

# HOSSZIRÁNYBAN MOZGÓ, ÁLLANDÓ NAGYSÁGÚ FÜGGŐLEGES ERŐVEL TERHELT VÁLTOZÓ MEREVSÉGŰ ÉS CSILLAPÍTÁSÚ WINKLER-ALAPZATHOZ RÖGZÍTETT GERENDATARTÓ DINAMIKÁJA

## DYNAMICS OF A BEAM SUPPORTED BY A WINKLER FOUNDATION OF VARIABLE STIFFNESS AND DAMPING LOADED BY A LONGITUDINALLY MOVING VERTICAL STEADY FORCE

Zábori Zoltán, PhD - Zobory István, Dr. Sc. professzor emeritusz

### ABSTRACT

This paper deals with an approximate computation method for simulating the vertical displacement of an elastically supported Euler-Bernoulli beam on an inhomogeneous parameter Winkler foundation loaded by a longitudinally moving vertical steady force. The elaborated numerical solution is based on the Galerkin-method.

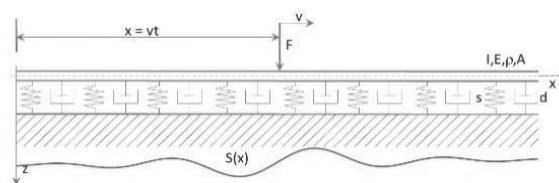
### 1. BEVEZETÉS

Jelen tanulmány egy pályairányban időben állandó sebességgel haladó és állandó nagyságú függőleges erőhatással terhelt, a hosszkoordináta szerint inhomogén merevségű és csillapítási tényezőjű *Winkler*-alapzatra erősített *Euler-Bernoulli* gerenda dinamikai elemzését tűzte ki célul. A kialakított modell a vasúti pálya-jármű rendszer dinamikai folyamatainak elemzéséhez szolgáltató előzetes megoldást. A gerendamodell mozgását leíró parciális differenciálegyenletet numerikus úton, első lépésben időfüggetlen függőleges irányú és sínpárt reprezentáló gerendán tovahaladó erőterhelés alkalmazásával oldjuk meg. Célunk a vizsgált inhomogén paraméteres alátámasztású gerendamodell parciális differenciálegyenletének a Galjorkin-féle numerikus közelítő módszerrel való megoldása a nyomvezetéses gépészeti rendszerek általános kezelésének megalapozásához.

### 2. A GERENDATARTÓ MOZGÁSEGYENLETÉNEK MEGOLDÁSA

A gerendamodell vizsgálatát motiváló vasúti vágány egyszerűsített dinamikai modelljét az 1. ábra mutatja. Itt az  $x$  helykoordináta szerint változó merevségi (esetleg csillapítási) paraméterrel bíró, azaz inhomogén *Winkler*-alapzatra erősített sínpár, és az

ezen  $v = \text{állandó}$  sebességgel tovagördülő kerékpár függőleges kerékereje, az  $F$  erő jelenik meg. A rendszermodell matematikai leírása egy változó együtthatójú, negyedrendű lineáris inhomogén parciális differenciálegyenlettel történik [1]. Az egyenlet megoldására Galjorkin közelítő módszerét alkalmazzuk.



1. ábra A változó alátámasztási merevségű sínpár alkotta gerendán  $v$  sebességgel haladó  $F$  kerékterhelés

Állandó  $v$  sebességgel haladó és időben állandó  $F$  függőleges terhelőerő esetén az  $s(x)$  inhomogén merevségű *Winkler*-alapzathoz kapcsolódó gerenda ismertetlen  $z(x, t)$  függőleges kitérésére felírt parciális differenciálegyenlet az 1. ábra szerinti  $\{x, t\}$  koordinátarendszerben az

$$IE \frac{\partial^4 z(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial t^2} + d \frac{\partial z(x, t)}{\partial t} + s(x)z(x, t) = F(t)\delta(x - vt) \quad (1)$$

alakot ölti, ahol  $I$  a sínpárt megjelenítő gerenda keresztmetszetének a hajlítás tengelyére vett másodrendű nyomatéka,  $E$  a sín-gerenda anyagának rugalmassági modulusza,  $A$  a sín-gerenda keresztmetszeti felülete,  $\rho$  a sín-gerenda anyagának sűrűsége,  $d$  a támasztó feltér hosszegységre eső csillapítási tényezője ( $[d] = \frac{Ns}{m^2}$ ),  $s$  a támasztó feltér hosszegységre eső merevsége ( $[s] = \frac{N}{m^2}$ ),  $F$  a konstans sebességgel tovamozgó állandó nagyságú függőleges erő, míg  $\delta$  a Dirac-féle disztribúciót [8] jelöli. A feladat megoldásához

dásához célszerű áttérni az  $x$  irányban (vízszintesen)  $v$ -állandó sebességgel mozgó  $\{\xi, t\}$  koordinátarendszerre a  $\xi = x - vt$  új változó bevezetésével. Ekkor az ismeretlen függőleges gerendakitérés függvény a mozgó koordinátarendszerben a  $z_s(\xi, t)$  jelöléssel jelentkezik. Ekkor az (1) parciális differenciálegyenlet az alábbi alakot nyeri [2], [4], [5], [7]:

$$IE \frac{\partial^4 z_s}{\partial \xi^4} + \rho A (v^2 \frac{\partial^2 z_s}{\partial \xi^2} - 2v \frac{\partial^2 z_s}{\partial \xi \partial t} + \frac{\partial^2 z_s}{\partial t^2}) + d (\frac{\partial z_s}{\partial t} - v \frac{\partial z_s}{\partial \xi}) + s(\xi + vt, t) z_s = F \delta(\xi). \quad (2)$$

