

RADIÁLISAN POLARIZÁLT GÖMB KIVÁGÁSSAL GYENGÍTETT VÉGTELEN PIEZOELEKTROMOS TEST EGY STATIKAI FELADATA

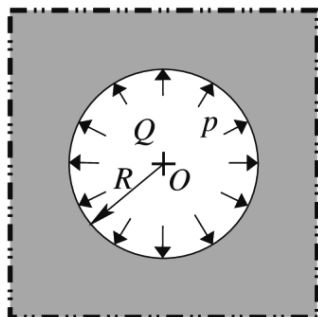
STATIC ANALYSIS OF RADIALY POLARIZED PIEZOELECTRIC SPACE WITH A SPHERICAL CAVITY

*Ecsedi István, Professor Emeritus, Miskolci Egyetem, Műszaki Mechanikai Intézet;
Baksa Attila, egyetemi docens, PhD, Miskolci Egyetem, Műszaki Mechanikai Intézet*

ÖSSZEFOGLALÁS (ABSTRACT). The static linear response of radially polarized piezoelectric space with a spherical cavity is studied. The applied mechanical load are uniform pressure acting on the curved boundary of cavity, and the source of electric load is a concentrated charge positioned at the center of spherical cavity. The paper gives the solution of the above defined spherically symmetric boundary value problem for displacement, stresses, electric potential and elastic displacement vector.

1. BEVEZETÉS

A piezoelektromosság olyan kapcsolt mechanikai-elektromos jelenség, amelynek során bizonyos anyagokon, mint például nem centrálisan szimmetrikus kristályokon, kerámiákon mechanikai terhelés hatására elektromos tér keletkezik, illetve elektromos tér hatására mechanikai alakváltozás jön létre. A piezoelektromos szerkezeti komponensek vizsgálata mechanikai és villamosságtani ismereteken alapul. E tanulmány tárgyát radiálisan polarizált gömb alakú kivágással gyengített végtelen kiterjedésű piezoelektromos test egy gömbszimmetrikus peremérték feladatának az analitikus megoldása alkotja.



1. ábra. Gömbi kivágással gyengített piezoelektromos test.

A vizsgált végtelen kiterjedésű gömbi kivágással gyengített piezoelektromos testet az 1. ábra szemlélteti az alkalmazott mechanikai és

elektromos terheléssel együtt. A feladat szimmetriájából következik, hogy valamennyi mechanikai és elektromos változó csak az r radiális koordináta függvénye.

A gömbszimmetrikus feladat megoldására az alábbi egyenleteket használjuk [1,2].

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\varphi = \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad (1)$$

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2}{r}(\sigma_r - \sigma_\varphi) = 0, \quad \sigma_\varphi = \sigma_\theta, \quad (2)$$

$$D_r = \frac{Q}{4\pi r^2}, \quad E_r = -\frac{\partial U}{\partial r}, \quad (3)$$

$$\sigma_r = c_{33}\varepsilon_r + 2c_{13}\varepsilon_\varphi - e_{33}E_r, \quad (4)$$

$$\sigma_\varphi = c_{13}\varepsilon_r + (c_{11} + c_{12})\varepsilon_\varphi - e_{31}E_r, \quad (5)$$

$$D_r = e_{33}\varepsilon_r + 2e_{31}\varepsilon_\varphi + \kappa_{33}E_r, \quad (6)$$

$$\sigma_r(R) = -p, \quad \sigma_r(\infty) = 0, \quad (7)$$

$$u_r(\infty) = 0, \quad U(\infty) = 0. \quad (8)$$

Az (1)-(8) egyenletekben a különböző szimbólumok jelentése a következő:

- u a radiális elmozdulás,
- $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_\theta$ normálfeszültségek,
- $\varepsilon_r, \varepsilon_\varphi, \varepsilon_\theta$ fajlagos nyúlások,
- E_r a villamos térerősség vektor radiális komponense,
- D_r a villamos eltolás vektor radiális komponense,
- $c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{33}$ rugalmassági merevség állandói,
- κ_{33} dielektromos állandó,
- e_{31}, e_{33} piezoelektromos állandók,
- U villamos potenciál,
- p nyomás (1. ábra)
- Q koncentrált töltés (1. ábra)

