

# A SZIGMOID GÖRBÉK MULTIDISZCIPLINARITÁSA

## THE MULTIDISCIPLINARITY OF SIGMOID CURVES

*Szabó Ferenc János, PhD, 3515 Miskolc Egyetemváros, Gép- és Terméktervezési Intézet*

**ÖSSZEFOGLALÁS (ABSTRACT, INHALT).** A cikk többféle, szigmoid jellegű (S-alakú) görbét mutat be. A görbék sokféle jelenség leírására alkalmasak, tulajdonságaikat megismerve a vizsgált jelenségek viselkedése, lefolyása mélyebben megismerhetővé válik, előrejelezhetőek lehetnek, ami számos esetben nagyon hasznos lehet. Ennek szemléltetésére a cikkben konkrét példák találhatók, az élet különböző területeiről származó jelenségek vizsgálatára.

### 1. BEVEZETÉS

A növekedési vagy telítődési jelenségeket leíró, S-alakú formázó görbéket szigmoid (azaz s- jellegű) görbéknek is nevezik. Ezek a görbék az élet számos területén használatosak az ilyen jelenségek leírására, tanulmányozására, sőt ezek alapján trendek is azonosíthatók, vagy egy jelenség jövőbeli alakulására vonatkozó kijelentések, következtetések is megfogalmazhatók. Ezeket a görbéket akár méltán nevezhetnénk multidiszciplináris görbéknek is, mivel számos tudományterület vizsgálatoknál találkozhatunk velük (biológia – populációdinamika, közgazdaságtan – termékek életciklus görbéje, orvostudomány – daganatok növekedése, környezetvédelem – légköri szennyezés és tengerek műanyagszennyezettsége, agrár alkalmazások – halállományok növekedése, erdőgazdálkodás, optimum kereső algoritmusok iterációtörténeti függvénye). A szigmoid görbékkel végzett vizsgálatokra számos példát találhatunk a szakirodalomban:

A szigmoid görbék felfedezése és vizsgálata az 1700-as évek végére tehető, Malthus (1798) [1] munkásságához kapcsolódóan, aki azt mondta ki, hogy bármilyen biológiai faj (így az ember is) létszámának pillanatnyi növekedése függ attól, hogy éppen mennyi az aktuális létszám. Bevezette a belső növekedés üteme nevű paramétert (növekedési ráta,  $r$ ). Ha  $r$  értéke állandó, akkor a populáció időbeli növekedését leíró függvény exponenciális növekedést ír le. Ez nagy térségekben, zavartalanul szaporodó fajokra igaz. Napjainkban az ilyen növekedésre ad példát Gordon E. Moore 1965-ös, a számítógépek kapacitásának 1,5 évenkénti megduplázódására vonatkozó törvénye [2], vagy az internet felhasználók számának növekedése. Az exponenciális növekedési ütem azonban nem tartható fenn zavartalanul hosszú távon. Pierre-Francois Verhulst belga matematikus (1847) [3] megoldotta azt az esetet, amikor a populációknak van egy bizonyos szaturációs (telítődési) szintje,  $K$ . Erre az esetre értelmezte és bevezette a logisztikus növekedés fogalmát. A növekedési folyamat kezdetén az exponenciális növekedéshez hasonló a viselkedés. A telítődés elérésével a növekedés leáll, azaz a populáció létszáma egy konstans értéken állandósul, ami a szaturáció jelensége. Ez a korlátozott térben lezajló növekedési folyamatok modellje. Pearl és Reed szerzőpáros 1920-ban az USA népességének előrejelzésére [4] használta és felelevenítette a logisztikus növekedés vagy logisztikai görbe elnevezéseket. A görbe S alakja alapján honosodott meg a szigmoid (s- alakú) görbék elnevezés.

A szigmoid görbék közelítésekor szükség van a regressziós együttható számítására, hogy látható, számszerűsíthető és ellenőrizhető legyen a közelítés jósága. A regressziós

együtthatót lineáris közelítés esetére a legkönnyebb kiszámolni, ezért célszerű az S alakú görbét olyan transzformációnak alávetni, amivel az alakja egyenessé alakítható, például a logaritmus alkalmazásával. Egy ilyen transzformációt dolgozott ki Fisher és Pry (1971) [5]. A Fisher- Pry transzformáció lényege, hogy alkalmazva a  $F = N/K$  transzformációt, akkor  $\ln(F/(1-F)) = rt + b$ , tehát a logisztikus függvény helyett egy egyenest kapunk, melynek meredeksége  $r$ . Az egyenesre pedig már könnyen kiszámítható a regressziós együttható.