A gerenda mozgására vonatkozó két peremfeltétel:

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} z_s(\xi, t) = 0. \quad (3)$$

### 3. AZ INHOMOGÉN WINKLER ALAPZATRA ERŐSÍTETT GERENDAMODELL EGYENLETÉNEK KÖZELÍTŐ MEGOLDÁSA

Vezessük be a gerenda hossza mentén értelmezett legalább kétszer folytonosan differenciálható egyváltozós  $\varphi(\xi)$  függvényt, amely a teljes számegyenesen négyzetesen integrálható és kielégíti a (3) peremfeltételeket.

Ismeretes, hogy a  $(-\infty, \infty)$  intervallumon értelmezett, a (3) peremfeltételeket kielégítő és négyzetesen integrálható  $f(\xi)$  és  $g(\xi)$  függvény  $S(f, g)$  skalár szorzatát az alábbi impropius integrál kifejezés definiálja [3], [9]:

$$S(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) g(\xi) d\xi. \quad (4)$$

Első lépésként tegyük fel, hogy a  $z_s(\xi, t)$  valóban megoldása a (2) parciális differenciálegyenletnek és szorozzuk meg skalárisan a megoldandó (2) egyenlet mindkét oldalát a most bevezetett tulajdonságú  $\varphi(\xi)$  függvénnyel. Ekkor az

$$S(IE \frac{\partial^4 z_s}{\partial \xi^4} + \rho A (v^2 \frac{\partial^2 z_s}{\partial \xi^2} - 2v \frac{\partial^2 z_s}{\partial \xi \partial t} + \frac{\partial^2 z_s}{\partial t^2}) + d (\frac{\partial z_s}{\partial t} - v \frac{\partial z_s}{\partial \xi}) + s(\xi + vt) z_s, \varphi(\xi)) = S(F \delta(\xi), \varphi(\xi)). \quad (5)$$

$t$ -paraméteres algebrai egyenletet kapjuk. Az egyenlet bal oldalán a skaláris szorzás első tényezőbeli linearitását alkalmazva a következő alakra jutunk:

$$\begin{aligned} & IES \left( \frac{\partial^4 z_s}{\partial \xi^4}, \varphi(\xi) \right) + \rho A v^2 S \left( \frac{\partial^2 z_s}{\partial \xi^2}, \varphi(\xi) \right) \\ & - 2\rho A v S \left( \frac{\partial^2 z_s}{\partial \xi \partial t}, \varphi(\xi) \right) + \\ & + \rho A S \left( \frac{\partial^2 z_s}{\partial t^2}, \varphi(\xi) \right) + d S \left( \frac{\partial z_s}{\partial t}, \varphi(\xi) \right) - \\ & - d v S \left( \frac{\partial z_s}{\partial \xi}, \varphi(\xi) \right) + S(s(\xi + vt) z_s, \varphi(\xi)) = \\ & = S(F \delta(\xi), \varphi(\xi)) \quad (6) \end{aligned}$$

A további tárgyalásunkhoz fontos tény, hogy a skalár szorzatot jelentő impropius integrálokban az

integrandusbeli  $\xi$  szerinti parciális deriváltak átalkathatók, éspedig a parciális integrálás szabályának alkalmazásával. Könnyen beláthatóak az alábbi deriválás áttolási összefüggések:

- 1)  $IES \left( \frac{\partial^4 z_s(\xi, t)}{\partial \xi^4}, \varphi(\xi) \right) = IE \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^4 z_s(\xi, t)}{\partial \xi^4} \varphi(\xi) d\xi = IE \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 z_s(\xi, t)}{\partial \xi^2} \frac{d^2 \varphi(\xi)}{d\xi^2} d\xi$
- 2)  $\rho A v^2 S \left( \frac{\partial^2 z_s(\xi, t)}{\partial \xi^2}, \varphi(\xi) \right) = \rho A v^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 z_s(\xi, t)}{\partial \xi^2} \varphi(\xi) d\xi = -\rho A v^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial z_s(\xi, t)}{\partial \xi} \frac{d\varphi(\xi)}{d\xi} d\xi$
- 3)  $-2\rho A v S \left( \frac{\partial^2 z_s(\xi, t)}{\partial \xi \partial t}, \varphi(\xi) \right) = -2\rho A v \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 z_s(\xi, t)}{\partial \xi \partial t} \varphi(\xi) dx = 2\rho A v \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial z_s(\xi, t)}{\partial t} \frac{d\varphi(\xi)}{d\xi} d\xi$
- 4)  $-d v S \left( \frac{\partial z_s(\xi, t)}{\partial \xi}, \varphi(\xi) \right) = -d v \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial z_s(\xi, t)}{\partial \xi} \varphi(\xi) d\xi = d v \int_{-\infty}^{\infty} z_s(\xi, t) \frac{d\varphi(\xi)}{d\xi} d\xi$