2. PEREMÉRTÉK FELADAT MEGFOGALMAZÁSA ÉS MEGOLDÁSA

A (2), (4) és (5) egyenletek kombinálásával az alábbi egyenlet nyerhető az $u = u(r)$ radiális elmozdulásra

$$c_{33} \frac{d^2 u}{dr^2} + 2 \frac{c_{33}}{r} \frac{du}{dr} + \frac{2}{r^2} (c_{13} - c_{11} - c_{12}) u + e_{33} \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{2}{r} (e_{33} - e_{31}) \frac{dU}{dr} = 0. \quad (9)$$

A Gauss egyenlet felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$D_r = \frac{Q}{4\pi r^2}. \quad (10)$$

A (6) egyenletből az következik, hogy

$$\frac{dU}{dr} = \frac{e_{33}}{\kappa_{33}} \frac{du}{dr} + 2 \frac{e_{31}}{\kappa_{33}} \frac{u}{r} - \frac{Q}{4\pi \kappa_{33} r^2}. \quad (11)$$

A (11) egyenlet (9) egyenletbe helyettesítésével azt kapjuk, hogy

$$C_3 \frac{d^2 u}{dr^2} + 2 \frac{C_3}{r} \frac{du}{dr} - 2C_1 \frac{u}{r^2} + \frac{C_2}{r^3} Q = 0, \quad (12)$$

ahol

$$C_1 = c_{11} + c_{12} - \frac{e_{31}^2}{\kappa_{33}}, \quad (13)$$

$$C_2 = \frac{e_{31}}{2\pi \kappa_{33}}, \quad (14)$$

$$C_3 = c_{33} + \frac{e_{31}^2}{\kappa_{33}}. \quad (15)$$

A (12) differenciálegyenlet végtelenben ($r \rightarrow \infty$) korlátos megoldása az alábbi függvény

$$u(r) = kr^\lambda + \frac{C_2}{2C_1} \frac{Q}{r}, \quad (16)$$

ahol

$$\lambda = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + 2 \frac{C_1}{C_3}}. \quad (17)$$

A (11) és a (16) egyenletekből az következik, hogy

$$U(r) = \frac{e_{33}}{\kappa_{33}} \left(kr^\lambda + \frac{C_2}{2C_1} \frac{Q}{r} \right) + \frac{2e_{31}}{\kappa_{33}} \frac{k}{\lambda} r^\lambda - \frac{C_2}{2C_1} \frac{Q}{r} + \frac{1}{2\pi \kappa_{33}} \frac{Q}{r^3}. \quad (18)$$

A $\sigma_r = \sigma_r(r)$ és a $\sigma_\varphi = \sigma_\varphi(r)$ normálfeszültségek számítása az (1), (3), (4) és (5) egyenletekből levezethető képletek alapján történik azaz

$$\sigma_r(r) = c_{33} \frac{du}{dr} + 2c_{13} \frac{u(r)}{r} + e_{33} \left(\frac{e_{33}}{\kappa_{33}} \frac{du}{dr} + 2 \frac{e_{31}}{\kappa_{11}} \frac{u(r)}{r} - \frac{Q}{4\pi \kappa_{33} r^2} \right), \quad (19)$$

$$\sigma_\varphi(r) = c_{13} \frac{du}{dr} + (c_{11} + c_{12}) \frac{u(r)}{r} + e_{31} \left(\frac{e_{33}}{\kappa_{33}} \frac{du}{dr} + 2 \frac{e_{31}}{\kappa_{11}} \frac{u(r)}{r} - \frac{Q}{4\pi \kappa_{33} r^2} \right). \quad (20)$$

Az $u = u(r)$, a $U = U(r)$ valamint a $\sigma_r = \sigma_r(r)$ és $\sigma_\varphi = \sigma_\varphi(r)$ normálfeszültségek képleteiben szereplő k állandó értéke a

$$\sigma_r(R) = -p, \quad (21)$$

feszültségi peremfeltétel alapján határozható meg. Értékére az alábbi eredményt tudjuk levezetni.

$$k = k_1 + k_2, \quad (22)$$

$$k_1 = \frac{1}{4} \frac{4c_{13}\kappa_{33}C_2Q - 2c_{33}\kappa_{33}C_2Q - 2e_{33}^2C_2Q}{C_1(c_{33}\kappa_{33}\lambda + 2c_{13}\kappa_{33} + e_{33}^2\lambda + 2e_{33}e_{31})R^{\lambda+1}}, \quad (23)$$

$$k_2 = \frac{1}{4} \frac{(4e_{33}e_{31}C_2Q + p\kappa_{33}C_1R^2)\pi - e_{33}C_1Q}{C_1(c_{33}\kappa_{33}\lambda + 2c_{13}\kappa_{33} + e_{33}^2\lambda + 2e_{33}e_{31})R^{\lambda+1}}. \quad (24)$$

