: C. 1427.** Divide a square into ten acute-angled isosceles triangles. (*Elemente der Mathematik*) **C. 1428.** The product of four consecutive odd numbers ends in a digit of 9. What may be the preceding digit? (*Matlap,* Kolozsvár) **Exercises for everyone: C. 1429.** Ten points are placed in a 5 cm $\times$ 8 cm rectangle. Prove that there are two points separated by a distance of at most $\sqrt{10}$ cm. **C. 1430.** Determine all natural numbers x and y such that $\frac{20}{x} + \frac{17}{y} = 1$, and xy is a perfect square. (Proposed by *B. Kovács,* Szatmárnémeti) **C. 1431.** The lengths of the shorter base of a trapezium, then one leg, then the other leg and finally the longer base, in this order, form an arithmetic progression. Given that the length of the shortest side is 3 cm, and one of the angles lying on the longer base is 60 degrees, what is the common difference of the arithmetic progression? **Exercises upwards of grade 11: C. 1432.** Let n be a positive integer. Show that there exists an n-digit number that is divisible by 2^n, and only contains digits of 1 and 2. **C. 1433.** Four $r \times 6r$ rectangles are assembled to form a flexible rhombus, hinged on circles of radius r at the vertices. The circles touch the shorter sides of the rectangles at the midpoints (see the *figure*). The circles can be moved to change the angles of the rhombus, but the rectangles may not overlap. What are the smallest and the largest possible angles?

New exercises – competition B (see page 355): **B. 4885.** Let k and m be two distinct 14-digit positive integers, each containing two of each digit 1, 2, 3, 4, 5, 6 and 7 (like 22133456456717, for example). Prove that $\frac{k}{m}$ cannot be an integer. (*4 points*) (*M&IQ*) **B. 4886.** How many different convex polyhedra are determined by the vertices of a cube? (Two polyhedra are considered different if they are not congruent.) (*3 points*) **B. 4887.** Prove that there are infinitely many number pairs (a, b), such that $a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{a}$, where $a \neq b$. Find the possible values of ab. (*3 points*) (Proposed by *J. Szoldatics,* Budapest) **B. 4888.** From his third birthday onwards, Sebastian always gets a birthday cake shaped like a triangular prism, with one candle in each of the three upper vertices, and as many further candles on the top as needed to make the total equal to his age. No three candles are collinear. Sebastian wants to cut the cake into triangular pieces with vertices at the positions of the candles, without other candles in the interior of the triangles. How many pieces can he form on his kth birthday? (*4 points*) **B. 4889.** The trapezium $ABCD$ has an inscribed circle. The circle touches base AB at point T, and the parallel base CD at point U. Let M denote the intersection of the lines of legs AD and BC, and let V be the intersection of side AB with line MU. Show that $AT = VB$. (*4 points*) **B. 4890.** Solve the following equation on the set of positive integers: $x - y - \frac{x}{y} - \frac{x^3}{y^3} + \frac{x^4}{y^4} = 2017$. (*5 points*) (Proposed by *B. Kovács,* Szatmárnémeti) **B. 4891.** The circles S_1, S_2, S_3 pairwise touch each other on the outside. Let A, B and C denote the common points of the circles S_1 and S_2, S_1 and S_3, S_2 and S_3, respectively. Line AB intersects the circles S_2 and S_3 again at points D and E, respectively. Line DC intersects circle S_3 again at F. Prove that triangle DEF is right-angled. (*5 points*) (*Kvant*) **B. 4892.** Two players, First and Second, play the following game: they place 2017 pebbles on the table. First starts by removing 1 pebble. Then Second may choose to remove either 1 or 2. Then First may remove 1, 2, 3 or 4. Then Second may remove any number from 1 to 8. And so on, the player in the ith step needs to remove at least 1 and at most 2^{i-1} pebbles. The player removing the last pebble from the table wins the game. Who has a winning strategy? (*5 points*) **B. 4893.** In a triangle ABC, $AB \neq BC$. The angle bisector drawn from point B intersects side AC at point D, and intersects the circumscribed circle again at point E. The circle of diameter DE intersects the circumscribed circle again at a point F, different from E. Prove that the reflection of line BF about the line BD results in a median of triangle ABC. (*6 points*)

New problems – competition A (see page 356): **A. 701.** An airline operates flights between any two capital cities in the European Union. Each flight has a fixed price which is the same in both directions. Furthermore, the flight prices from any given city are pairwise distinct. Anna and Bella wish to visit each city exactly once, not necessarily starting from the same city. While Anna always takes the cheapest flight from her current city to some city she hasn't visited yet, Bella always continues her tour with the most expensive flight available. Is it true that Bella's tour will surely cost at least as much as Anna's tour? (*Based on a Soviet problem*) **A. 702.** Fix a triangle ABC. We say that triangle XYZ is elegant if X lies on segment BC, Y lies on segment CA, Z lies on segment AB, and XYZ is similar to ABC (i.e., $\angle A = \angle X$, $\angle B = \angle Y$, $\angle C = \angle Z$). Of all the elegant triangles, which one has the smallest perimeter? **A. 703.** Let $n \geqslant 2$ be an integer. We call an ordered n-tuple of integers primitive if the greatest common divisor of its components is 1. Prove that for every finite set H of primitive n-tuples, there exists a non-constant homogenous polynomial $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ with integer coefficients whose value is 1 at every n-tuple in H. (Based on the sixth problem of the *58th IMO,* Brazil)

Problems in Physics

(see page 378)

M. 370. Measure the tilt angle of at least three different types of grainy food (e.g. rice, poppy seed, flour, granulated sugar or powdered sugar).

