

VÁLTOZÓ PARAMÉTERŰ WINKLER-ALAPZATRA RÖGZÍTETT GERENDATARTÓN GÖRDÜLŐ KERÉK FÜGGŐLEGES MOZGÁSVISZONYAINAK ELEMZÉSE

ANALYSIS OF THE VERTICAL MOTION CONDITIONS OF A WHEEL ROLLING ON A BEAM FIXED ON WINKLER-FOUNDATION OF VARIABLE PARAMETERS

Zábori Zoltán, PhD - Zobory István, Dr. Sc. professzor emeritusz

ABSTRACT

This paper deals with the dynamical examination of a complex system model consisting of an elastically supported beam, of a wheel being in rolling contact with the beam through linear vertical contact-spring (Hertzian spring) and damper, and of a mass representing the vehicle superstructure connected with the wheel through vertical suspension spring and damper of linear characteristics. A numerical solution method is introduced for solving the hybrid differential equation system of the dynamical model by using Galerkin's method.

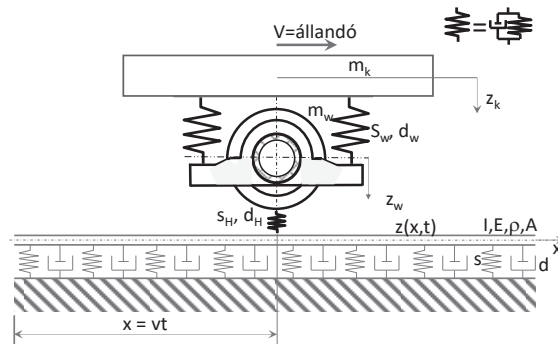
1. BEVEZETÉS

Jelen tanulmány egy felülről lineáris rugón és csillapítón átvitt, függőleges erőhatással terhelt, de pályairányban állandó sebességgel haladó vasúti kerékpár a pálya hosszkoordináta szerint inhomogén merevségű (és csillapítási tényezőjű) *Winkler*-alaplapon fekvő, *Euler-Bernoulli* gerendával modellezett sín párjával Hertz-rugón keresztül megvalósuló rugalmas és disszipatív kapcsolat elemzését tűzte ki célul. A vasúti kerékpár, illetve a sín pár alkotta alrendszerek között a rugalmas és disszipatív kapcsolat modellezése révén a két alrendszer egyetlen dinamikai rendszerként hybrid differenciálegyenlet-rendszerrel kezelhető. A gerendamodell mozgását leíró parciális differenciálegyenletet numerikus úton, Galjorkin közelítő módszerével oldjuk meg [2], így módon a rendszer mozgási viszonyainak meghatározását egy közönséges differenciálegyenlet-rendszer numerikus megoldására vezetjük vissza.

2. HERTZ-RUGÓN KERESZTÜL CSATOLT RENDSZER BEMUTATÁSA

Tekintsük az 1. ábrán látható kötött tömegű dinamikai rendszer modelljét, amely egy felül elhelyezkedő, a kocsiszekerényt modellező tömegből, ahhoz lineárisan rugalmasan és disszipatíván kapcsolódó, a vasúti jármű nyomállványra szerelt kerékpárját reprezentáló merev testből [1], [4], valamint az

ehhez ugyancsak rugalmas és disszipatív Herti kontakton keresztül kapcsolódó, a sín párt modellező, változó merevségű és csillapítású Winkler alapzaton támasztott Euler-Bernoulli gerendából áll.



1. ábra: A vizsgált dinamikai rendszer modellje

A kerékpárra felírható függőleges irányú mozgásegyenlet:

$$m_w \cdot \ddot{z}_w = -F(t) - s_w \cdot (z_w - z_k) - d_w \cdot (\dot{z}_w - \dot{z}_k) + m_w \cdot g \quad (1)$$

ahol m_w a kerékpárt tartalmazó nyomállvány tömege, z_w a függőleges irányú elmozdulása, s_w , illetve d_w a kerékpárt állványhoz kapcsoló lineáris rugók eredő merevsége, illetve csillapítási tényezője, g a nehézségi gyorsulás, $F(t)$ pedig a Hertz-rugón a kerékpárra átható időfüggő függőleges érintkezési (kontakt) erő.

