

# KONSTITUTÍV MODELL KOROMMAL ERŐSÍTETT GUMI ÖSSZETETT VISELKEDÉSÉNEK LEÍRÁSÁHOZ

## A CONSTITUTIVE MODEL TO DESCRIBE THE COMPLEX BEHAVIOUR OF CARBON BLACK FILLED RUBBER

Fazekas Bálint<sup>1</sup>, PhD hallgató, [fazekas.balint@gt3.bme.hu](mailto:fazekas.balint@gt3.bme.hu)

Goda Tibor<sup>1</sup>, DSc, egyetemi tanár, [goda.tibor@gt3.bme.hu](mailto:goda.tibor@gt3.bme.hu)

<sup>1</sup>Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Gépészmérnöki Kar, Gép- és Terméktervezés Tanszék

### ABSTRACT

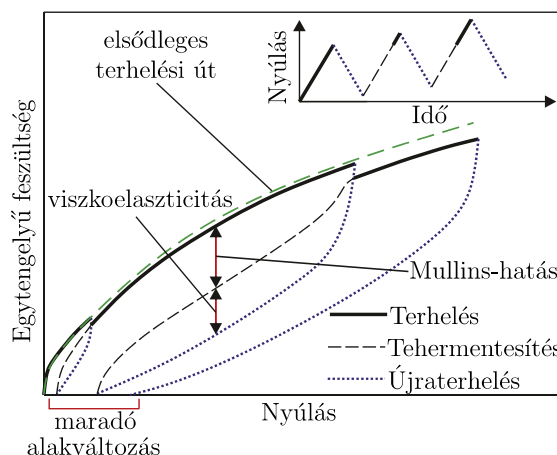
This paper focuses on a new constitutive model where a viscoelastic material model is combined with a pseudoelastic one to take into consideration the residual strain effects too. The performance of the model is investigated through the uniaxial cyclic tensile tests of a filled EPDM rubber. The results show that the proposed model can describe the complex mechanical behaviour of the rubber accurately.

### 1. BEVEZETÉS

A gumi-szerű anyagok mérnöki alkalmazásokban való felhasználása igen széleskörű, első sorban a különböző töltőanyagok (pl. korom) segítségével módosítható mechanikai tulajdonságaiknak köszönhetően. A töltőanyag mechanikai viselkedésre gyakorolt hatásának figyelembevétele a megbízható numerikus modellezés egyik fontos ismérve.

A töltőanyaggal erősített gumikra jellemző a feszültség és az alakváltozás közötti nemlineáris kapcsolat, az akár több 100%-ot is elérő alakváltozások, valamint a viszkoelasztikus viselkedés [1]. Továbbá, ciklikus terhelés hatására az anyag nem rugalmas viselkedést mutat, amely a Mullins-hatás [2] és a maradó alakváltozások megjelenésével jár együtt. Előbbi a gumi mikroszerkezetében bekövetkező károsodásból adódik, ami makro-szinten merevségcsökkenést idéz elő a feszültség-nyúlás görbékben. Azaz, egy terhelés-tehermentesítés-újrateljesítés ciklust tekintve az újrateljesítéskor adott deformáció eléréséhez kisebb erő szükséges, mint az első terhelés esetén. A merevségcsökkenés az első ciklusban a legjelentősebb, a további ciklusokban egyre inkább elhanyagolhatóvá válik. Ennek megfelelően, a bemutatásra kerülő anyagmodell a Mullins-hatást csak az első terhelési ciklusban veszi figyelembe. A korábbi maximumot meghaladó deformáció esetén a terheléshez tartozó görbe az elsődleges terhelési utat (lásd 1. ábra) követi, majd újabb ciklikus

terhelés hatására ismét megjelenik a Mullins-hatás. A gumikra jellemző mechanikai viselkedést az 1. ábra szemlélteti.



1. ábra. A (töltött) gumikra jellemző mechanikai viselkedés egyszerűsített megjelenítése.