Olyan esetekre, amikor a növekedési folyamat során a kezdeti időszakban sem exponenciális a növekedés, Bertalanffy (1938) végzett vizsgálatokat [6] és létrehozta a Bertalanffy-féle növekedési görbét, amit cápák testhosszának növekedési üteme vizsgálatára használt. Később kiderült, hogy ez a görbe haszonnal alkalmazható különféle halállományok vizsgálatára és az erdőgazdálkodásban is, 2003-ban pedig Kozuko és társai [7] az orvostudományban daganatos sejtek szaporodásának vizsgálatára alkalmazták. Richards 1959-ben [8] a Bertalanffy görbét módosította és a növények növekedésének vizsgálatára is alkalmassá tette.

A szigmoid görbék közgazdaságban, iparban és terméktervezésben, termékek bevezetésének, életciklusának vizsgálatában való alkalmazhatóságát teszik lehetővé Mansfield (1961) [9] és Rogers (1962) [10] eredményei az innovációk terjedésének és az ipari technológiai eljárások bevezetési sebességének vizsgálatára vonatkozóan. Jang, Show- Ling és munkatársai (2005) [11] kevert modell létrehozásával 29 OECD ország és Tajvan esetében vizsgálták a mobiltelefonok elterjedését, mely szintén szigmoid függvényre vezetett.

Meyer (1994) [12] arra hívta fel a figyelmet, hogy létezhetnek olyan pulzáló folyamatok, amikor egy növekedési folyamatra épülve egy újabb kezdődik (biológiai, tri- logisztikus, multi- logisztikus növekedés). Erre épül Silverberg és Lehnert (2003) munkája [13] az evolúciós gazdasági növekedés modelljére vonatkozóan. A szigmoid görbék társadalomtudományi jelenségekre való alkalmazására érdekes példákat találhatunk Nikosz (2009) munkájában [14].

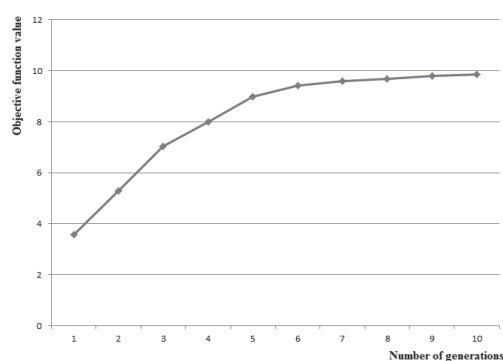
A szigmoid görbéket, deriváltjaikat és integráljukat Szabó többféle területen is alkalmazza: Kimutatta, hogy a különböző sportágak világsúcs- eredményeinek száz éves történetét bemutató görbe szintén szigmoid görbe (2011) [15], valamint értelmezte a különböző technikai fejlesztéseknek az eredmények görbéjére gyakorolt hatását. A szigmoid görbék tulajdonságainak, az egyenletekben szereplő paramétereknek, a görbék deriváltja, integrálja vizsgálatával (2017) [16] egy szempontrendszerrel fejlesztett ki (EBSYQ, Evolutionary Based System for Qualification of Group Achievements, azaz csoportok teljesítményének evolúciós alapú összehasonlító és minősítő módszere), amely objektív, jól számszerűsíthető módon, finom különbségeket is kimutatva lehetővé teszi különböző tanulói csoportok, vagy támogatásra jelentkezők, állásinterjú résztvevők, egymással versengő csoportok minősítését, rangsorolását. A módszer széleskörű alkalmazhatóságát mutatja, hogy hatékonyan alkalmazható optimumkereső algoritmusok, módszerek összehasonlításához is (2018)[17], vagy ugyanazon módszer többféle beállításainak

