

ELASZTOMEREK MECHANIKAI MODELLEZÉSE

MECHANICAL MODELLING OF ELASTOMERS

Fazekas Bálint¹, PhD hallgató, fazekas.balint@gt3.bme.hu

Goda Tibor¹, DSc, egyetemi tanár, goda.tibor@gt3.bme.hu

¹Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Gépészmérnöki Kar, Gép- és Terméktervezés Tanszék

ABSTRACT

This paper aims to present the visco-pseudoelastic material model and its application to model the mechanical behaviour of rubbers. The constitutive constants are determined with the aid of the so-called inverse parameter identification method where the stress solution is provided by a finite element model. It is pointed out that the visco-pseudoelastic material model incorporating optimised parameters can describe the complex mechanical behaviour of an EPDM rubber accurately.

1. BEVEZETÉS

Napjainkban a gumik rendkívül fontos szerepet töltenek be az iparban, köszönhetően a kedvező mechanikai tulajdonságaiknak valamint a nagy energia abszorpciók képességüknek. Néhány gyakori alkalmazási példa: kerékabroncsok, statikus és dinamikus tömítések, zaj- és rezgésszigetelő komponensek [1].

Ezekre az anyagokra a nagy-rugalmas alakváltozások és a nemlineáris feszültség-alakváltozás kapcsolat mellett az időfüggő (viszkózus) viselkedés is jellemző. Továbbá, ciklikus igénybevétel mellett merevségsökkenés is megfigyelhető, amely az ún. Mullins-hatással magyarázható. A merevségsökkenés a terhelés során az anyag mikroszerkezetében bekövetkező irreverzibilis károsodásokra (pl. töltőanyag részecskék és a láncmolekulák közötti kötések felszakadása) vezethető vissza [2]. A Mullins-hatás mechanikai modellezésére számos elméletet dolgoztak ki, amelyek közül a legismertebb az Ogden–Roxburgh szerzők nevéhez fűződő pszeudoelasztikus modell [3], amely az összenyomhatatlan, izotróp, nemlineárisan rugalmas anyagok elméletének ún. károsodási paraméterrel való kibővítésén alapul. A modell egyik nagy előnye, hogy többtengelyű feszültségi állapot esetén is használható.

Ahhoz, hogy a gumi-szerű anyagokra jellemző összetett anyagi viselkedést le tudjuk írni, az ún. viszko-pszeudoelasztikus modell szükséges, ahol az anyag időfüggetlen válaszát

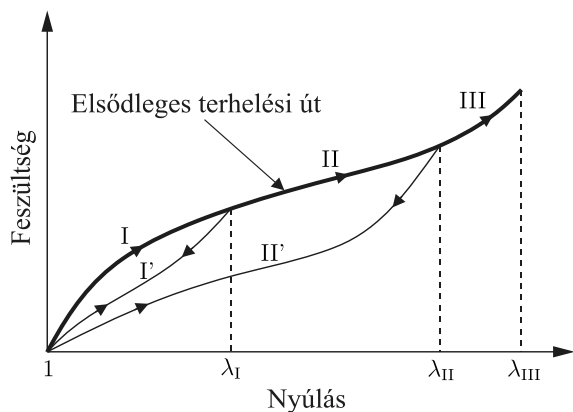
a Mullins-hatást is magába foglaló pszeudoelasztikus modellt, míg az időfüggő válaszát a Prony-sorozaton alapuló lineárisan viszkoelasztikus modell adja meg. A modell a mérnöki gyakorlatban azonban nem, vagy csak ritkán kerül alkalmazásra, aminek elsődleges oka az anyagparaméterek meghatározásának összetettsége. Így az esetek többségében a Mullins-hatás elhanyagolásra kerül, ami a gumi-szerű anyagból készült alkatrészek várható viselkedésének numerikus előrejelzésben jelentős hibákat eredményezhet; elsősorban olyan alkalmazási területeken, ahol az alkatrész a gyártás vagy a beszerelés során előterhelésnek van kitéve [4]. A modellben szereplő anyagparaméterek meghatározása a számított feszültségválasz mérési eredményekre történő illesztésével valósítható meg; azaz, a modellválasz és az adott mérési eredmény között bevezetett hibafüggvény minimalizálásával [5]. A viszko-pszeudoelasztikus modell összetettsége miatt analitikus (zárt alakú) feszültségválasz nem állítható elő még a legegyszerűbb egytengelyű húzás esetére sem, ezért a konstitutív konstansok meghatározásának egyik lehetséges módja az ún. inverz paraméterillesztés, amely során a modellválasz rendszerint egy elemből álló végelem modellel számolható, majd egy külső optimalizáló algoritmus segítségével kereshetők az anyagparamétereket. A módszer fő előnye, hogy összetett anyagmodellek paraméterei is meghatározhatóak, akár inhomogén feszültségállapotra vonatkozóan is, azonban a számítási kapacitás jelentős, hiszen a végelem modellt minden egyes ciklusban újra kell futtatni a kívánt pontosság eléréséig.