Az 1. ábrán megjelenik a nemlineáris feszültség-alakváltozás kapcsolat, a Mullins-hatás, a viszkózus viselkedésből adódó hiszterézis terület, valamint a maradó alakváltozás a késleltetett rugalmas komponenssel együtt.

Ahhoz, hogy a gumi alkatrészek valós viselkedését numerikusan előre tudjuk jelezni, szükségünk van egy megfelelő anyagmodellre. A szakirodalomban számos konstitutív modell található, amelyek eltérő pontossággal képesek a gumikra jellemző mechanikai viselkedést leírni [3]. Ebben a tanulmányban egy olyan konstitutív modell kerül bemutatásra, amely kellően összetett ahhoz, hogy a gumik sajátos viselkedését megfelelő pontossággal le tudja írni, ugyanakkor elég egyszerű a mérnöki gyakorlatban való rutinszerű alkalmazáshoz. Az anyagmodell a szakirodalomban külön-külön már létező modellek összekapcsolására épül. Nevezetesen, a nemlineárisan rugalmas viselkedést, a Mullins-hatást, és a maradó alakváltozást az Ogden–Dorfmann-féle modell [4], míg az anyag időfüggő (viszkózus) viselkedését a Prony-sorozatra épülő lineárisan viszkoelasztikus modell veszi figyelembe.

Ennek a megközelítésnek az az előnye, hogy a konstitutív egyenletben megjelenő nemlineáris konvolúciós integrál numerikusan közelíthető. Azaz, lehetőség van olyan numerikus feszültségmeggoldások előállítására tetszőleges homogén igénybevételi módra vonatkozóan, amelyek alkalmasak a modellparaméterek hatékony meghatározására.

A javasolt anyagmodell megbízhatóságát EPDM gumin, két különböző alakváltozási sebesség mellett elvégzett, egytengelyű ciklikus húzóteszteken, valamint a mért és számított feszültségválaszok összehasonlításán keresztül vizsgáljuk.

## 2. KIDOLGOZOTT ANYAGMODELL

A konstitutív modellt egy időfüggetlen (pszeudoelasztikus) és egy időfüggő (lineárisan viszkoelasztikus) modell összekapcsolásával hoztuk létre. A következőkben az alkalmazáshoz szükséges legfontosabb összefüggéseket tárgyaljuk egytengelyű esetre vonatkozóan.

### 2.1. Pszeudoelasztikus modell

A pszeudoelasztikus anyagmodell a gumi időfüggetlen viselkedését írja le, a nemlineárisan rugalmas viselkedést, a Mullins-hatást, valamint a maradó alakváltozást. Alapja a nemlineárisan rugalmas, összenyomhatatlan, izotróp elmélethez kapcsolódó alakváltozási energiasűrűség függvény ( $W_0$ ) két további változóval ( $\eta_1, \eta_2$ ) való kibővítése. Az így kapott pszeudoelasztikus energiasűrűség függvény ( $W$ ) az alábbi módon definiálható

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \eta_1, \eta_2) = \eta_1 W_0(\lambda_1, \lambda_2) + (1 - \eta_2) N(\lambda_1, \lambda_2) + \phi_1(\eta_1) + \phi_2(\eta_2), \quad (1)$$

ahol  $\lambda_1$  és  $\lambda_2$  jelöli a főnyúlásokat. Továbbá  $\eta_1$  a károsodási paraméter, míg  $\eta_2$  a maradó alakváltozás leírására bevezetett paraméter. Ezek lehetnek aktív/inaktívak a terheléstörténetől függően. Aktív állapotot előidéző folyamat a tehermentesítés és az újrateherelés, egészen a tehermentesítéskor előzőleg elért maximális deformációs szintig. Inaktív állapotba ( $\eta_1 = \eta_2 = 1$ ) pedig az elsődleges terhelési úton (lásd 1. ábra) kerülnek, ekkor az anyag károsodás nélkül, tisztán rugalmasan viselkedik. Ebből következik, hogy  $W(\lambda_1, \lambda_2, 1, 1) = W_0(\lambda_1, \lambda_2)$  és  $\phi_1(1) = \phi_2(1) = 0$ , ahol  $\phi_1(\eta_1)$  és  $\phi_2(\eta_2)$  disszipációs függvények. Továbbá,  $N(\lambda_1, \lambda_2)$  függvény a maradó alakváltozások leírását biztosító energiasűrűség függvény. A károsodási és a maradó