összehasonlítására, miközben nem szükséges a módszer többszöri futtatásának elvégzése, a futásidő többszöri végigvárása, hanem a görbék korai szakasza alapján történő közelítések felhasználásával ennek az időnek kétharmada is megtakarítható. Ez a multidiszciplináris optimálás korszakában esetleg több nap időnyereséget is eredményezhet. Szintén a szigmoid görbék multidiszciplinaritását, rugalmasságát emeli ki, hogy a világ és Európa műanyag- gyártásának utóbbi évtizedekre vonatkozó görbéjét vizsgálva, amelyek szintén szigmoid jellegűt mutatnak, becslést és jövőképet ad (2019) [18] a tengerek, óceánok műanyagszennyezettségének jövőbeli alakulásáról. Szabó az említett vizsgálatokhoz kifejlesztett egy közelítési módszert, melynek során a görbék legkisebb négyzetek elve szerinti közelítését optimumkeresési problémaként írja fel, melyben a célfüggvény az eltérések összege, aminek a minimumát keressük, a változók pedig a szigmoid görbék egyenletében szereplő paraméterek, melyeknek a Nelder- Mead [19] optimumkereső algoritmussal keresi meg a legkisebb eltéréseket adó értékeit. Ennek során a Fisher- Pry transzformációt is felhasználja, így a közelítés jószágának ellenőrzéséhez megadja a regressziós együttható értékét is. A regressziós együttható értékének összehasonlításából az is eldönthető, hogy a vizsgált jelenség viselkedése inkább a logisztikus függvényhez, vagy esetleg a Bertalanffy függvényhez van-e közelebb. A szigmoid görbék közelítésére Kehl és Sipos [21] mutat be példákat. Az EBSYQ módszer tanulói csoportok összehasonlítása történő alkalmazását mutatja be Rézsó Ferencné [20], zárthelyit megíró hallgatók teljesítményének vizsgálatával. A továbbiakban tekintsünk néhány konkrét példát, jelenségek szigmoid görbékkel történő vizsgálatára.

## 2. OPTIMUMKERESŐ ALGORITMUSOK ITERÁCIÓS GÖRBÉJE

Az optimumkereső algoritmusok a kitűzött célfüggvény szélsőértékét igyekeznek megtalálni, adott feltételek kielégítése mellett. Ehhez egy olyan módszert, folyamatot követnek, amelyet minél többször elvégezve, egyre közelebb kerülünk a keresett szélsőértékhez. Ennek a folyamatnak az az előnye, hogy nem szükséges a létező összes lehetséges kombináció vizsgálata, mert az nagyon hosszadalmas lenne, hanem az alkalmazott ötletes gondolatmenet kevesebb számítással jut majd el az optimumig. Ezt a folyamatot az algoritmus alkalmazói igyekeznek minél jobban figyelemmel kísérni, követni, mivel nagyon fontos, hogy az adott eredmény eléréséhez az algoritmus hányszor értékeli ki a célfüggvényt, hányszor ellenőrizi a feltételeket, hány iterációt végez, stb. A feltételek és/vagy a célfüggvény számítása napjainkban hosszas végeses számításokat igényelhet, tehát az a cél, hogy az optimális megoldáshoz ezeket minél kevesebbszer számolja ki az algoritmus. Az algoritmus számítási folyamatának megfigyeléséhez gyakran használják az iterációtörténeti görbét (1. ábra), ami az iterációk számának növekedése függvényében a célfüggvény legjobb értékének változását írja le. Maximum keresés esetén tehát a legnagyobb elért célfüggvény érték változását adja. Az algoritmus tartalmazhatnak több olyan paramétert is, amelyeknek beállítása, megváltoztatása gyorsíthatja, lassíthatja a működését, illetve javíthatja fontos tulajdonságait (lokális optimumra való ráfutás veszélye, stb). Ezen a beállítások legjobb értékeinek, az értékek legjobb kombinációjának megtalálásához az optimumkeresési folyamatot többször, többféle beállításokkal is el kell végezni, amelyekből a legjobb viselkedést biztosító kombináció kiválasztható. A multidiszciplináris optimálás megjelenésével ma már olyan nagy, sok számítást igénylő modellek is vizsgálhatók, melyek esetén a számítási folyamat akár több hetet is