Az alkalmazott anyagmodell és az inverz paraméterillesztési módszer alkalmazhatóságának vizsgálata érdekében elvégeztük egy EPDM gumi mechanikai modellezését egytengelyű ciklikus igénybevételi módra vonatkozó mérési eredmények alapján, azaz meghatároztuk a viszko-pszeudoelasztikus anyagmodellben szereplő paramétereket.

2. ALKALMAZOTT ANYAGMODELL

2.1. A Mullins-hatás mechanikai modellezése

Ha egy gumit feszültségmentes állapotból kiindulva húzó erővel terhelünk, tehermentesítünk, majd újratehelünk, akkor adott alakváltozási állapot fenntartásához szükséges feszültség a tehermentesítés és az újratehelés során kisebb lesz, mint az első terhelés esetében, egészen az első terhelésnél elért maximális nyúlásértékig. Ezt a merevségcsökkenést (feszültség-lágyulást) Mullins-hatásnak nevezik, amely tehát az első terhelés során fellépő anyagszerkezeti károsodást írja le. A jelenség idealizálását az 1. ábra szemlélteti.



1. ábra. Az idealizált Mullins-hatás bemutatása egytengelyű ciklikus terhelés esetén.

Az 1. ábra az idealizált Mullins-hatás tulajdonságait mutatja egytengelyű, ciklikus terhelések sorozatán keresztül. Az anyagot feszültség- és nyúlásmentes állapotából λ_I nyúlásértékig terhelve a feszültségválaszt az ún. elsődleges terhelési út I jelű szakasza adja meg. A λ_I nyúlásértékről való tehermentesítés az I' jelű terhelési úton történik. Az anyag újbóli terhelése során a feszültségválasz követi az I' jelű utat egészen λ_I nyúlásértékig, amelyet követően az anyagválaszt az elsődleges terhelési út II jelű szakasza adja meg. A második tehermentesítés (λ_{II} nyúlásértéktől az anyag feszültségmentes állapotáig) a II' jelű terhelési úton történik. A következő, harmadik terhelés a feszültségmentes állapottól egészen λ_{II} nyúlásértékig a II' jelű terhelési úton történik. Ha nincs további terhelés λ_{II} nyúlásérték felett, akkor a II' jelű terhelési út adja meg a további anyagválaszt, amely már tisztán rugalmas lesz. A λ_{II} nyúlásértéknél nagyobb terhelés esetén az anyagválasz követi az elsődleges terhelési út III jelű szakaszát, az ezt követő terhelési ciklusok pedig a leírt mintázatot követik. Összefoglalva tehát a fő jellemzőit az idealizált Mullins-hatásnak:

(i) tehermentesítés során merevségcsökkenés (lágyulás) jön létre az elsődleges terhelési úthoz viszonyítva (ii) az újratehelés követi a tehermentesítéshez tartozó terhelési utat az előzőleg elért maximális nyúlásértékig, azt követően pedig az elsődleges terhelési utat (iii) a maradó alakváltozások és egyéb viskoelasztikus jelenségek (pl. hiszterézis) nincsenek a modellezés során figyelembe véve.