A kocsiszekerényt reprezentáló merev testre felírható mozgásegyenlet:

$$m_k \cdot \ddot{z}_k = +s_w \cdot (z_w - z_k) + d_w \cdot (\dot{z}_w - \dot{z}_k) + m_k \cdot g \quad (2)$$

A sín pár hely- és időfüggő függőleges mozgását pedig az

$$IE \frac{\partial^4 z(x,t)}{\partial x^4} + \rho(x)A \frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial t^2} + d(x) \frac{\partial z(x,t)}{\partial t} + s(x)z(x,t) = F(t)\delta(x - vt) \quad (3)$$

változó együtthatós negyedrendű parciális differenciálegyenlet írja le, ahol IE a sín párt megjelenítő gerenda állandó értékű hajlítási merevsége, $\rho(x)$ gerenda anyagának sűrűsége, A gerenda keresztmetszetének területe, $s(x)$ és $d(x)$ a Winkler alapzat helyfüggő alátámasztási merevsége és csillapítási tényezője ($[s] = \frac{N}{m^2}$, $[d] = \frac{Ns}{m^2}$, $[Q] = \frac{kg}{m^3}$). Pe-

remfeltételként a $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} z(x, t) = 0$ reláció érvényes.

A $v = \text{állandó}$ sebességgel x irányban mozgó kerékpár hosszirányban $\xi = x - vt$ új változó helyettesítésével a $z_s(\xi, t) = z(x - vt, t)$ az alábbi alakot ölti a sínpár függőleges elmozdulását leíró parciális differenciál-egyenlet [2]:

$$IE \frac{\partial^4 z_s(\xi, t)}{\partial \xi^4} + \rho(\xi + vt)A \left[\frac{\partial^2 z_s(\xi, t)}{\partial \xi^2} v^2 - 2 \frac{\partial^2 z_s(\xi, t)}{\partial \xi \partial t} v + \frac{\partial^2 z_s(\xi, t)}{\partial t^2} \right] + d(\xi + vt) \left[\frac{\partial z_s(\xi, t)}{\partial t} - \frac{\partial z_s(\xi, t)}{\partial \xi} v \right] + s(\xi + vt)z_s(x, t) = F\delta(\xi) \quad (4)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} z_s(\xi, t) = 0.$$

Az $F(t)$ a kerékpár-sínpár kapcsolatot modellező lineáris Hertz-rugóban/csillapítóban keletkező rugalmas és disszipatív függőleges kapcsolati erő.

A sínszal függőleges elmozdulására vonatkozó mozgó koordináta-rendszerbeli $z_s(\xi, t)$ megoldást a Galjorkin-módszer szerinti véges tagszámú szorzat-összeg alakban keressük

$$z_s(\xi, t) = \sum_{j=0}^n T_j(t) \cdot \varphi_j(\xi) \quad (5)$$

ahol közelítő megoldással, ahol a $T_j(t), j = 0, 1, 2, \dots, n$ ismeretlen időfüggő együtthatók rendre a $\{\varphi_j(\xi)\}_{j=0}^n$ ortonormált függvényrendszer elemeivel szorzódik. A megfelelő deriválások után az ismertelen $T_j(t)$ függvényekre a következő változó együtthatós lineáris inhomogén közönséges differenciálegyenlet-rendszer adódik:

$$\mathbf{A}(\xi)\underline{\dot{T}}(t) + \mathbf{B}(\xi)\underline{\dot{T}}(t) + \mathbf{C}(\xi)\underline{T}(t) = \underline{F}(t), T \in R^{n+1} \quad (6)$$

A szereplő együttható mátrixokba belépnek az ortonormált függvényrendszer elemeivel képzett skalárszorzatok az alábbi összefüggések szerint:

$$\mathbf{A} = [\rho A S(\varphi_j, \varphi_i)]_{\substack{i=0, \dots, n \\ j=0, \dots, n}}$$

$$\mathbf{B} = [2\rho A v S(\varphi_j, \varphi'_i)]_{\substack{i=0, \dots, n \\ j=0, \dots, n}} + [d S(\varphi_j, \varphi_i)]_{\substack{i=0, \dots, n \\ j=0, \dots, n}}$$

$$\mathbf{C}(\xi) = [IES(\varphi''_j, \varphi''_i) - \rho A v^2 S(\varphi'_j, \varphi'_i) + d S(\varphi_j, \varphi'_i) + S(s(x)\varphi_j, \varphi_i)]_{\substack{i=0, \dots, n \\ j=0, \dots, n}}$$

$$\underline{F}(t) = F(t)[\varphi_0(0), \varphi_1(0), \dots, \varphi_n(0)]^T. \quad (7)$$