igénybe vehet. Ezt a többhetes folyamatot kellene többször is elvégezni, hogy összehasonlíthassunk többféle algoritmus- beállítást, többféle paraméter- kombinációt, a legjobb beállítás megtalálásához. Ezt a hosszadalmas kísérletezési folyamatot lehet rövidíteni, ha felismerjük, hogy az optimumkereső algoritmusok iterációtörténeti görbéje az optimális megoldáshoz történő fokozatos közeledés miatt egy telítődő, szigmoid típusú görbe, és elindítva a folyamatot, a görbét közelítve a kezdeti eredményekből következtetéseket vonunk le arra nézve, hogy milyen gyorsan működik az algoritmus, milyen célfüggvény- optimum lenne várható a folyamat végén, azaz nem kellene végigvárni a több hetes futásokat ahhoz, többféle beállításokat összehasonlítsunk. Ezzel felére, vagy szerencsés esetben akár harmadára is csökkenthető lehet a tesztelés, numerikus kísérletek, beállításkeresési folyamat időszükséglete.



1. ábra. Egy jellemző iterációtörténeti görbe

1. Táblázat. A görbékézelés hatékonysága

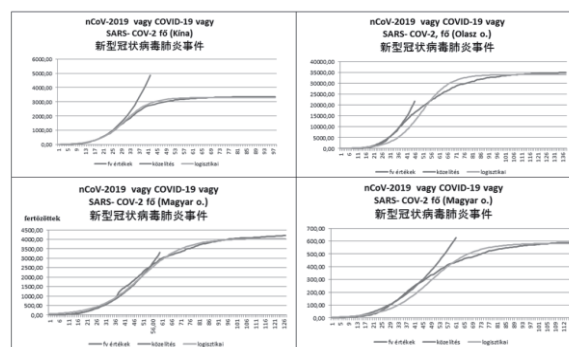
	K	r	c
Eredeti görbe	10	0,41	1,0
Közelítés 4 ponttal	9,88	0,39	0,97

Az 1. táblázatból látható, hogy a teljes futást (10 iteráció) kifejező iteráció történet görbét 4 pontból sikerült jó minőségben közelíteni, tehát a vizsgálat idejét az eredeti időszükséglet 25%-ára csökkentettük. A K, r és c paraméterek a görbe egyenletének paraméterei, az eredeti és a 4 ponttal közelített görbe nagyon közel esik egymáshoz, a regressziós együttható 0.998475631. A görbe egyenlete:

$$y = \frac{K}{1 + ce^{-rx}} \quad (1)$$

## 3. AZ ÚJ TÍPUSÚ KORONAVÍRUS TERJEDÉSÉNEK VIZSGÁLATA

A 2. ábra a SARS-COVID-19 vírus által okozott fertőzések és halálozások alakulását mutatja, az első hullám esetén, azaz 2020 március-augusztus közötti időszakban.

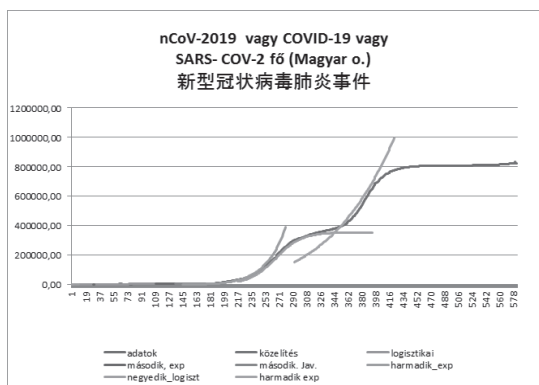


2. ábra. A COVID-19 első hullám görbéi

A 2. ábrán a betegség időbeli alakulásának folyamata látható, a kínai és olasz görbe az elhunytak számának időbeli növekedését mutatja, a magyar görbék a fertőzöttek számát és a halálozások számát mutatják. A görbék lefolyása nagyon jellegzetes, a logisztikai görbét követik. Ezeknek a görbéknek a tanulmányozása és napi szinten történő követése, közelítése mutatott rá arra a nagyon fontos tényre, hogy a teljes görbe két részből áll, a korlátlan fejlődés szakaszából és a telítődés, vagyis korlátozott fejlődés szakaszából, ami a leállásig tart. Amíg a korlátlan fejlődés szakaszán vagyunk, addig semmit nem szabad mondanunk a görbe második részéről, mert még nem történtek meg azok az intézkedések, amik a korlátozott fejlődést okozzák majd. Visszaülva az optimális algoritmusokra, a korlátlan fejlődés szakaszában még nem léptek működésbe a tervezési feltételek, ezért ebben a szakaszban nem lesz pontos az optimalizációs folyamat kimenetelének előrejelzése sem. Ha ezt figyelembe vesszük, sokat javíthatunk az előrejelzés pontosságán és megbízhatóságán.