A feszültségmező kiértékelését segíti az ekvivalens von Mises feszültség kiszámítása, amelynek meghatározása az alábbi egyenlet alapján történik [3]

$$\sigma_M(r) = \sqrt{\sigma_r^2(r) - \sigma_r(r)\sigma_\varphi(r) + \sigma_\varphi^2(r)}. \quad (25)$$

Az elektromos térerősség radiális komponensére a (3) és a (18) egyenletek kombinálásával az

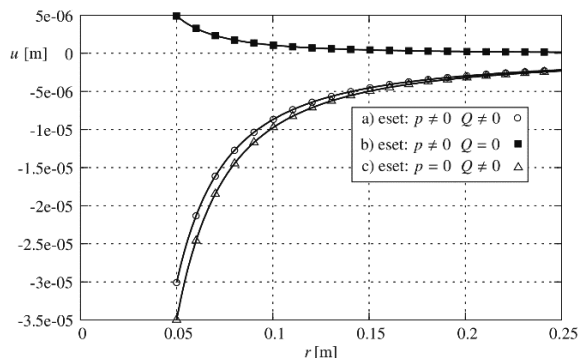
$$E_r(r) = \frac{1}{\pi C_1 \kappa_{33} r^2} (4\pi e_{33} k \lambda C_1 r^{\lambda+1} + 8\pi e_{31} k C_1 r^{\lambda+1} - 2\pi e_{33} C_2 Q + 4\pi e_{31} C_2 Q - Q C_1) \quad (26)$$

eredmény vezethető le.

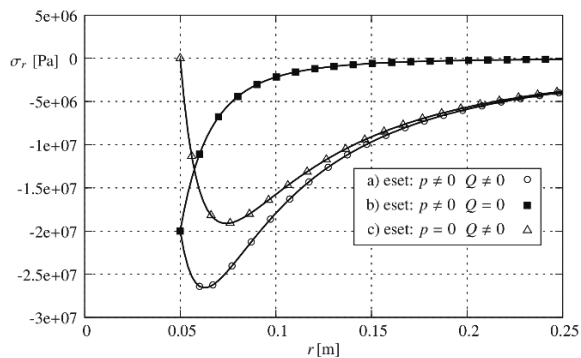
Három fajta peremértékfeladat megoldásával foglalkozunk, attól függően, hogy a p mechanikai terhelés (nyomás) és a Q töltés milyen kombinációban kerül előírásra. Ezek az alábbiak:

- „0” jelű feladat: $p \neq 0, Q \neq 0$,
- „1” jelű feladat: $p \neq 0, Q = 0$,
- „2” jelű feladat: $p = 0, Q \neq 0$.

A „0” jelű feladatban $u = u(r)$ a radiális elmozdulást, $U = U(r)$ pedig a villamos feszültséget jelöli. Az „i” ($i = 1, 2$) jelű feladatokban a radiális elmozdulást $u_i = u_i(r)$ és a villamos feszültséget pedig $U_i = U_i(r)$ jelöli.



2. ábra. Radiális elmozdulások.



3. ábra. Radiális normál feszültségek.

A kapott analitikus megoldásokat a lineáris piezoelektromos testekre érvényes Betti-Rayleigh felcserélhetőségi tétel [3] alkalmazásával is ellenőrizzük. A szóban forgó tétel alapján érvényes az alábbi három egyenlet:

$$B_{01} = 4\pi R^2 pu_1(R) - 4\pi R^2 pu(R) + QU_1(R) = 0, \quad (27)$$

$$B_{02} = 4\pi R^2 pu_2(R) - QU(R) + QU_2(R) = 0, \quad (28)$$

$$B_{12} = 4\pi R^2 pu_2(R) - QU_1(R) = 0. \quad (29)$$

3. NUMERIKUS PÉLDÁK

A numerikus példák a következő adatokkal kerültek kiszámításra:

$$R = 0,05 \text{ m}, \quad p = 20 \times 10^6 \text{ Pa}, \quad Q = 2 \times 10^{-3} \text{ C},$$