Vizsgáljuk most azon skalár szorzatokat, amelyekben az ismeretlen  $z_s(\xi, t)$  függvény vagy annak a  $t$  idő szerinti parciális deriváltjai fordulnak elő a következő jelölések bevezetésével:

$$a(t) = \rho A S \left( \frac{\partial^2 z_s(\xi, t)}{\partial t^2}, \varphi(\xi) \right), \quad (7)$$

$$b(t) = S \left( \frac{\partial z_s(\xi, t)}{\partial t}, \varphi(\xi) \right) + 2\rho A v \frac{d\varphi(\xi)}{d\xi}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} c(t) = & IES \left( \frac{\partial^2 z_s(\xi, t)}{\partial \xi^2}, \frac{d^2 \varphi(\xi)}{d\xi^2} \right) - \\ & - \rho A v^2 S \left( \frac{\partial z_s(\xi, t)}{\partial \xi}, \frac{d\varphi(\xi)}{d\xi} \right) + \\ & + S(z_s(\xi, t), s\varphi(\xi + vt)) + d v \frac{d\varphi(\xi)}{d\xi}. \quad (9) \end{aligned}$$

Fentiek alapján a (2) differenciálegyenlet mindkét oldalán a  $\varphi(\xi)$  függvénnyel vett skalár szorzatát tekintjük. A jobb oldalon  $S(F \delta(\xi), \varphi(\xi)) = F \varphi(0)$  eredmény írható, ugyanis a skalár szorzat dménye:  $\int_{-\infty}^{\infty} F \delta(\xi) \cdot \varphi(\xi) d\xi = F \varphi(0)$ . Végül is, ha  $z_s(\xi, t)$  az (5) egyenlet megoldása, akkor az

$$a(t) + b(t) + c(t) = F \varphi(0) \quad (10)$$

időfüggő algebrai egyenlőségnek minden  $t$  időpontban fenn kell állnia.

Az előzőekben a szerepeltetett  $\varphi(\xi)$  függvényről a legalább kétszeri folytonos differenciálhatóság és a  $(-\infty, +\infty)$  intervallumon fennálló négyzetes integrálhatóság Ez a követelmény igen sok, eltérő szerkezetű függvénnyel kielégíthető. Temészetes, hogy valamely a differenciálhatósági feltételnek és a

négyszetes integrálhatósági feltételnek megfelelő, továbbá a bevezetett skalárszorzatra nézve ortonormált  $\{\varphi_i(\xi)\}_{i=1}^{\infty}$  függvényrendszer elemei megfelelnek a feltételeknek. Ismeretes, hogy *ortonormált* függvénysorozat esetén a sorozatból vett tetszőleges függvénpár mellett a skalár szorzatokra kapott szám teljesíti a megadott

$$S(\varphi_i(\xi), \varphi_j(\xi)) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{if } i \neq j \\ 1 & \text{if } i = j \end{cases} \quad (11)$$

tulajdonságot, ahol  $\delta_{ij}$  Kronecker-féle szimbólum. Megjegyezzük, hogy ha a két függvény ortonormált, akkor azok lineárisan függetlenek is.

#### 4. NUMERIKUS MEGOLDÁS GALJORKIN MÓDSZERÉVEL

Az inhomogén Winkler alapzathoz kapcsolt gerendaként modellezett vasúti pályának a mozgó kerék-pár okozta  $F$  pályamenti időfüggő helyzetéhez kötött,  $v$  sebességgel mozgó koordináta-rendszerben a kialakuló függőleges  $z_s(\xi, t)$  kitéréseit a (2) parciális differenciálegyenlet írja le. A támasztómező pályahossz-menti függőleges merevségének  $s(x)$  inhomogenitása alkalmas szerkezetű alapfüggvény eltolási, dilatációs és amplitudóbeállítási transzformációs paraméterek rendszerével építhető be a modell differenciálegyenletébe. A (2) egyenlet numerikus közelítő megoldásával azt határozzuk meg, hogy a kiinduláskor a szimulációban tekintetbe vett pályamerevség paraméterek mellett a sín gerenda  $\xi = 0$  helyei függőleges kitérése miképp alakul.

Jelen tárgyalásunkban rögzített paraméterekkel bíró támasztómerevség függvény esetére vizsgáljuk a parciális differenciálegyenlet numerikus közelítő megoldását. A megoldás során alapvetően támaszkodunk a 3. pontban bemutatott eljárásra, miszerint az  $n$ -számú különböző, a peremfeltételeknek eleget tevő legalább kétszer folytonosan differenciálható  $\varphi_i(\xi)$  függvényekkel a (2) parciális differenciálegyenlet mindkét oldalát sorozatosan skalárisan megszorozzuk a (4)-szerinti skalárszorzat definíció alkalmazásával. Így  $n$ -számú  $t$ -függő algebrai egyenletet nyerünk. Az  $n$ -számú függvénynek egy *ortonormált*  $\varphi_1(\xi), \varphi_2(\xi), \dots, \varphi_n(\xi)$  függvénysorozat első  $n$ -függvényét célszerű választani. Ismeretes, hogy az ortonormált függvénysorozat elemei lineárisan függetlenek is, így ez a véges indexig tekintett függvénysorozat az ismeretlen  $z_s(\xi, t)$   $L_2$  függvényterbéli konstrukciójához közelítő ortonormált bázist szolgáltat.