A vírus logisztikai görbéjének közelítésével már viszonylag korai szakaszban látható a „végkifejlet”, azaz mennyi lesz a leállásig fellépő halálozási szám, illetve a fertőzöttek számának alakulása. Ez nagy segítség lehet az egészségügyi szakemberek számára, hiszen jó pontossággal előre jelezhető a kapacitások (ágyszám, ápoló személyzet, orvosok, stb) szükséges mennyisége, hatékonyabban tervezhető a védekezés.

A közreadott járványügyi adatokra végzett görbéközelítések eredményeként előállnak a görbék egyenletében szereplő paraméterek, amelyek pontos, számszerű értékekkel mutatják a görbék jellemzőit (növekedési sebesség, elérhető maximum, hol válik el a korlátlan és a korlátos fejlődés szakasza, stb), ezek alapján összehasonlíthatók lehetnek az egyes országok, vagy egy-egy országon belül különféle régiók vírusellenes intézkedései, védekezésük hatékonysága is.



3. ábra. Az első három hullám és a negyedik kezdete 2021 október 7-én (Magyar fertőzöttek száma)

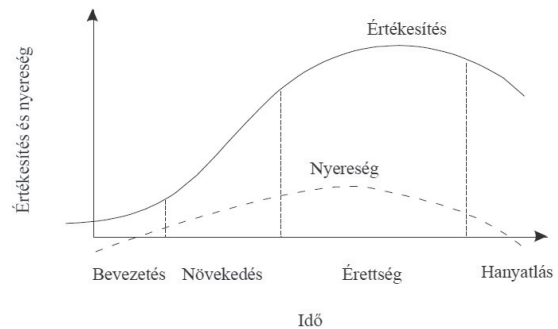
A további hullámok görbéi a bilogisztikus, illetve trilogisztikus görbét követik (3. ábra), sőt, e cikk írásakor, 2021 október elején kezdődőben van a negyedik hullám is, tehát még további emeletek épülhetnek egymásra. Ezek a görbék külön – külön is vizsgálhatók és összehasonlíthatók, így ugyanazon régió különböző betegség- hullámaint hasonlíthatjuk össze.

#### 4. VILÁGTENGEREK MŰANYAGGAL TÖRTÉNŐ SZENNYEZŐDÉSÉNEK VIZSGÁLATA

A tengerekben műanyag szennyeződés olyan műanyag termékekből származik, amelyeket valamikor megvásároltak az emberek, de már nem lesz rájuk szükség, és eldobták, esetleg különböző illegális lerakókban helyezték el, stb. A műanyag termékek kb a 10%-a végzi a tengerekben

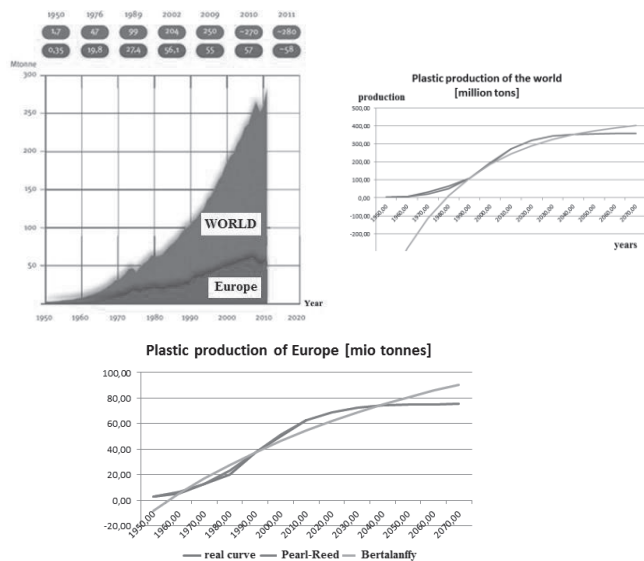
különböző szennyeződések okozva. Ezt figyelembe véve, tehát érdemes figyelni a műanyag termékek termelésének alakulását, mert ezeknek a tizede válik majd a tengerekben szennyeződéssé.