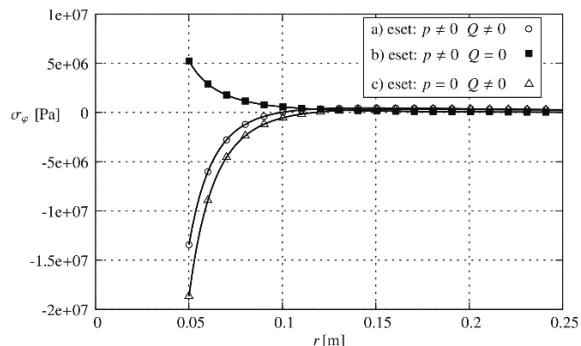
$$c_{11} = 12,6 \times 10^{10} \text{ Pa}, \quad c_{12} = 7,96 \times 10^{10} \text{ Pa},$$

$$c_{13} = 8,39 \times 10^9 \text{ Pa}, \quad c_{33} = 11,7 \times 10^{10} \text{ Pa},$$

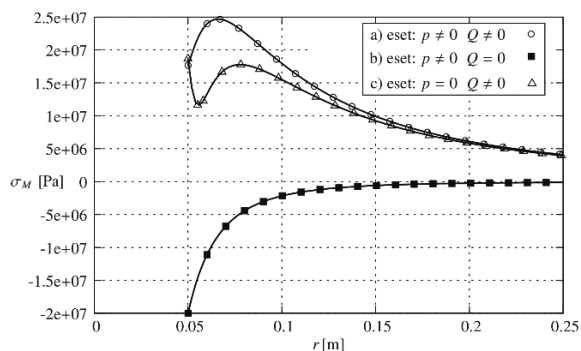
$$e_{31} = -6,5 \text{ C/m}^2, \quad e_{33} = 23,3 \text{ C/m}^2,$$

$$\kappa_{33} = 1,302 \times 10^{-8} \text{ C/Vm}.$$

A 2. ábra szemlélteti a három terhelési esethez tartozó radiális elmozdulások függvény görbéit. Mindhárom terhelési esetre a normál feszültségek $\sigma_r = \sigma_r(r)$ és $\sigma_\varphi = \sigma_\varphi(r)$ függvények grafikonjait a 3. ábra (σ_r) és a 4. ábra (σ_φ) tartalmazza. Az egyes terhelési esetekhez tartozó von-Mises feszültségek függvény görbéit az 5. ábrában adtuk meg.



4. ábra. Tangenciális normál feszültségek.



5. ábra. Von Mises feszültség.

A „0”, „1” és „2” terhelési előírásokhoz tartozó U villamos potenciálok és az E_r térerősség komponens grafikonjait a 6. ábrában (U) és a 7. ábrában (E_r) adtuk meg. A felírt numerikus számadatokkal a Betti-Rayleigh reciprocitási relációból az alábbi eredményeket nyerjük:

$$B_{01} = -2 \times 10^{-8} \text{ Nm}, \quad B_{02} = 0, \quad B_{12} = 0. \quad (30)$$

A fenti eredmények megerősítik a kidolgozott analitikus eljárás helyességét.

6. KÖVETKEZTETÉSEK

A tanulmány gömb alakú kivágással gyengített végtelen kiterjedésű radiálisan polarizált lineáris piezoelektromos test egy statikai problémájának analitikus megoldásával foglalkozik. A gömbi kivágás peremén előírt normál feszültség működik, továbbá a gömbi kivágás