A Mullins-hatás mechanikai leírására az Ogden–Roxburgh-féle ún. pszeudoelasztikus modell alkalmas, amelynek alapja az alakváltozási energiasűrűség függvény kibővítése egy egyszerű állapotváltozóval. Az így kapott pszeudo-energiasűrűség függvény az alábbi alakban írható fel

$$W(\mathbf{F}, \eta), \quad (1)$$

ahol \mathbf{F} az alakváltozási gradiens, míg η az ún. károsodási paraméter, amely értéke egységnyi (inaktív) az elsődleges terhelési úton. Ekkor az anyag károsodás nélkül, rugalmasan viselkedik a $W(\mathbf{F}, 1)$ függvény mellett. Aktív esetben (tehermentesítés, valamint újratehelés során adott nyúlásértékig) η implicit módon kifejezhető az alakváltozási gradiens függvényében. Ekkor az anyagi viselkedés továbbra is rugalmas lesz, azonban más alakváltozási energiasűrűség függvény mellett. Vagyis ciklikus igénybevétel esetén az η paraméter hatására változik az anyagi viselkedés, megjelenik a disszipáció, következésképp az anyagi viselkedés pszeudoelasztikus lesz. A $W(\mathbf{F}, \eta)$ függvény ismeretében, amely tehát a tárolt alakváltozási energia és a károsodási folyamat során disszipálódott energia összege, a Cauchy-féle ($\boldsymbol{\sigma}$) és a mérnöki (\mathbf{P}) feszültségek összenyomhatatlan anyagi viselkedés feltételezése mellett az alábbi módon számolhatók

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{F} \frac{\partial W(\mathbf{F}, \eta)}{\partial \mathbf{F}} + p \mathbf{I}, \quad (2)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{F} \frac{\partial W(\mathbf{F}, \eta)}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^{-T} + p \mathbf{F}^{-T},$$

ahol p a Lagrange-féle multiplikátor, \mathbf{I} pedig az egység tenzor. Könnyen belátható, hogy inaktív károsodási paraméter mellett a (2) egyenlet alapján az ismert kontinuummechanikai összefüggések adódnak a feszültségekre. A bevezetett károsodási paraméter következtében az anyagmodell definiálásához szükséges egyenletek kiegészülnek egy újabb egyenlettel, ami az alábbi alakban írható fel

$$\frac{\partial W(\mathbf{F}, \eta)}{\partial \eta} = 0. \quad (3)$$

A pszeudo-energiasűrűség függvény definíció szerint az alábbi alakban írható fel

$$W(I_1, I_2, \eta) = \eta W^*(I_1, I_2) + \phi(\eta), \quad (4)$$

ahol I_1, I_2 a jobboldali Cauchy–Green-féle deformációs tenzor első és második skalár invariánsa, $W^*(I_1, I_2)$ az egységnyi térfogatra vonatkoztatott alakváltozási energiasűrűség függvény, továbbá $\phi(\eta)$ a károsodási függvény, amely a disszipáció mértékét adja meg és amelyre teljesül, hogy $\phi(1) = 0$. Azaz $\eta = 1$ esetén az elsődleges terhelési úton vagyunk, ahol $W = W^*$. A (4) egyenletet behelyettesítve a (3) egyenletbe az alábbi összefüggés adódik