Galjorkin módszere szerint a (3) peremfeltételeket kielégítő, ortonormált és így egyben lineárisan független elemű  $\varphi_1(\xi), \varphi_2(\xi), \dots, \varphi_n(\xi)$  függvények (a bázisfüggvények) rendszerét felhasználva a gerenda differenciálegyenletének közelítő megoldását a bázisfüggvények *egyelőre határozatlan időfüggést mutató együtthatójú lineáris kombinációja* alakjában állítjuk elő:

$$z_s(\xi, t) = \sum_{j=1}^n T_j(t) \varphi_j(\xi). \quad (12)$$

Ezt a hipotetikus megoldásformát (*Ansatz*-ot) a szükséges parciális deriválások elvégzése után behelyettesítjük a korábban nyert azon  $n$ -számú algebrai egyenletbe, amelyeket a differenciálegyenlet mindkét oldalának a  $\varphi_1(\xi), \varphi_2(\xi), \dots, \varphi_n(\xi)$  függvényekkel való sorozatos skaláris szorzásával a (10) szerinti alakban állítottunk elő.

A szükséges behelyettesítések és a (11) ortogonalitási feltételek figyelembe vételével az  $n$  számú eddig határozatlan  $T_1(t), T_2(t), \dots, T_n(t)$  együttható függvényre egy másodrendű közönséges differenciálegyenlet-rendszerre vonatkozó kezdeti érték probléma adódik, amely numerikusan megoldható:

$$\sum_{j=1}^n [\ddot{T}_j(t) a_{ij} + \dot{T}_j(t) b_{ij} + T_j(t) c_{ij}(x)] = F \varphi_i(0), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

$$T_j(t_0) = T_{j0}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (13)$$

A továbbiakban a kapott (13) közönséges, lineáris, változó együtthatós differenciálegyenlet-rendszert (DER) mátrixegyütthatós alakban írjuk fel:

$$\mathbf{A} \ddot{\underline{T}}(t) + \mathbf{B} \dot{\underline{T}}(t) + \mathbf{C}(t) \underline{T}(t) = \underline{F}. \quad (14)$$

A szereplő együttható mátrixok a bázisfüggvényrendszer elemeiből és azok derivált függvényei skalár szorzataiból felépülő elemekkel, valamint egyes skalár szorzatokba beépülő pályamerevség inhomogenitási függvénnyel vannak meghatározva:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= [\rho A S(\varphi_j, \varphi_i)]_{i=1, \dots, n}^{j=1, \dots, n} \\ \mathbf{B} &= [2\rho A v S(\varphi_j, \varphi'_i)]_{i=1, \dots, n}^{j=1, \dots, n} + [dS(\varphi_j, \varphi_i)]_{i=1, \dots, n}^{j=1, \dots, n} \\ \mathbf{C}(t) &= [IES(\varphi''_j, \varphi''_i) - \rho A v^2 S(\varphi'_j, \varphi'_i) \\ &\quad + dS(\varphi_j, \varphi'_i) + S((\xi \\ &\quad + vt)\varphi_j, \varphi_i)]_{i=1, \dots, n}^{j=1, \dots, n} \\ \underline{F} &= F[\varphi_1(0), \varphi_2(0), \dots, \varphi_n(0)]^T. \end{aligned}$$

A keresett  $T_1(t), T_2(t), \dots, T_n(t)$  időfüggő együttható függvények rendszerét a (14) közönséges differenciálegyenlet-rendszerre vonatkozó kezdeti érték probléma numerikus megoldásával nyerjük.

A tekintetbe vett  $\varphi_1(\xi), \varphi_2(\xi), \dots, \varphi_n(\xi)$  függvények egy ortonormált függvénysorozat első elemei. Számos vizsgálat tapasztalata azt mutatja, hogy célszerű a *Hermite*-polinomokból (<https://hu.wikipedia.org/wiki/Hermite-polinomok>) kiindulni [9]. A *Hermite*-polinomok generálására az alábbi képzési utasítás szolgál:

$$H_n(\xi) \stackrel{def}{=} (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} (e^{-\xi^2}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Ismeretes, hogy a *Hermite*-polinomok a  $\rho(\xi) = e^{-\xi^2}$  súlyfüggvényre nézve ortogonális függvényrendszert alkotnak, azaz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_i(\xi) H_j(\xi) \rho(\xi) d\xi = 0, \quad \text{ha } i \neq j.$$

Az  $n$ -edik Hermite-polinom norma-négyzetére érvényes, hogy:

$$\|H_n(\xi)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} [H_n(\xi)]^2 d\xi = 2^n n! \sqrt{\pi},$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