alakváltozást definiáló paraméterek az alábbi módon számolhatók

$$\eta_1 = 1 - g_\infty \frac{1}{r} \operatorname{erf} \left( \frac{W_{\max} - W_0(\lambda_1, \lambda_2)}{m + \beta W_{\max}} \right), \quad (2)$$

$$\eta_2 = \frac{1}{\tanh(1)} \tanh \left[ \left( \frac{W_0(\lambda_1, \lambda_2)}{W_{\max}} \right)^\alpha \right], \quad (3)$$

ahol  $g_\infty$  a relaxált relatív modulus (lásd 2.2 fejezet),  $\operatorname{erf}(\bullet)$  a Gauss-féle hibafüggvény,  $r, m$  és  $\beta$  anyagparaméterek ( $r > 1, m \geq 0, \beta \geq 0$ ). Megjegyzendő, hogy az  $m$  és  $\beta$  paraméterek közül legalább az egyiknek nemzérusnak kell lennie.  $W_{\max}$  az elsődleges terhelési út azon pontjában érvényes energiasűrűség, ahonnan a tehermentesítés indul. Továbbá  $\alpha$  és  $W_{\max}$  között az alábbi lineáris kapcsolat áll fenn

$$\alpha = J + K \left( \frac{W_{\max}}{\mu_0} \right), \quad (4)$$

ahol  $J$  és  $K$  dimenziótlan anyagparaméterek, míg  $\mu_0$  az anyag kezdeti nyíró rugalmassági modulusa. A maradó alakváltozás figyelembevételére bevezetett energiasűrűség függvény az alábbi alakban írható fel

$$N(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2} \left[ \nu_1 (\lambda_1^2 - 1) + \nu_2 (\lambda_2^2 - 1) + \nu_3 (\lambda_1^{-2} \lambda_2^{-2} - 1) \right], \quad (5)$$

ahol

$$\nu_i = \mu_0 \left[ U - V \tanh \left( \frac{\lambda_{i,\max} - 1}{Z} \right) \right], i = 1..3, \quad (6)$$

ahol  $U, V,$  és  $Z (\neq 0)$  dimenziótlan paraméterek, valamint  $\lambda_{i,\max}$  az  $i$ -edik főnyúlás maximális értéke.

A pszeudoelasztikus mérnöki feszültségválasz összenyomhatatlan esetben az alábbi módon írható fel

$$P_{0,pe}(t) = \eta_1 \frac{\partial W_0}{\partial \lambda} + (1 - \eta_2) \frac{\partial N}{\partial \lambda}, \quad (7)$$

ahol a 0 alsóindex a végtelen gyors terheléshez tartozó választ jelöli (amely a gumi üveges állapotában érvényes). Megfigyelhető, hogy  $\eta_1 = \eta_2 = 1$  esetén a (7) egyenlet a klasszikus 1D hiperelasztikus konstitutív egyenletet adja vissza.