A műanyag termékekre, mint minden termékre, alkalmazható a logisztikai görbe, azaz a termék piacának van egy kezdeti, gyors növekedési szakasza, majd ez lelassul, végül megszűnik a növekedés, sőt ezután meredek csökkenés indulhat be, vagy akár ki is vonhatják a terméket a piacról (4. ábra).



4. ábra. A termékek életciklus- görbéje logisztikai görbe

Mivel a termékek bizonyos hányada (10 %) válik szennyeződéssé a tengerekben, ezért a szennyeződés volumenének görbéje is logisztikai görbét kell, hogy volumenén (5. ábra) [22].



5. ábra. A világ és Európa műanyag termelésének alakulása 1950 és 2000 között

A görbe közelítése módot ad arra, hogy akár 30- 40 évvel előre megbecsülhető legyen a szennyezés mértékének alakulása. Ha nemcsak a logisztikai görbével végezzük el a vizsgálatokat, hanem a Bertalanffy- féle növekedési görbével is (ennek nincs kezdeti gyors növekedési szakasza), akkor azt tapasztaljuk, hogy a logisztikai görbével történő előrejelzés egy derülátó, csökkenő, telítődő jövőképét ad, viszont a Bertalanffy görbe egy agresszívabb növekedést, borulátó jövőképét mutat. A borulátó görbe kissé jobb regressziót mutat a világ termelését tekintve, az európai termelésre inkább a logisztikai görbe, a derülátóbb jövőkép érvényes. Ennek oka talán a környezetudatosságban, a lebomló, környezetkímélő technológiák, az újrafelhasználás nagyobb európai



elterjedésében kereshető. Afrikában, Dél- Amerikában ez kevésbé jellemző tendencia.

## 5. KÖVETKEZTETÉSEK

A szigmoid görbék az élet többféle jelenségét is képesek leírni, ezért joggal nevezhetjük őket fokozottan multidiszciplináris görbéknek. A telítődési, növekedési jelenségek vizsgálata a szigmoid görbékkel jól leírható, így haszonnal alkalmazhatók az optimumkereső algoritmusok iterációtörténetének vizsgálatára, a COVID-19 koronavírus megbetegedések és halálozások számának időbeli változásának leírására, vagy a termékek életciklusának tanulmányozására is. A többféle jelenségeknek a görbéken keresztül történő mélyebb megértése, leírása lehetőséget ad arra, hogy a görbék tulajdonságainak , jellemzőinek újabb és újabb jelentését, újraértelmezését végezhessük el, ami a vizsgált jelenség viselkedését is új megvilágításba helyezheti, újabb ötleteket, meglátásokat adhat. Ilyen pl. a korlátlan fejlődés és korlátos fejlődés határpontjának fontossága, a koronavírus görbéjében felfedezve adódott, hogy ez előtt a pont előtt nem lesz elég pontos a görbe alapján végzett előrejelzés, ez használható az optimumkereső algoritmusok tervezési feltételek mellett történő vizsgálatához is. A koronavírus több hullámos viselkedése az újabb és újabb mutációk, variánsok kialakulásához köthető, ez a jelenség a terméktervezés során adhat ötletet a terméktervezők számára, hiszen a termékciklus vége felé, amikor a termék piaca nem növekszik kielégítően, vagy esetleg csökken, akkor újabb variánssal, egy „ütős” továbbfejlesztéssel újabb felfutás érhető el.

## 6. IRODALOM

- [1] Malthus,T.: *An Essay on the Principle of Population*. Printed for J. Johnson in St Paul's Church- Yard, Londodn, 1798.
- [2] Moore, E. G.: *Cramming more Components onto Integrated Circuits*. Electronic Magazine 38 (8):pp. 114- 117, 1965.
- [3] Verhulst, P.- F.: *Deuxieme memoire sur la loi d'accroissement de la population*. Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux- Arts de Belgique. 20. 1- 32, 1847, Retrieved 18 February 2013.
- [4] Pearl, R.; Reed, L. J.: On the Rate of Growth of the Population of the US since 1790 and its Mathem. Representation. *Proc. of the National Academy of Sciences*. Vol. 6. No 6. pp. 275-288, 1920.
- [5] Fisher, J. C., Pry, R. H.: A Simple Substitution Model of Technological Change, *Technological Forecasting and Social Change*, 3. pp. 75- 88, 1971.
- [6] Bertalanffy, L.: Principles of Theory of Growth. In: *Fundamental Aspects of Normal and Malignant Growth*. Amsterdam. pp. 137-259, 1960.
- [7] Kozuko, F., Bajzer, Z.: Combining Gompertzian Growth and Cell Population Dynamics, *Mathematical Biosciences*, 185 pp. 153- 167, 2003.
- [8] Richards, F. J.: *A Flexible Growth Function for Empirical Use*. Journal of Experimental Botany, 10, pp. 290- 300. 1959. <http://dx.doi.org/10.1093/jxb/10.2.290>
- [9] Mansfield, E.: Technical Change and the Rate of Imitation. *Econometrica*, Vol. 29, No.4. pp. 741- 766. October, 1961.
- [10] Rogers, M. E.: *Diffusion of Innovations*. (Third edition). The Free Press, Macmillan Publishing Co. Inc., New York, USA. p. 236. 1962.