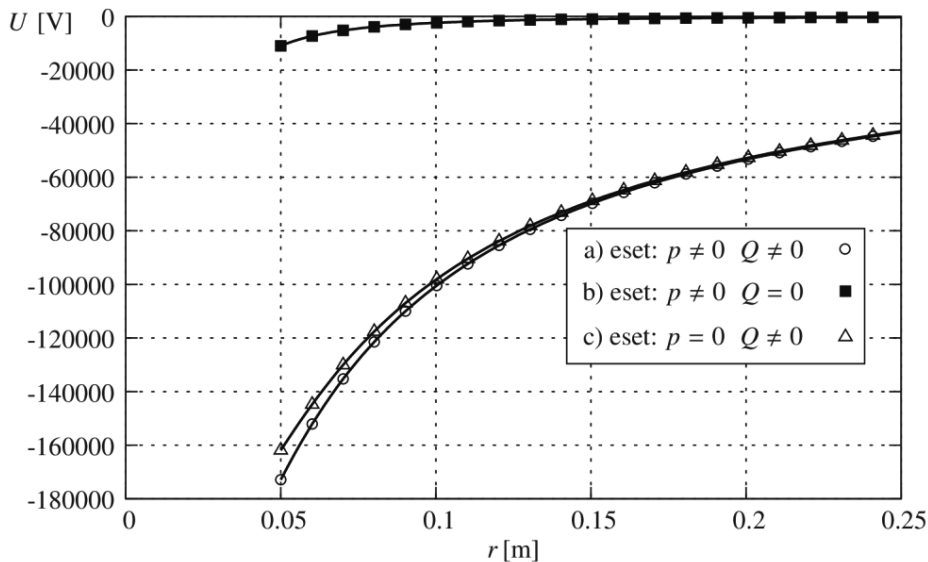
középpontjában egy Q nagyságú koncentrált töltés van elhelyezve. A tanulmány az alkalmazott terhelési előírások három kombinációjával foglalkozik. Megadja mindhárom esetre a radiális elmozdulás, a normálfeszültség, a villamos potenciál, a villamos térerősség és a villamos elmozdulás vektor képleteit. A kapott eredményeket több ábra szemlélteti és a levezetett numerikus eredményeknek a Betti-Rayleigh típusú felcserélhetőségi tétel alkalmazásával történő ellenőrzése is bemutatott. A numerikus példa eredményei közvetlenül használhatók különböző numerikus eljárások pontosságának a vizsgálatára.

Köszönetnyilvánítás: A tanulmány elkészítését a Nemzeti Kutatási és Fejlesztési Hivatal (NKFIH) K115701 projektre támogatta. A cikkben ismertetett kutató munka az EFOP-3.6.1-16-2016-00011 jelű

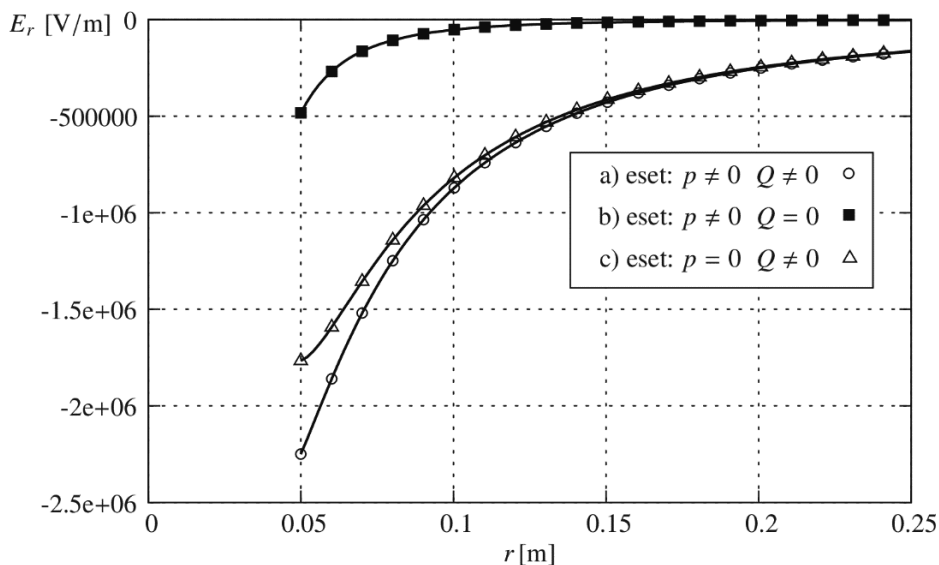
„Fiatalodó és Megújuló Egyetem – Innovatív Tudásváros – a Miskolci Egyetem intelligens szakosodást szolgáló intézményi fejlesztése” projekt részeként – a Széchenyi 2020 keretében – az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.

6. IRODALOM

- [1] J.S. Yang, An Introduction to the Theory of Piezoelectricity, Springer, New York, 2005.
- [2] J.S. Yang, The Mechanics of Piezoelectric Structures, World Scientific, London, 2005.
- [3] Q.H. Quin, Green's Functions and Boundary Elements of Multifield Materials, Elsevier, Amsterdam, 2007.



6. ábra. Villamos feszültségek.



7. ábra. Villamos térerősségek.