### 2.2. Viszko-pszeudoelasztikus modell

A viszko-pszeudoelasztikus anyagmodell a 2.1 fejezetben bemutatott pszeudoelasztikus és a

Prony-sorozatra épülő lineárisan viszkoelasztikus modell összekapcsolásából származtatható. A javasolt anyagmodellhez tartozó konstitutív egyenlet egytengelyű esetben az alábbi módon adható meg

$$P(t) = P_{0,pe}(t) - \frac{1}{3} \sum_{i=1}^N \frac{g_i}{\tau_i} \int_0^t \left( \frac{2\lambda(t)}{\lambda(t-s)} + \frac{2\lambda^2(t-s)}{\lambda^2(t)} \right) P_{0,pe}(t-s) e^{-s/\tau_i} ds, \quad (8)$$

ahol  $P(t)$  a teljes viszko-pszudoelasztikus mérnöki feszültségválasz,  $P_{0,pe}(t)$  a 2.1 fejezetben bevezetett pszudoelasztikus (időfüggetlen) mérnöki feszültségválasz,  $g_i$  és  $\tau_i$  az  $i$ -edik relatív rugalmassági modulus és relaxációs idő, azaz a viszkoelasztikus (Prony) paraméterek, míg  $N$  a Prony-sorozat fokszáma. Továbbá, a relaxált relatív modulus ( $g_\infty$ ) és a relatív rugalmassági modulus ( $g_i$ ) között az alábbi összefüggés áll fenn

$$g_\infty = 1 - \sum_{i=1}^N g_i. \quad (9)$$

### 3. EREDMÉNYEK BEMUTATÁSA

A javasolt anyagmodell alkalmazásához első lépésben egy hiperelasztikus modellt kell kiválasztani a rendelkezésre álló mérési eredmények elemzése alapján, amely megfelelő pontossággal képes az anyag rugalmas viselkedését leírni. Esetünkben az összenyomhatatlan (másodrendű) Ogden-féle hiperelasztikus anyagmodell került kiválasztásra, ahol az alakváltozási energiasűrűség függvény az alábbi módon adható meg

$$W_0 = \sum_{k=1}^2 \frac{2\mu_k}{\alpha_k} \left( \lambda_1^{\alpha_k} + \lambda_2^{\alpha_k} + \lambda_1^{-2\alpha_k} \lambda_2^{-2\alpha_k} - 3 \right), \quad (10)$$

ahol  $\mu_k$  és  $\alpha_k$  hiperelasztikus anyagparaméterek.  $W_0$  ismeretében a (7) egyenlet segítségével számolható az egytengelyű igénybevételi módra érvényes pszudoelasztikus feszültségválasz ( $P_{0,pe}(t)$ ). A következő lépésben a viszkózus viselkedés leírására bevezetett Prony-sorozat fokszámát kell meghatározni. Az általunk vizsgált időtartomány leírásához öttagú Prony-sorozatot ( $N=5$ ) alkalmaztunk. Fontos megjegyezni, hogy az anyagállandóknak bizonyos korlátozó feltételeket teljesíteniük kell. Egyrészt, a hiperelasztikus modell paramétereknek ki kell elégíteniük a Drucker-féle stabilitási feltételt. Másrészt a

hiperelasztikus, a viszkoelasztikus és a pszudoelasztikus paramétereknek a következő feltételeket kell teljesíteniük

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^2 \mu_k > 0; \quad \alpha_k \neq 0, \quad k=1..2, \\ \sum_{i=1}^N g_i < 1, \quad g_i > 0, \quad \tau_i > 0, \quad i=1..5, \\ r > 1, \quad m \geq 0, \quad \beta \geq 0, \quad \text{és ha } m = \beta \neq 0, \\ Z \neq 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Az anyagparaméterek meghatározása a szerzők korábbi tanulmányaiban kidolgozott módszer alkalmazásával történt [5, 6]. Alapja az anyagmodell numerikus feszültségválaszának előállítása. A viszko-pszudoelasztikus konstitutív egyenletben megjelenő nemlineáris konvolúciós integrál (lásd (7) egyenlet) numerikusan közelíthető, ami lehetőséget biztosít a mért és a számolt feszültségválaszok között bevezetett hibafüggvény minimalizálására. Így megkaphatók azok az anyagparaméterek, amelyekkel a modell a legpontosabban tudja a mért viselkedést numerikusan közelíteni.