Az általunk tárgyalt esetben tekintetbe vett $\varphi_0(\xi), \varphi_1(\xi), \dots, \varphi_n(\xi)$ a, és így lineárisan független ortonormált függvény a $H_k(\xi); k = 0, 1, 2, \dots$ Hermite-polinomokból [10] képzett függvénysorozat első $n+1$ eleme, amelyek alakja:

$$\varphi_k(\xi) = (2^{k-1}(k-1)! \sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} H_{k-1}(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

Az együtthatómátrixok elemeit a fentiekben skalárszorzatokkal jelöltük ki, konkrét kifejtésük pedig az alábbi improprius integrálok segítségével számítható ki:

$$\mathbf{A} \rightarrow \left\{ a_{i,j}^{(1)} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\xi + vt) A \varphi_i(\xi) \varphi_j(\xi) d\xi \right\}$$

$$\mathbf{B} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} b_{i,j}^{(1)} = -2v \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\xi + vt) A \varphi'_i(\xi) \varphi_j(\xi) d\xi \\ b_{i,j}^{(2)} = -v \int_{-\infty}^{\infty} d(\xi + vt) \varphi_i(\xi) \varphi_j(\xi) d\xi \end{array} \right\}$$

$$\mathbf{C} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_{i,j}^{(1)} = IE \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_i^{IV}(\xi) \varphi_j(\xi) d\xi \\ c_{i,j}^{(2)} = v^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\xi + vt) A \varphi_i''(\xi) \varphi_j(\xi) d\xi \\ c_{i,j}^{(3)} = -v \cdot \int_{-\infty}^{\infty} d(\xi + vt) \varphi'_i(\xi) \varphi_j(\xi) d\xi \\ c_{i,j}^{(4)} = \int_{-\infty}^{\infty} s(\xi + vt) \varphi_i(\xi) \varphi_j(\xi) d\xi \end{array} \right\}$$

ahol $a_{i,j} = a_{i,j}^{(1)}$, $b_{i,j} = b_{i,j}^{(1)} + b_{i,j}^{(2)}$, $c_{i,j} = c_{i,j}^{(1)} + c_{i,j}^{(2)} + c_{i,j}^{(3)} + c_{i,j}^{(4)} \forall i, j$ -re és $\mathbf{A} = a_{i,j}$, $\mathbf{B} = b_{i,j}$, $\mathbf{C} = c_{i,j}$, $i = 0, 1, \dots, n, j = 0, 1, \dots, n$.

Az $F(t)$ kapcsolati erőfüggvény a linearizált Hertz-rugóval összekötött kerék-sín kapcsolatból az alábbi összefüggéssel adódik:

$$F(t) = \left[-s_H \cdot (z_s(\xi, t) - z_w(t)) - d_H \cdot \frac{d}{dt} (z_s(\xi, t) - z_w(t)) \right]$$

amelyet részletezve azt kapjuk, hogy

$$F(t) = \left[-s_H \cdot (\underline{T}(t) \cdot \underline{\varphi}(0) - z_w(t)) - d_H \cdot (\underline{\dot{T}}(t) \cdot \underline{\varphi}(0) - v \cdot \underline{T}(t) \cdot \underline{\varphi}'(0) - \dot{z}_w(t)) \right]$$

Tekintettel arra, hogy a nyomállvány-, illetve a sínpár alrendszer együttese teljes rendszert alkot, amelyre külső, explicite időtől függő erőhatás nem működik. Mivel mindkét alrendszer esetében lineáris rendszerrel van dolgunk, kézenfekvő, hogy a két rendszerre vonatkozó mozgásegyenleteket egyetlen egyenletrendszerbe, mégpedig egyetlen, változó együtthatójú, homogén lineáris közönséges differenciálegyenlet-rendszerbe foglaljuk.