$$-\phi'(\eta) = W^*(I_1, I_2), \quad (5)$$

amely kifejezés implicit módon definiálja az η károsodási paramétert az invariánsok és azokon keresztül a főnyúlások függvényében. Vagyis adott károsodási függvény esetében az (5) egyenlet alapján meghatározható a károsodási paraméter. Az Abaqus végeelem szoftverben [6] Ogden és Roxburgh munkája alapján a károsodási paraméter az alábbi alakban került implementálásra

$$\eta = 1 - \frac{1}{r} \operatorname{erf} \left(\frac{W_{\max} - W^*(I_1, I_2)}{m + \beta W_{\max}} \right), \quad (6)$$

ahol $\operatorname{erf}(\bullet)$ a Gauss-féle hibafüggvény, W_{\max} az alakváltozási energiasűrűség függvény maximuma az elsődleges terhelési úton adott terhelési szint mellett, r és β dimenziótlán, míg m W -vel megegyező dimenziójú anyagjellemző, ahol $r > 1$, $m \geq 0$ és $\beta \geq 0$ (m és β paraméterek egyszerre nem lehetnek zérusok). Továbbá, definíció szerint $W^*(I_1, I_2) \leq W_{\max}$ amiből adódóan $\eta \leq 1$. Mivel $r > 1$, ezért a károsodási paraméternek pozitívnak kell lennie, továbbá a minimum értéke (η_m) az anyag tehermentesített, feszültségmentes állapotában ($\lambda = 1$, $W^* = 0$) adódik, ekkor

$$\eta_m = 1 - \frac{1}{r} \operatorname{erf} \left(\frac{W_{\max}}{m + \beta W_{\max}} \right). \quad (7)$$

Vagyis a károsodási paraméter $\eta_m \leq \eta \leq 1$ értékek között folytonosan (monoton módon) változhat.

2.1. Vízko-pszeudoelasztikus anyagmodell

A konstitutív egyenlet – amely tehát a pszeudoelasztikus és a véges alakváltozásokra érvényes vízkoelasztikus modell összekapcsolásával nyerhető – a Cauchy-féle feszültségtenzor segítségével, térfogat állandóságot feltételezve az alábbi alakban írható fel

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(t) = & \boldsymbol{\sigma}_0^D(t, \eta^*) + \boldsymbol{\sigma}^H(t, \eta^*) - \\ & - \operatorname{DEV} \left[\sum_{i=1}^N \frac{g_i}{\tau_i} \int_0^t \mathbf{F}_i^{-1}(t-s) \boldsymbol{\sigma}_0^D(t-s, \eta^*) \mathbf{F}_i^{-T}(t-s) e^{-s/\tau_i} ds \right], \end{aligned} \quad (8)$$

ahol $\boldsymbol{\sigma}_0^D(t, \eta^*)$ a végtelen gyors terheléshez tartozó Cauchy-féle feszültségtenzor deviátoros része, míg $\boldsymbol{\sigma}^H(t, \eta^*)$ a Cauchy-féle feszültségtenzor hidrosztatikus része. A DEV operátor megadja az adott tenzor deviátoros részét, $\mathbf{F}_i(t-s) = \mathbf{F}(t-s)\mathbf{F}^{-1}(t)$ a relatív alakváltozási gradiens, g_i az i -edik relatív rugalmassági modulus, τ_i az i -edik relaxációs idő, míg N a Prony tagok száma. Továbbá η^* a módosított károsodási paraméter, amely a (6) egyenlettel adott összefüggéshez képest kismértékben eltérő, aminek oka, hogy a Mullins-hatást leíró konstitutív modell a vízkoelaszticitással kombinálva a végtelen lassú terheléshez tartozó, relaxált viselkedésre vonatkozik. Vagyis, ebben az esetben a károsodási paramétert a relaxált relatív modulussal szükséges módosítani. Azaz a módosított károsodási paraméter az alábbi formában adható meg

$$\eta^* = 1 - g_\infty \frac{1}{r} \operatorname{erf} \left(\frac{W_{\max} - W^*(I_1, I_2)}{m + \beta W_{\max}} \right), \quad (9)$$