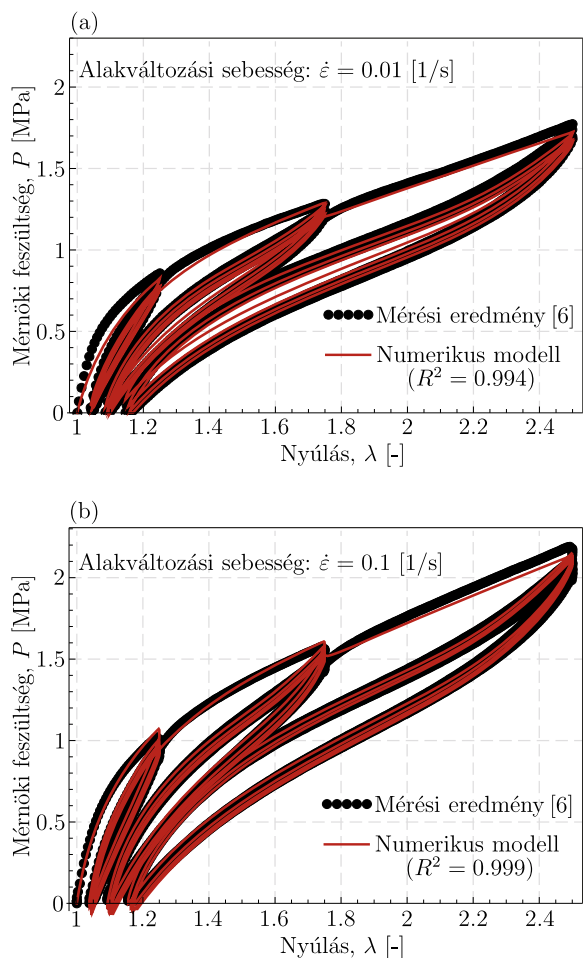
Az anyagmodell teljesítményének vizsgálatához egy 40 phr koromtartalmú EPDM gumi ciklikus, egytengelyű húzó igénybevételi mód mellett mért viselkedését vettük alapul. A mérést 0,01 1/s és 0,1 1/s alakváltozási sebesség mellett végeztük el 25, 75 és 150 %-os mérnöki alakváltozási szinteken. A paraméterillesztés során kapott anyagállandókat az 1. táblázat tartalmazza.

1. táblázat. A viszko-pszudoelasztikus modell optimalizált anyagparaméterei.

Ogden-féle hiperelasztikus modell paraméterei				
$\mu_1$ [MPa]	$\alpha_1$ [-]	$\mu_2$ [MPa]	$\alpha_2$ [-]	
4,275	-4,00	-0,0776	0,28	
Prony paraméterek ( $N = 5$ )				
$g_1$ [-]	$g_2$ [-]	$g_3$ [-]	$g_4$ [-]	$g_5$ [-]
0,428	0,113	0,092	0,061	0,081
$\tau_1$ [s]	$\tau_2$ [s]	$\tau_3$ [s]	$\tau_4$ [s]	$\tau_5$ [s]
0,27	3,1	21	326	2675
Pszudoelasztikus modell paraméterei				
$r$ [-]		$m$ [MPa]		$\beta$ [-]
2,05		0,21		0,27
$U$ [-]	$V$ [-]	$Z$ [-]	$J$ [-]	$K$ [-]
-0,139	-0,104	-0,958	-1,871	1,783

Az 1. táblázatban szereplő, optimalizált anyagparaméterekkel a viszko-pszudoelasztikus modell numerikus feszültségválaszait összevetettük a mért görbékkel. A kapott mérnöki feszültségértékeket a nyúlás függvényében a

vizsgált alakváltozási sebességek mellett a 2.(a) és (b) ábrák mutatják.



2. ábra. A mért és a modellezett mérnöki feszültségválasz, egytengelyű ciklikus igénybevétel esetén: (a)  $\dot{\epsilon} = 0,01/s$ , (b)  $\dot{\epsilon} = 0,1/s$ .