A továbbiakban célszerű a súlyfüggvény nélküli skalár szorzatos tárgyalást lehetővé tenni. Tekintettel az  $e^{-\xi^2} = e^{-\frac{\xi^2}{2}} e^{-\frac{\xi^2}{2}}$  összefüggésre a  $\left\{H_n(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}}\right\}_{n=0}^{\infty}$

ortogonális függvény rendszer a normával való osztás után az ortonornáltság követelményét kielégítő új formájú

$$\varphi_n(\xi) = (2^{n-1} (n-1)! \sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} H_{n-1}(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}},$$

$$n = 1, 2, \dots$$

ortonormált függvénysorozat adódik, mivel érvényes, hogy a fenti  $\{\varphi_i(\xi)\}_{i=1}^{\infty}$  függvény sorozat elemeire fennáll, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(\xi) \varphi_m(\xi) d\xi = \delta_{nm},$$

ahol  $\delta_{nm}$  a Kronecker-szimbólum. A most kimutatott ortonormáltságból következik, hogy a  $\{\varphi_i(\xi)\}_{i=1}^{\infty}$  függvénysorozat elemei lineárisan függetlenek is a  $(-\infty, +\infty)$  intervallumon négyzetesen integrálható függvények lineáris terében.

Kimutatható [1] szerint  $\{\varphi_i(\xi)\}_{i=1}^{\infty}$  függvényorozat elemei kielégítik az alábbi

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \varphi_{n+1}(\xi) - \xi \varphi_n(\xi) + \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \varphi_{n-1}(\xi) = 0,$$

rekurzív egyenletrendszert, vagy átalakítás után az

$$x^2 \varphi_n(\xi) = \frac{1}{2} [(n+1)(n+2)]^{\frac{1}{2}} \varphi_{n+2}(\xi) + (2n+1) \varphi_n(\xi) + [n(n-1)]^{\frac{1}{2}} \varphi_{n-2}(\xi).$$

rekurzív egyenletrendszert. A fentiekén túl érvényes még a  $\{\varphi_i(\xi)\}_{i=1}^{\infty}$  függvénysorozat elemeinek első és második deriváltjainak magukkal a  $\{\varphi_i(\xi)\}_{i=1}^{\infty}$  elemeivel való kifejezését megadó rekurzív egyenlet pár:

$$\varphi_n'(\xi) = \sqrt{2n} \varphi_{n-1}(\xi) - x \varphi_n(\xi),$$

$$\varphi_n''(\xi) = (\xi^2 - 2n - 1) \varphi_n(\xi).$$

A fenti kifejezésekből a már bemutatott skalár szorzatos kifejezések érvényesítésével meghatározhatjuk a korábban bevezetett  $\mathbf{A}$  tömeg,  $\mathbf{B}$  csillapítási és  $\mathbf{C}$  merevségi mátrixokat könnyen adódik, hogy:

$$\mathbf{A} = \rho \mathbf{A} \mathbf{E},$$

ahol  $\mathbf{E}$   $n \times n$  méretű egységmátrix.

A  $\mathbf{B}$  csillapítási mátrix konstans elemű tridiagonális mátrix, ennek elemeit az alábbi módon számíthatjuk ki:

$$b_{i,i} = 2\sqrt{2i} \rho A v + d, \quad b_{i,i-1} = -\sqrt{2i} \rho A v,$$

$$b_{i,i+1} = -\sqrt{2(i+1)} \rho A v.$$

A  $\mathbf{C}$  merevségi mátrix előállításához három rész mátrixból tevődik össze:

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}^{(1)} + \mathbf{C}^{(2)} + \mathbf{C}^{(3)},$$

A  $\mathbf{C}^{(1)}$  és  $\mathbf{C}^{(2)}$  mátrixok csak konstans elemeket tartalmaznak. A  $\mathbf{C}^{(1)} = [c_{i,j}^1]$  mátrix elemeit a következő képletek szolgáltatják:

$$c_{i,i-4}^1 = \frac{IE}{4} [i(i-1)(i-2)(i-3)]^{\frac{1}{3}},$$

$$c_{i,i-2}^1 = -\frac{IE}{2} (2i-1) [(i(i-1))]^{\frac{1}{2}},$$

$$c_{i,i}^1 = \frac{3IE}{4} (2i^2 + 2i + 1),$$

$$c_{i,i+2}^1 = -\frac{IE}{2} (2i+3) [(i+1)(i+2)]^{\frac{1}{2}},$$

$$c_{i,i+4}^1 = \frac{IE}{4} [(i+1)(i+2)(i+3)(i+4)]^{\frac{1}{2}}.$$

A  $\mathbf{C}^{(2)} = [c_{i,j}^2]$  mátrix elemeit a következő adják meg:

$$c_{i,i-2}^2 = -\frac{\rho A v^2}{2} [i(i-1)]^{\frac{1}{2}},$$

$$c_{i,i}^2 = \frac{\rho A v^2}{2} (2i+1),$$

$$c_{i,i+2}^2 = -\frac{\rho A v^2}{2} [(i+1)(i+2)]^{\frac{1}{2}}.$$

A sínpárt alátámasztó félteret jellemző támasztó  $s(\xi)$  merevség inhomogenitását behozó  $\mathbf{C}^{(3)} = [c_{i,j}^3]$  mátrix elemei a következő integrálkifejezésekkel meghatározottak

$$c_{i,j}^3(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\xi + vt) \varphi_i(\xi) \varphi_j(\xi) d(\xi).$$

A (14) közönséges lineáris differenciálegyenlet-rendszer az  $\mathbf{A}$  tömegmátrix, a  $\mathbf{B}$  csillapítási mátrix és  $\mathbf{C}(t)$  merevségi mátrixfüggvény ismeretében numerikusan megoldható.