Ehhez első lépésben definiáljuk a **szabad koordináták** $\underline{q} = \begin{bmatrix} \underline{T} \\ z_w \\ z_k \end{bmatrix}$ kibővített vektorát. Ekkor az

együtthatómátrixok az alábbi módon alakulnak. Legyen továbbá

$$\mathbf{M}_{(n+1) \times (n+1)}(\xi) = [m_{i,j}], i = 0, 1, \dots, n; j = 0, 1, \dots, n$$

$$[m_{i,j}] = [a_{i,j}], i = 0, 1, \dots, n; j = 0, 1, \dots, n$$

$$[m_{n+2, n+2}] = m_w$$

$$[m_{n+3, n+3}] = m_k$$

$$\mathbf{D}_{(n+1) \times (n+1)}(\xi) = [d_{i,j}], i = 0, 1, \dots, n; j = 0, 1, \dots, n$$

$$[d_{i,j}] = [b_{i,j}] - d_H \cdot \underline{\varphi}(0) \cdot \underline{\varphi}^T(0), i = 0, 1, \dots, n; j = 0, 1, \dots, n$$

$$\mathbf{S}_{(n+1) \times (n+1)}(\xi) = [s_{i,j}], i = 0, 1, \dots, n; j = 0, 1, \dots, n, n+1, n$$

$$[s_{i,j}] = [c_{i,j}] - s_H \cdot \underline{\varphi}(0) \cdot \underline{\varphi}^T(0) + v \cdot d_H \cdot \underline{\varphi}'(0) \cdot \underline{\varphi}^T(0), i = 0, 1, \dots, n; j = 0, 1, \dots, n$$

ahol a $z_s(\xi, t)$ teljes deriváltja lép be:

$$\frac{d}{dt}[z_s - z_w] = \frac{\partial z_s}{\partial t} + \frac{\partial z_s}{\partial x} \cdot v - \frac{dz_w}{dt}$$

és

$$\underline{\varphi}(0) = \begin{bmatrix} \varphi_0(0) \\ \varphi_1(0) \\ \varphi_2(0) \\ \vdots \\ \varphi_n(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{továbbá} \quad s_{i,n+2} &= -s_H \cdot \underline{\varphi}(0), i = 0, 1, \dots, n, \\ s_{n+2,j} &= -s_H \cdot \underline{\varphi}^T(0), j = 0, 1, \dots, n, \quad s_{n+2,n+2} = \\ &= s_H + s_w, \quad s_{n+2,n+3} = -s_w, \quad s_{n+3,n+2} = -s_w, \\ s_{n+3,n+3} &= 2s_w \quad \text{és} \quad d_{i,n+2} = -d_H \cdot \underline{\varphi}(0), i = \\ &= 0, 1, \dots, n, \quad d_{n+2,j} = d \cdot \underline{\varphi}^T(0), j = 1, 1, \dots, n, \\ d_{n+2,n+2} &= d_H + d_w, \quad d_{n+2,n+3} = -d_w, \quad d_{n+3,n+2} = \\ &= -d_w, \quad d_{n+3,n+3} = 2d_w. \end{aligned}$$

A megoldandó változó együtthatós másodrendű homogén lineáris differenciálegyenlet az alábbi formát ölti:

$$\mathbf{M}(\xi)\ddot{\underline{q}}(t) + \mathbf{D}(\xi)\dot{\underline{q}}(t) + \mathbf{S}(\xi)\underline{q}(t) = \underline{0} \quad (8)$$

amelyet a változó együtthatóra tekintettel – esztünkben numerikusan oldunk meg adott kezdeti érték-vektor mellett.

A kezdeti értékek meghatározása

$$\text{Legyen adott a } z_s(\xi, t) = \sum_{j=0}^n T_j(t) \cdot \varphi_j(\xi) \quad (5 \quad 4)$$

szerinti megoldásfüggvény és annak idő szerinti deriváltja a $t = 0$ időpontban, azaz legyen adott a

$$z_s(\xi, t = 0) = \sum_{j=0}^n T_j(t = 0) \varphi_j(\xi) = z_{s0} \quad \text{adott,}$$

illetve az $\dot{z}_{s0}(\xi) = \frac{\partial}{\partial t} z_s(\xi, t = 0) = \sum_{j=0}^n [\dot{T}_j(t = 0) \varphi_j(\xi) - v \cdot T_j(t = 0) \varphi'_j(\xi)]$. Átírva vektoros formába a fenti kifejezéseket azt kapjuk, hogy

$$z_{s0}(\xi) = \underline{T}(0) \cdot \underline{\varphi}(\xi), \quad \text{illetve} \quad \dot{z}_{s0}(\xi) = \underline{\dot{T}}(0) \cdot \underline{\varphi}(\xi) - v \cdot \underline{T}(0) \cdot \underline{\varphi}'(\xi).$$