- [11] Jang, S.L., Dai, S. C., Sung, S.: The pattern and Externality Effect of Diffusion of Mobile Telecommunications: the Case of OECD and Taiwan. *Information Economics and Policy*, 17, pp. 133-148, 2005.
- [12] Meyer, W. B., Turner, B. L. (editors): *Changes in land use and land cover: a global perspective*. Cambridge University Press, pp. 537 + Xi , 1994. ISBN 0 521 47085 4.
- [13] Silverberg, G., Lehnert, D.: Evolúciós káosz: növekedés és fluktuációk az „alkotó rombolás” Schumpeter- féle modelljében. In: Fokasz Nikosz (szerk.): *Káosz és nemlineáris dinamika a társadalomtudományokban*. Typotex kiadó, 2003.
- [14] Nikosz, F.: *Növekedési görbék, társadalmi diffúzió, társadalmi változás*. [http://www.socialnetwork.hu/cikkek/FokaszDiffuzio\\_o.pdf](http://www.socialnetwork.hu/cikkek/FokaszDiffuzio_o.pdf) Legutóbbi felkeresés: 2019. nov. 22.
- [15] Szabó, F. J.: Analógia a sport- világcúcsok története és az evolúciós optímáló algoritmusok iteráció- története között. *GÉP*, LXII; 9- 10., pp. 28-31. , 4p. (2011).
- [16] Szabó, F. J.: Evolutionary Based System for Qualification and Evaluation of Group Achievements (EBSYQ). *International Journal of Current Research*, ISSN: 0975-833X, Vol. 9, Issue 08, pp. 55507 – 55516, August, 2017. [www.journalcra.com/sites/default/files/21246.pdf](http://www.journalcra.com/sites/default/files/21246.pdf)
- [17] Szabó, F. J.: Optimumkereső algoritmusok iterációtörténetének vizsgálata. *GÉP*, 69. (4), pp. 82- 85. 2018. (ISSN 0016- 8572)
- [18] Szabó, F. J.: Application of sigmoid curves in environmental protection. In: Szita Tóthné, Klára, Jármái Károly, Voith Katalin (szerk.): *Solutions for Sustainable Development: Proceedings of the 1st International Conference on Engineering Solutions for Sustainable Development*, (ICESSD 2019). London, Egyesült Királyság / Anglia: CRC Press, pp. 1- 7, 7p. 2019.
- [19] Nelder, J. A., Mead, R.: A simple method for function minimisation. *Computer Journal* 7. : pp 308- 313. doi: 10.1093/comjnl/7.4.308, 1965.
- [20] Rézsó F.-né: Sigmoid görbék alkalmazása tanulói csoportok eredményeinek vizsgálatához. *Multidiszciplináris tudományok, 10. kötet., (2020) 3 sz. pp. 195-211*. <https://doi.org/10.35925/j.multi.2020.3.25>
- [21] Kehl, D.; Sipos, B.: A telítődési, a logisztikus és az életgörbe becslése Excel parancsfájll segítségével. *Statistikai Szemle*, Vol. 87. No 4, 2009.
- [22] [http://www.plasticseurope.org/documents/document/20121120170458-final\\_plasticsthefacts\\_nov2012\\_en\\_web\\_resolutio.pdf](http://www.plasticseurope.org/documents/document/20121120170458-final_plasticsthefacts_nov2012_en_web_resolutio.pdf) Legutóbbi megtekintés: 2019 január 22.