ahol g_∞ a relaxált relatív modulus, amely a relatív rugalmassági modulus ismeretében az alábbi módon számolható

$$g_\infty = 1 - \sum_{i=1}^N g_i. \quad (10)$$

2.3 Feszültségválasz egytengelyű húzás esetén
Egytengelyű húzó/nyomó igénybevitel esetén az alakváltozási gradiens az alábbi alakban adható meg

$$\mathbf{F} = \operatorname{diag} \left[\lambda \quad \lambda^{-1/2} \quad \lambda^{-1/2} \right], \quad (11)$$

ahol diag a diagonális mátrixot, míg λ a terhelés irányába eső nyúlást jelöli. Az alakváltozási gradiens felírásánál felhasználtuk, hogy az

anyag összenyomhatatlan, azaz $\det \mathbf{F} = 1$, valamint, hogy izotróp, azaz a terhelésre merőleges irányokban a nyúlások megegyeznek egymással, azaz $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda^{-1/2}$. Az alakváltozási gradiens ismeretében számolható a relatív alakváltozási gradiens, így a (8) egyenlet alapján meghatározható az egytengelyű igénybevételi módhoz tartozó konstitutív egyenlet. A levezetéshez segítséget nyújt a szerzők egy korábbi publikációja [7]. Vagyis az egytengelyű húzásra érvényes viszkopseudoelasztikus feszültségválasz az alábbi alakban adható meg

$$P(t) = \eta^* P_0(t) - \frac{1}{3} \sum_{i=1}^N \frac{g_i}{\tau_i} \int_0^t \left(\frac{2\lambda(t)}{\lambda(t-s)} + \frac{\lambda^2(t-s)}{\lambda^2(t)} \right) \eta^* P_0(t-s) e^{-s/\tau_i} ds, \quad (12)$$

ahol $P(t)$ a teljes (időfüggő) mérnöki feszültségválasz, míg $\eta^* P_0(t)$ a Mullins-hatást is figyelembe vevő pseudoelasztikus (időfüggetlen) mérnöki feszültségválasz, ahol a károsodási paraméter a (9) egyenlettel adott. Továbbá $P_0(t)$ egy tetszőleges összenyomhatatlan hiperelasztikus anyagmodell által adott feszültségválasz. Megjegyzendő, hogy a Cauchy-féle feszültségválasz helyett a mérnöki feszültségválaszt adtuk meg, aminek oka, hogy az anyagvizsgálatok során ez a feszültség számítható közvetlenül a mérési eredményekből.

3. ANYAGPARAMÉTEREK MEGHATÁROZÁSA

A (12) egyenlettel adott konstitutív egyenlet egy nemlineáris konvolúciós integrál, amelynek analitikus (zárt alakú) megoldása még ebben az egytengelyű esetben sem lehetséges. Éppen ezért a konstitutív konstansok meghatározására az inverz paraméterillesztési módszer került alkalmazásra, ahol a numerikus megoldó az Abaqus végelem szoftver, míg külső optimalizációs szoftver az MCalibration [8]. A módszer alkalmazhatóságának vizsgálata érdekében egy EPDM gumi ciklikus, egytengelyű húzásra érvényes mérési eredményeit használtuk fel [4]. A mechanikai modellezés során az anyag nemlineárisan rugalmas (időfüggetlen) viselkedését a Yeoh-féle összenyomhatatlan, hiperelasztikus anyagmodellel vettük figyelembe. A modell előnye, hogy korlátozott igénybevételi módokhoz tartozó mérési eredmények mellett is képes az anyagválasz pontos leírására. A