A (14) közönséges differenciálegyenlet-rendszer megoldásából a (12) Galjorkin-féle Ansatz szerint előállítható a singerenda  $z_s(\xi, t)$  kitérését megadó  $\sum_{j=1}^n T_j(t) \varphi_j(\xi)$ . közelítő megoldás. A (14) differenciálegyenlet-rendszer numerikus megoldásánál különösen körültekintően kell eljárni a megoldás numerikus stabilitása érdekében. A numerikus megoldás lépésközét tapasztalataink szerint elegendően kicsire kell választani ( $\Delta t = 0,00001 \dots 0,000005s$ ).

Az (12) szerinti megoldás ismeretében adódik a terhelőerővel együttmozgó pályapont közelítő függőleges kitérését megadó

$$z_s(0, t) = \sum_{j=1}^n T_j(t) \varphi_j(0)$$

időfüggvény, valamint a vízszintesen  $v$  sebességgel haladó, konstans  $F$  terhelőerővel együttmozgó gerendakeresztmetszet függőleges gyorsulását megadó

$$\ddot{z}_s(0, t) = \frac{d^2}{dt^2} \left( \sum_{j=1}^n T_j(t) \varphi_j(0) \right) = \sum_{j=1}^n \ddot{T}_j(t) \varphi_j(0)$$

időfüggvény. Az így kapott függőleges gyorsulás szolgálhat alapul az ismeretlen  $s(x)$  pályamerevség-függvény lefutásának paraméter-identifikációval tör-

ténő meghatározásához [9].

## 5. A GERENDAJELLEMZŐ PARAMÉTEREK HELYFÜGGŐVÉ VALÓ KITERJESZTÉSE

A további tárgyalásunkhoz a prizmatikus síngerenda függőleges mozgását leíró negyedrendű parciális differenciálegyenletben szereplő tömegsűrűségi és a lineáris féltér csillapítási-és merevségi paramétereiket a pálya hosszkoordináta mentén változóknak tekintjük.

$$IE \frac{\partial^4 z(x,t)}{\partial x^4} + \rho(x)A \frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial t^2} + d(x) \frac{\partial z(x,t)}{\partial t} + s(x)z(x,t) = F\delta(x - vt), \quad (15)$$

ahol  $\rho(x)$  a sín anyagának a pálya hosszkoordináta szerint változó sűrűsége,  $d(x)$  pedig a féltér a derenda hosszkoordináta mentén változó csillapítása,  $s(x)$  pedig a féltér merevsége. A 2. pont szerinti helyettesítést alkalmazva a (15) parciális differenciálegyenlet a  $v$  sebességgel mozgó koordinátarendszerben az alábbi alakot ölti:

$$IE \frac{\partial^4 z_s(\xi,t)}{\partial \xi^4} + \varrho(\xi + vt)A \left[ \frac{\partial^2 z_s(\xi,t)}{\partial \xi^2} v^2 - 2 \frac{\partial^2 z_s(\xi,t)}{\partial \xi \partial t} v + \frac{\partial^2 z_s(\xi,t)}{\partial t^2} \right] + d(\xi + vt) \left[ \frac{\partial z_s(\xi,t)}{\partial t} - \frac{\partial z_s(\xi,t)}{\partial \xi} v \right] + s(\xi + vt)z_s(\xi,t) = F\delta(\xi). \quad (16)$$

A síngerenda mozgására vonatkozó peremfeltételek változatlanok maradnak:

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} z_s(\xi,t) = 0. \quad (17)$$

A 3. pontban alkalmazott eljárás alkalmazásával a (16) differenciálegyenlet mindkét oldalát skalárisan beszorozva az ortonormált rendszer valamely  $\varphi_j(\xi)$  alakú elemével adódik, hogy

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \varrho(\xi + vt)A \sum_{i=1}^n \varphi_i(\xi) \varphi(\xi) \ddot{T}_i(t) d\xi \\ & + \left[ -2v \int_{-\infty}^{\infty} \varrho(\xi + vt)A \sum_{i=1}^n \varphi_i'(\xi) \varphi_j(\xi) \dot{T}_i(t) d\xi \right. \\ & \left. - v \int_{-\infty}^{\infty} d(\xi + vt) \sum_{i=1}^n \varphi_i(\xi) \varphi_j(\xi) \dot{T}_i(t) d\xi \right] \\ & + \left[ \int_{-\infty}^{\infty} IE \sum_{i=1}^n \varphi_i''(\xi) \varphi_j''(\xi) T_i(t) d\xi \right. \\ & + v^2 \int_{-\infty}^{\infty} \varrho(\xi + vt)A \sum_{i=1}^n \varphi_i''(\xi) \varphi_j(\xi) T_i(t) d\xi \quad (15) \\ & \left. - v \int_{-\infty}^{\infty} d(\xi + vt) \sum_{i=1}^n \varphi_i'(\xi) \varphi_j(\xi) T_i(t) d\xi \right. \\ & \left. + \int_{-\infty}^{\infty} s(\xi + vt) \sum_{i=1}^n \varphi_i(\xi) \varphi(\xi) T_i(t) d\xi \right] = F\varphi(0) \end{aligned}$$