Ebből a $\underline{T}(0)$, illetve $\underline{\dot{T}}(0)$ meghatározása az alábbi módon lehetséges: szorozzuk $\underline{\varphi}^T(\xi)$ -vel a fenti egyenletet

$$z_{s0}(\xi) \cdot \underline{\varphi}^T(\xi) = \underline{T}(0) \cdot \underline{\varphi}(\xi) \cdot \underline{\varphi}^T(\xi)$$

majd a jobboldalon előálló mátrix inverzével (ha ez létezik) ismét megszorozzuk az egyenletet:

$$\underline{T}(0) = \left[\underline{\varphi}(\xi) \cdot \underline{\varphi}^T(\xi) \right]^{-1} \cdot \underline{\varphi}^T(\xi) \cdot z_{s0}(\xi)$$

Hasonlóképpen a kezdeti feltétel másik komponense, az elmozdulásfüggvény első deriváltja az alábbi eljárással számítható ki:

$$\dot{z}_{s0}(\xi) \cdot \underline{\varphi}^T(\xi) = \underline{\dot{T}}(0) \cdot \underline{\varphi}(\xi) \cdot \underline{\varphi}^T(\xi) - v \cdot \underline{T}(0) \cdot \underline{\varphi}'(\xi) \cdot \underline{\varphi}^T(\xi),$$

amelyet a $\left[\underline{\varphi}(\xi) \cdot \underline{\varphi}^T(\xi) \right]^{-1}$ inverzmátrix-szal beszorozást követően a következő egyenletet kapjuk:

$$\begin{aligned} \underline{\dot{T}}(0) &= \left[\underline{\varphi}(\xi) \cdot \underline{\varphi}^T(\xi) \right]^{-1} \cdot \underline{\varphi}^T(\xi) \cdot \dot{z}_{s0}(\xi) + \\ &+ v \cdot \left[\underline{\varphi}'(\xi) \cdot \underline{\varphi}^T(\xi) \right] \cdot \left[\underline{\varphi}(\xi) \cdot \underline{\varphi}^T(\xi) \right]^{-1} \cdot \underline{T}(0) \end{aligned}$$

A fent bemutatott eljárás többletű rendszer esetében is alkalmazható.

Az állapotér az alábbi módon írható fel:

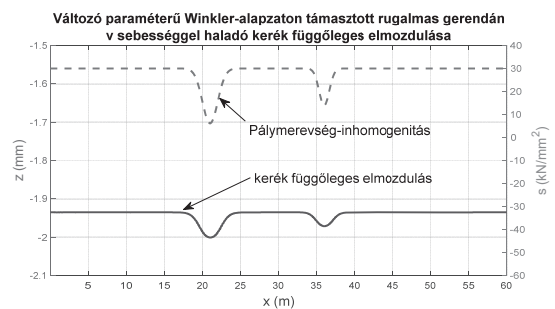
$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} \underline{\dot{T}} \\ \underline{\dot{z}}_w \\ \underline{\dot{z}}_k \\ \underline{T} \\ z_w \\ z_k \end{bmatrix}, \in R^{2(n+3)}$$

és $\dot{\underline{Y}} = \Phi(\underline{Y})$, valamint $\underline{Y}(0) = \underline{Y}_0$. Fenti differenciálegyenlet-rendszer közelítő megoldása előállítható alkalmasan választott numerikus módszerrel, például Euler módszerével:

$$\underline{Y}(t_{i+1}) = \underline{Y}(t_i) + \Phi(\underline{Y}(t_i)) \cdot \Delta t.$$

3. SZÁMÍTÁSI EREDMÉNYEK

A 2. ábrán az 1. ábra szerinti modell csapágytokra számított függőleges elmozdulását ábrázoltuk egy előre adott pályamerevség inhomogenitáson adott állandó v sebességgel történő áthaladás esetére.



2. ábra: A kerék függőleges elmozdulása és a pályamerevség alakulása

A 2. ábrán bemutatott szimulációs számítási eredmény egy hybrid (kontinuum és diszkrét) alrendszerből álló vasúti pálya-jármű rendszer mozgásfolyamatait mutatja az idő függvényében a fentiekben bemutatott Galjorkin-féle módszer segítségével. A szimuláció során előre adott pályamerevség-inhomogenitás függvény esetében $v = 120 \text{ km/h}$ sebességgel mozgó, rugalmasan befogott kerékpár csapágytokjára számított függőleges elmozdulás-befutott út függvényét ábrázoltuk.