modell az alábbi alakváltozási energiasűrűség függvénnyel definiálható

$$W^* = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3, \quad (13)$$

ahol C_{10} , C_{20} és C_{30} anyagparaméterek. A Mullins-hatást modellezése során a károsodási paramétert a (9) egyenlet definiálja. Az időfüggő (viszkózus) viselkedést négytagú Prony-sorozattal ($N = 4$) vettük figyelembe. Az anyagállandóknak bizonyos korlátozó feltételeket teljesíteniük kell. Egyrészt, a hiperelasztikus modell paraméterek nem sérthetik a Drucker-féle stabilitási feltételt, másrészt a Prony-paramétereknek és a pseudoelasztikus modellben szereplő paramétereknek a következő feltételeket kell teljesíteniük

$$\sum_{i=1}^N g_i < 1, \quad g_i > 0, \quad \tau_i > 0, \quad (14)$$

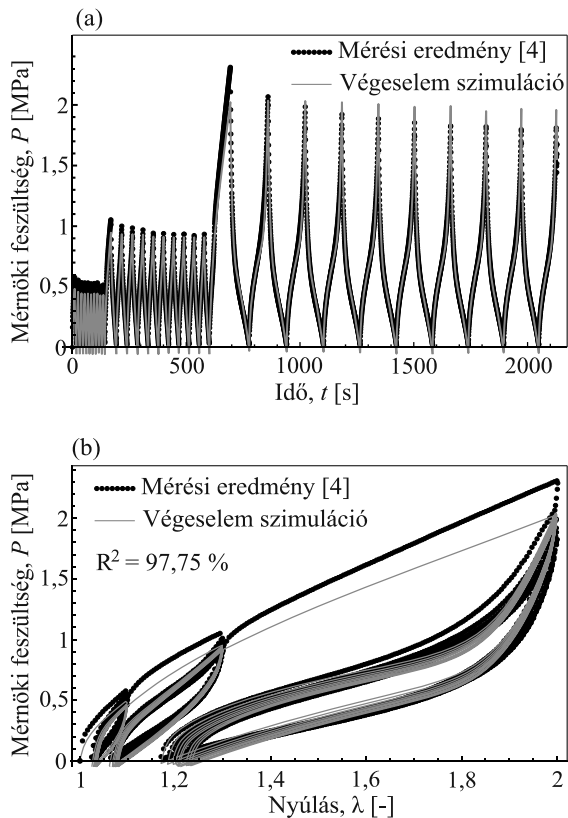
$r > 1, \quad m \geq 0, \quad \beta \geq 0, \quad \text{és ha } m = \beta \neq 0.$

Továbbá a nagyszámú meghatározandó anyagparaméterek miatt a relaxációs idők (τ_i) értékeit előre rögzítettük szakirodalmi ajánlások és az anyagállandók fizikai tartalmuk alapján. Ezzel csökkenthető a számítási kapacitás, elhanyagolható pontosságcsökkenés mellett. Az inverz paraméterillesztési módszerrel kapott, optimalizált anyagparamétereket, illetve az általunk felvett relaxációs időket az 1. táblázat tartalmazza.

1. táblázat. Az inverz paraméterillesztési módszerrel kapott anyagparaméterek.

Yeoh-féle hiperelasztikus modell paraméterei			
C_{10} [MPa]	C_{20} [MPa]	C_{30} [MPa]	
2,90	-0,016	0,0087	
Prony paraméterek ($N = 4$)			
g_1 [-]	τ_1 [s]	g_2 [-]	τ_2 [s]
0,725	1	0,0805	10
g_3 [-]	τ_3 [s]	g_4 [-]	τ_4 [s]
0,00941	100	0,0279	1000
Pseudoelasztikus modell paraméterei			
r [-]	m [MPa]	β [-]	
1,091	1,202	0,05	

Az 1. táblázatban szereplő anyagparamétereket felhasználva elvégeztük a mérési konfiguráció végelem szimulációját az Abaqus végelem szoftver segítségével. A kapott mérnöki feszültségválaszt az idő és a nyúlás függvényében, valamint a mérési eredményeket a 2. (a) és (b) ábrák mutatják.