Ekkor a  $T_i(t)$  függvények és deriváltjainak együtt-  
hatói az alábbi módon adódnak:

$$a_{i,j}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varrho(\xi + vt)A \varphi_i(\xi) \varphi_j(\xi) d\xi, \quad (16)$$

$$b_{i,j}^{(1)}(t) = -2v \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \varrho(\xi + vt)A \varphi_i'(\xi) \varphi_j(\xi) d\xi,$$

$$b_{i,j}^{(2)}(t) = -v \int_{-\infty}^{\infty} d(\xi + vt) \varphi_i(\xi) \varphi_j(\xi) d\xi,$$

$$c_{i,j}^{(1)} = IE \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_i''(\xi) \varphi_j''(\xi) d\xi,$$

$$c_{i,j}^{(2)}(t) = v^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \varrho(\xi + vt)A \varphi_i''(\xi) \varphi_j(\xi) d\xi,$$

$$c_{i,j}^{(3)}(t) = -v \cdot \int_{-\infty}^{\infty} d(\xi + vt) \varphi_i'(\xi) \varphi_j(\xi) d\xi,$$

$$c_{i,j}^{(4)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\xi + vt) \varphi_i(\xi) \varphi_j(\xi) d\xi.$$

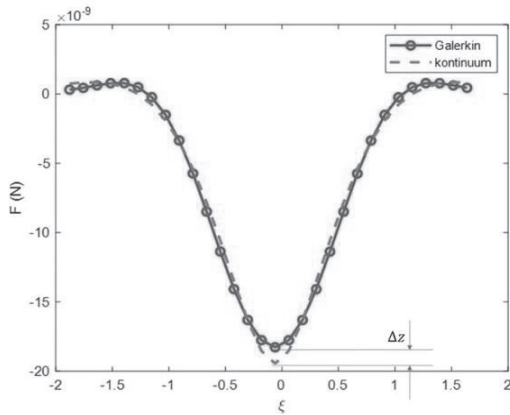
Fenti integrálok közelítő kiszámításával a

$$\mathbf{A}(v,t)\ddot{\underline{T}}(t) + \mathbf{B}(v,t)\dot{\underline{T}}(t) + \mathbf{C}(v,t)\underline{T}(t) = \underline{F}, \quad (18)$$

változó együtthatójú, másodrendű, inhomogén közönséges differenciálegyenlet-rendszer numerikus megoldásával előáll a gerendakitérés

$$z_s(\xi, t) = \sum_{j=1}^n T_j(t) \varphi_j(\xi)$$

közelítő megoldása.

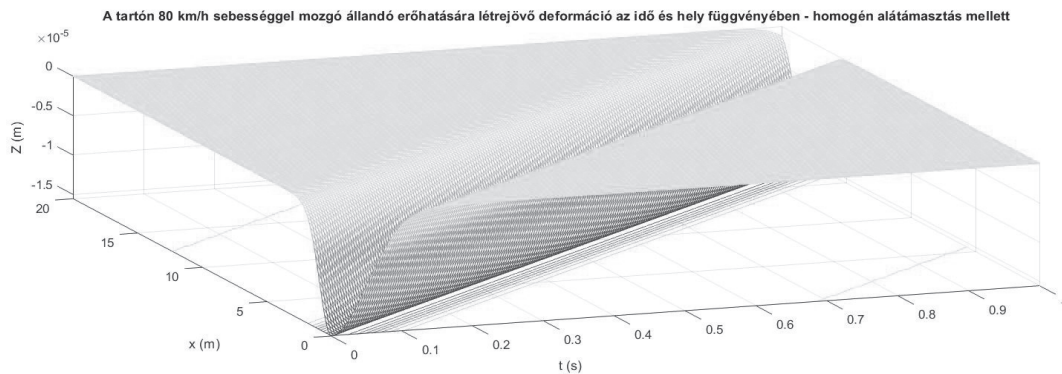


2. ábra A bemutatott számítási eljárás eredménye  $n = 7$  esetre ( $v = 80\text{km/h}$ ,  $F = \text{állandó}$ )

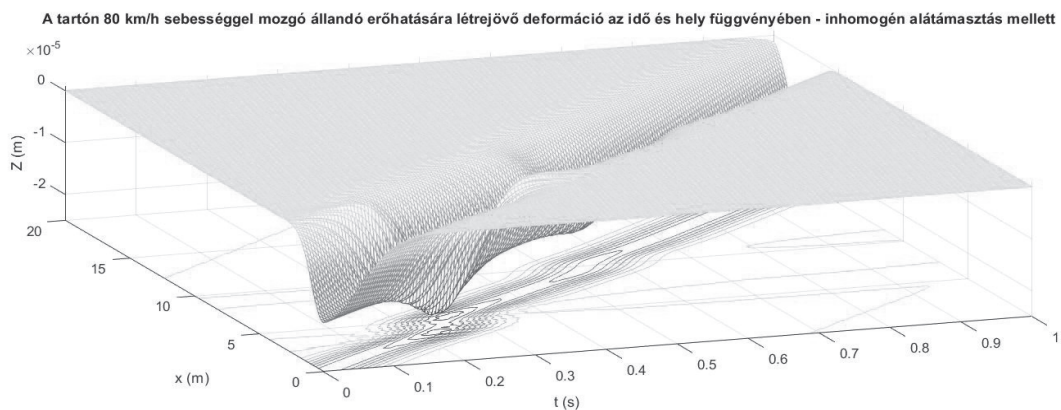
A 2. ábrán látható a Winkler alapzathoz kapcsolt kontinuum gerendamodellből az (1) egyenlet  $z(\xi, t)$