G. 605. Two trains are travelling along two parallel tracks. The speed of one of them is 80 km/h. The distance between them is 4.8 km, and after a quarter of an hour the distance between them is the same. What is the speed of the other train if both trains have the same length of 200 m? **G. 606.** The heat capacity of a calorimeter is to be measured, therefore 65 g water at a temperature of 45 °C is poured into the calorimeter, which has already contained for a long time 150 g water at a temperature of 17 °C. The final temperature of the mixture is 25 °C. What is the heat capacity of the calorimeter? **G. 607.** Calculate the equivalent resistance of the circuit shown in the *figure* across points A and B, and across the points C and D. **G. 608.** The magnetic effect of a relatively weak electric current flowing in a piece of vertical wire is to be shown by means of a compass.

Before the current is switched on where should the compass be placed in order that due to the current the pointer deviates the most from the north-south direction?

P. 4949. A man is exercising on a stationary bike, which has a magnetic resistance mechanism. What is the work performed by the muscles of the man's legs transferred to? **P. 4950.** A car of mass 1200 kg started from rest and speeded up at an acceleration of 2 m/s^2 along a straight horizontal path of length 200 m. Its wheels did not slide. *a*) What was the total frictional force exerted between the ground and the wheels? *b*) What is the final kinetic energy of the car? (The mass of the wheels can be neglected.) *c*) How much work was done by the static frictional force? **P. 4951.** Approximately by what distance does the Earth's path diverges from the straight line in one second, during its revolution around the Sun? **P. 4952.** On a Physics lesson the teacher wants to check experimentally the result of the following, previously calculated problem (see the solution of exercise **G. 587.** on page 371:) "A 2 N force is exerted on an initially stationary, easily moveable trolley of mass $m=1.6$ kg for 0.5 s, and after the force ceased the trolley moves freely along the horizontal path. What distance is covered by the trolley during the first second after it started moving?" How should the mass M of the weight shown in the *figure* be chosen, and what should the distance h be? (The masses of the wheels of the trolley, the pulley and the thread are negligible.) **P. 4953.** Some argon gas is put into a Torricelli-tube of length $L=1$ m and of cross section $A=2$ cm^2, therefore the height of the mercury in the tube is only $h_1=0.4$ m. The ambient air pressure is $p_0=10^5$ Pa, and the initial temperature is 20 °C. *a*) What is the mass of the argon gas above the mercury? *b*) The temperature of the gas is slowly increased. What is the temperature of the gas when the height of the mercury in the tube is $h_2=0.36$ m? *c*) How much work was done by the extending gas during the process? **P. 4954.** One end of a metre stick, which has fairly big mass, can be rotated freely about a horizontal axle. Put 11 five-forint coins onto the initially horizontal stick at a distance of 10 cm from each other. *a*) What happens to the coins right after the moment when the stick was released? *b*) Which coins do not move with respect to the stick at the moment when the stick encloses an angle of 10° with its original position? The coefficient of static friction between the stick and the coins is 0.5. **P. 4955.** Two small balls of mass m and of charge Q are moving on the horizontal ground, and at a certain instant they are at a distance of d. At this instant their speeds are v_0, and the direction of their velocity vectors makes an angle of α with the direction of the line connecting the two balls, as shown in the *figure. a*) What is the least distance between the balls? *b*) What are their speeds at this moment? **P. 4956.** At a certain instant the symmetry axis of the parabolic mirror of an astronomical telescope is vertical. The focal length of the mirror is f. At this instant the rim of the mirror is at a height of H with respect to the lowest point of the mirror. A small object of mass m, starting from the rim of the mirror slides down on the mirror frictionlessly to the centre of the mirror. What is the force exerted by the small object at the centre of the mirror? **P. 4957.** The sides of a square-shaped frame, shown in the *figure* are made of wires of resistances r_1 and r_2. The frame is in uniform magnetic field, which is perpendicular to the plane of the figure and is increasing at a constant rate. What should the resistance R of the wire connected across the diagonal of the frame be, in order that this wire is warmed up at the greatest rate? **P. 4958.** In a piece of uranium ore there are 200 million ^{233}U atoms. The half-life of the ^{233}U isotope is $1.6\cdot 10^5$ years, and it decays to ^{229}Th, the half-life of which is $7.8\cdot 10^3$ years. This decays to ^{225}Ra, which has a half-life of 15 days. Estimate the number of ^{225}Ra nuclei in the uranium ore. **P. 4959.** One of the vertices of a regular pentagon-shaped thin metal sheet is earthed, whilst to the others voltage supplies of small internal resistance are connected, as shown in the figure. What is the reading on the voltmeter connected to the centre of the sheet?