2. ábra. A mért és a numerikusan számolt mérnöki feszültségválasz egytengelyű ciklikus igénybevétel esetén: (a) az idő függvényében (b) a nyúlás függvényében.

A 2.(a) és (b) ábrákon látható, hogy az inverz paraméterillesztési módszerrel meghatározott anyagparamétereket felhasználva a viszko-pseudoelasztikus anyagmodell megfelelő pontossággal képes leírni az EPDM gumi összetett anyagi viselkedését. Az illesztésre vonatkozó determinációs együttható (R^2) 97,75 %. Azaz megállapítható, hogy az anyagmodell képes a nemlineárisan rugalmas és a viszkoelasztikus (időfüggő) anyagi viselkedés mellett a Mullins-hatást is pontosan figyelembe venni. Megjegyzendő, hogy az anyagi viselkedés modellezése során feltételeztük, hogy a feszültség-nyúlás diagramon (1.(b) ábra) megfigyelhető „maradó” nyúlások a viszkoelasztikus anyagi viselkedés következményei.

4. ÖSSZEFOGLALÁS

Bemutatásra került a viszko-pseudoelasztikus anyagmodell, amely képes figyelembe venni a gumi-szerű anyagokra jellemző összetett mechanikai viselkedést. Az anyagmodell alkalmazhatóságának fontos feltétele a benne szereplő anyagállandók minél pontosabb meghatározása. Ebben a cikkben az inverz paraméterillesztési módszer került

alkalmazásra, amelynek lényege, hogy a rendelkezésre álló mérési eredmény és a végelem módszerrel számolt anyagválasz között bevezetett hibafüggvény kerül minimalizálásra. A kapott eredmények alátámasztják, hogy a meghatározott anyagparaméterekkel a viszko-pseudoelasztikus anyagmodell képes a gumi-szerű anyagok mechanikai modellezésére, így hozzájárulva az alkatrészek megfelelő pontosságú, végelem módszerrel történő numerikus előrejelzéséhez.

5. KÖSZÖNETNYÍLVÁNÍTÁS

A TANULMÁNY AZ INFORMÁCIÓS ÉS TECHNOLÓGIAI MINISZTERIUM ÚNKP-19-3 KÓDSZÁMÚ ÚJ NEMZETI KIVÁLÓSÁG PROGRAMJÁNAK SZAKMAI TÁMOGATÁSÁVAL KÉSZÜLT. FAZEKAS BÁLINT PHD HALLGATÓ EZ ÚTON IS KÖSZÖNETÉT FEJEZI KI A TÁMOGATÁSÉRT.



6. IRODALOM

- [1] Kohjiya, S., Yuko, I. 2014. Chemistry, Manufacture and Applications of Natural Rubber. 1st Edition. Elsevier.
- [2] Mullins, L., 1948. Effect of stretching on the properties of rubbers. Rubber Chemistry and Technology. 21, 281–300.
- [3] Ogden, R.W., Roxburgh, D.G., A, P.R.S.L., 1999. A pseudo-elastic model for the Mullins effect in filled rubber. Proc. R. Soc. Lond. A. 455, 2861–2877.
- [4] Dalrymple, T., Puergstaller, A. 2017. Calibration of advanced material models for elastomers. ECCMR 2017, Munich, Germany.
- [5] Fazekas, B., Goda, T.J., 2018. Determination of the hyper-viscoelastic model parameters of open-cell polymer foams and rubber-like materials with high accuracy. Mater. Des. 156, 596–608.
- [6] Abaqus 6.14 version, Dassault Systemes, 2016.
- [7] Fazekas, B., Goda, T.J., 2019. Closed-form and numerical stress solution-based parameter identification for incompressible hyper-viscoelastic solids subjected to various loading modes. Int. J. Mech. Sci. 151, 650–660.
- [8] Veryst 2017, MCalibration software from Veryst Engineering, Needham, MA.