A kerékpár tömege $m_w = 1300 \text{ kg}$, Hertz-rugó merevsége: $s_H = 2 \cdot 450 \cdot 10^6 \text{ N/m}$, csillapítási tényezője a kerék-járműrés kéttömegű rendszer kritikus csillapításának 1%-a, $d_H = 0,264 \text{ kNs/mm}$.

A kerékpárt felülről $s_w = 2 \cdot 1 \text{ kN/mm}$ merevségű rugón keresztül a kocsiszekrény vizsgált kerékpárra eső része terheli (17000 kg). Ily módon a sínparra – a vágányra

$$F = m_k \cdot g + m_w \cdot g \approx 180 \text{ kN}$$

($g = 9,81 \text{ m/s}^2$) állandó nagyságú súlyerő működik.

Az ábrából leolvasható, hogy a kerékpár csapágyok függőleges statikus elmozdulása 1,93 mm –re adódik, míg az inhomogén (lecsökkenő) pályamelevségi helyeken való áthaladáskor ez 2 mm-re növekszik, amely merevség-inhomogenitás parametrikus gerjesztésként azonosítható.

A módszer alkalmazása során lehetővé vált a hibrid rendszer két alrendszerének rugalmas és disszipatív kapcsolatával (jelen esetben Hertz-rugóval és csillapítóval) meghatározott csatolás erőátadási és mozgás folyamatainak numerikus kezelése.

4. IRODALOM

- [1] Destek, M.: A vasúti pálya-jármű rendszer kölcsönhatásának vizsgálata rendszerelméleti megközelítésben. Közlekedéstudományi Szemle, Budapest, 1974. No. 6, p.271-276.
- [2] Kisilowski, J. - Sowinski, B.: Problems of Simulating Vehicle Motion by Mathematical Models. In: Advanced Railway Vehicle System Dynamics, (Ed. by Prof. J. Kisilowski and Prof. K. Knothe), Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warsaw, 1991., p.93-139.
- [3] Zobory, I. - Zábóri, Z.: Track Qualification Method and Its Realisation Based on System Dynamics, Proceedings of the 5th Mini Conference on Vehicle System Dynamics, Identification and Anomalies, VSDIA 1996, (Ed. by Prof. I. Zobory). BME Department of Railway Vehicles, Budapest, 1997, p.173-181.
- [4] Zobory, I. – Békefi, E. - Zábóri, Z.: Simulation Backed Identification of Vertical Track Stiffness Functions by Using Wavelets, Proceedings of the 6th Mini Conference on Vehicle System Dynamics, Identification and Anomalies, VSDIA 1998, (Ed. by Prof. I. Zobory). BME Department of Railway Vehicles, Budapest, 1998, p.151-159. (ISBN:963 420 635 2)
- [5] Zobory, I: A vasúti pálya-jármű rendszer dinamikája - mérése - minősítése. Közlekedéstudományi Szemle, Budapest, 2015, No1, p.6-18.
- [6] Zábóri, Z.: Dynamics with Longitudinally Varying Track Stiffness Proceedings of the 9th Mini Conference on Vehicle System Dynamics, Identification and Anomalies, VSDIA 2004, (Ed. by Prof. I. Zobory). BME Department of Railway Vehicles, Budapest, 2006. p.119-126. (ISBN:963 420 875 4)
- [7] Zábóri, Z.: Vasúti pályaminősítő eljárás továbbfejlesztett rendszerdinamikai szimuláción alapuló paraméteridentifikációval. Tanulmányok a vasúti járművek és a járműrendszeranalízis témaköreiből, Öt Évszak Kft., Budapest, 2019, p.144-151.
- [8] Zobory, I. - Zoller, V. - Zábóri, Z.: Time Domain Analysis of a Railway Vehicle Running on a Discretely Supported Continuous Rail Model at a Constant Velocity, Z. angew. Math. Mech. 76, S4 (1996), p.169-172.
- [9] Zobory, I. - Zoller, V.: Dynamic Response of a Periodically Supported Railway Track in case of a Moving Complex Phasor Excitation, Progress in Industrial Mathematics at ECMI 96. (Edited by Morten Brøns, Martin Philip Bendsøe and Mads Peter Sørensen)B.G. Teubner Stuttgart, p.85-92.
- [10] <https://hu.wikipedia.org/wiki/Hermitepolinomok>