A 2.(a) és (b) ábrákon látható, hogy a javasolt anyagmodell nagy pontossággal képes a vizsgált EPDM gumi összetett viselkedését numerikusan előrejelezni két alakváltozási sebesség esetén is. A 0,01 1/s alakváltozási sebesség esetén az  $R^2=0,994$ , míg 0,1 1/s esetén  $R^2=0,999$ -re adódott, ami gyakorlatilag teljes egyezésnek felel meg. Az is megfigyelhető, hogy a vizsgált anyag mutatja az 1. fejezetben ismertetett mechanikai tulajdonságokat, kiemelve az első ciklusokban megjelenő Mullins-hatást és a maradó alakváltozásokat. Továbbá, a mért eredmények alapján kijelenthető, hogy a Mullins-hatás a növekvő alakváltozási szinteken egyre jelentősebbé válik, valamint az alakváltozási sebesség növelésével a gumi merevsége növekszik. Ezeket a hatásokat a modell kvalitatív és kvantitatív módon is képes figyelembe venni.

#### 4. ÖSSZEFOGLALÁS

Bemutatásra került egy olyan új viszkopseudoelasztikus anyagmodell, amelyben az időfüggetlen választ az Ogden–Dorfmann-féle pseudoelasztikus modell, míg az időfüggő viszkoelasztikus választ a Prony-sorozatra épülő lineárisan viszkoelasztikus modell adja meg. A kapcsolódó legfontosabb egyenletek egytengelyű igénybevételi módra vonatkozóan ismertetésre kerültek. A javasolt anyagmodellt egy korommal töltött EPDM gumi egytengelyű ciklikus igénybevétel esetén kapott feszültségnyúlás görbéire illesztettük. A bemutatásra került eredmények egyértelműen igazolják a modell pontosságát és alkalmazhatóságát, valamint jó alapot adnak a kapcsolódó kutatómunka jövőbeni folytatásához. Hiszen, a későbbiekben a cél az anyagmodell háromdimenziós konstitutív egyenletének kidolgozása a hozzá tartozó numerikus feszültségmegoldásokkal együtt, a modellválasz összevetése további mérési eredményekkel, valamint a modell numerikus implementálása.

#### 5. KÖSZÖNETNYÍLVÁNÍTÁS

A TANULMÁNY AZ INNOVÁCIÓS ÉS TECHNOLÓGIAI MINISZTERIUM ÚNKP-20-3 KÓDSZÁMÚ ÚJ NEMZETI KIVÁLÓSÁG PROGRAMJÁNAK A NEMZETI KUTATÁSI, FEJLESZTÉSI ÉS INNOVÁCIÓS ALAPBÓL FINANSZÍROZOTT SZAKMAI TÁMOGATÁSÁVAL KÉSZÜLT. FAZEKAS BÁLINT PHD HALLGATÓ EZÜTON IS KÖSZÖNETÉT FEJEZI KI A TÁMOGATÁSÉRT.

#### 6. IRODALOM

- [1] Saccomandi, G., Ogden R.W., 2004. Mechanics and Thermomechanics of Rubberlike Solids, Springer-Verlag Wien.
- [2] Mullins, L., 1948. Effect of stretching on the properties of rubbers. Rubber Chemistry and Technology. 21, 281–300.
- [3] Bergström, J., 2015. Mechanics of Solid Polymers. Theory and Computational Modeling, Elsevier.
- [4] Dorfmann A., Ogden, R.W., 2004. A constitutive model for the Mullins effect with permanent set in particle-reinforced rubber. Int. J. Solids and Struc. 41, 1855–1878.
- [5] Fazekas, B., Goda, T.J., 2019. Closed-form and numerical stress solution-based parameter identification for incompressible hyper-viscoelastic solids subjected to various loading modes. Int. J. Mech. Sci. 151, 650–660.
- [6] Fazekas, B., Goda, T.J., 2020. New numerical stress solutions to calibrate hyper-viscopseudoelastic material models effectively. Mater. Des. 194, 108861.