és a fentiekben bemutatott számítási eljárás eredményeként  $n = 7$  esetre nyert  $z_s(\xi, t)$  megoldásfüggvények összevetése állandó nagyságú,  $v$  sebességgel haladó  $F$  erőhatás mellett. Megállapítható, hogy az bázisfüggvények  $n$  számának növelésével csökken a kétféle modellből számított, az erőbevezetés helyén számított elmozdulásértékek relatív hibája. A bemutatott  $n = 7$  esetben 6%, míg  $n = 8$  esetben ez 4%-ra csökken.

Végezetül a 3. ábrán bemutatjuk a tartó idő és hosszkoordináta által meghatározott alapsík feletti elmozdulásfüggvény térbeli diagramját, ahol a tartógerenda alátámasztása homogén merevségű és csillapítási tényezőjű, amelyen egy állandó nagyságú  $F$  terhelőerő mozog  $v = 80 \text{ km/h}$  sebességgel, míg a 4. ábrán ugyanilyen nagyságú és ugyancsak  $v = 80 \text{ km/h}$  sebességgel mozgó erő egy inhomogén alátámasztású tartón történő mozgás során idő és hosszkoordináta függvényében kialakuló lehajlásfüggvényét mutatja.



3. ábra A gerenda idő-hosszkoordináta menti elmozdulásfüggvény térbeli diagramja



4. ábra A gerenda idő-hosszkoordináta menti elmozdulásfüggvény térbeli diagramja

## 6. ÖSSZEFOGLALÓ MEGÁLLAPÍTÁSOK

Számítási algoritmus került kidolgozásra a változó merevségű Winkler alapzaton alátámasztott kontinuum gerendaként tekintett pályán állandó függőleges erőhatással terhelt mérőkerékpár dinamikai modellezésére;

A bemutatott eljárás alapját képezi egy innovatív vasúti pályaminősítő járműi konstans erővel a pályához szorított mérőkerékpárjának ágytokon mért gyorsulásjel ismeretében a pálya alátámasztás merevségi paraméter pályahossz menti eloszlásának közelítő meghatározására paraméteridentifikációs módszerrel [4], [7].

## 6. IRODALOM

- [1] **Destek, M.:** A vasúti pálya-jármű rendszer kölcsönhatásainak vizsgálata rendszerelméleti megközelítésben. Közlekedéstudományi Szemle, No. 6, Budapest, 1974, p.271-276.
- [2] **Kisilowski, J. - Sowinski, B.:** Problems of Simulating Vehicle Motion by Mathematical Models. In: *Advanced Railway Vehicle System Dynamics*, (Ed. by Prof. J. Kisilowski and Prof. K. Knothe), Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warsaw, 1991, p.93-139.
- [3] **Zobory, I. - Zoller, V. - Zábóri, Z.:** Time Domain Analysis of a Railway Vehicle Running on a Discretely Supported Continuous Rail Model at a Constant Velocity, *Z. angew. Math. Mech.* 76, S4, 1996, p.169-172.
- [4] **Zobory, I. - Zábóri, Z.:** Track Qualification Method and Its Realisation Based on System Dynamics, Proceedings of the 5th Mini Conference on Vehicle System Dynamics, Identification and Anomalies, VSDIA 1996, (Ed. by Prof. I. Zobory). BME Department of Railway Vehicles, Budapest, 1997, p.173-181.
- [5] **Zoller, V. – Zobory, I.:** On the Dynamics of the Railway Track/Vehicle System in the Presence of Inhomogeneous Rail Supporting Parameters. Proceedings of the 10th Mini Conference on Vehicle System Dynamics, Identification and Anomalies VSDIA 2006. (Ed. by Prof. I. Zobory). BME Department of Railway Vehicles, Budapest, 2007, p.117-122. (ISBN:9789634209683)
- [6] **Zobory, I.:** A vasúti pálya-jármű rendszer dinamikája - mérése - minősítése. Közlekedéstudományi Szemle 2015, No1, Budapest, 2015, p. 6-18.
- [7] **Zábóri, Z. - Zobory, I.:** Track Qualification Method by Using System Dynamics Based Parameter Identification. Proceedings of the 16th MINI-Conference on Vehicle System Dynamics, Identification and Anomalies (VSDIA 2018), (Ed. by Prof. I. Zobory), BME ITS Budapest, 2019, p.173-185.

[8] **Cristescu, R. – Marinescu, G.:** Bevezetés a disztribúcióelméletbe és alkalmazásaiba, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1969.

[9] <https://hu.wikipedia.org/wiki/Hermite-polinomok>