

HIPERSZINGULÁRIS INTEGRÁLEGYENLETEK ELSŐRENDŰ FESZÜLTSEGFÜGGVÉNYEKSEL L ALAKÚ ORTOTROP TEST PEREMÉN VÉGZETT FESZÜLTSEGSZÁMÍTÁSRA

HYPERSINGULAR INTEGRAL EQUATIONS FOR THE TRAC-TIONS ON ORTHOTROPIC L-SHAPED BODIES IN TERMS OF FIRST-ORDER STRESS FUNCTIONS

Szirmik Sándor, PhD, egyetemi docens, Miskolci Egyetem, Műszaki Mechanikai Intézet

ABSTRACT

This paper is devoted to the stress analysis with hypersingular integral equation is applied to plane strain problems of L-shaped bodies under the assumption that the material is orthotropic. The accuracy of stress computations on the boundary is greatly increased if one applies hypersingular integral equations instead of utilizing the traditional computational techniques of the boundary element method [1], [2]. It is a further advantage that the stress components can be computed directly by taking the derivatives of the first-order stress functions [4].

1. BEVEZETÉS

A feszültségszámítás pontosítása a peremgörbén elsődleges feladat, mivel a hagyományos peremelemes feszültségszámítás a perem menti polinomiális közelítések deriváltjait használja fel, melyek képzése komoly hibaforrást jelent a formalizmusban különösen akkor, ha viszonylag jelentős a feszültségek perem menti megváltozása. A számítási eredmények azt bizonyítják, hogy a hiperszinguláris egyenletek alapján kifejlesztett kóddal a számítások numerikus pontossága már viszonylag alacsony elemszám mellett is lényegesen növelhető. A jelen tanulmány ezzel a kérdéssel foglalkozik a rugalmasságtan ortotrop síkfeladatai körében elsőrendű feszültségfüggvények alkalmazása mellett. Ebben az ún. duál rendszerben a [3] alatti tanulmány dolgozta ki a vonatkozó peremelemes formalizmust. A hiperszinguláris eljárás további előnye a hagyományos feszültségszámítási eljárással szemben, hogy közvetlenül szolgáltatja a jelentkező feszültségeloszlást mégpedig a teljes peremgörbe

bármely pontjában [4]. A bevezetésre kerülő számítási eljárás pontosságát feszültségszűcs környezetében, kis elemszám mellett jól demonstrálja a vizsgált L alakú tartományon kitűzött peremérték-feladat.

2. PEREMELEM MÓDSZER ELSŐRENDŰ FESZÜLTSEGFÜGGVÉNYEKSEL

A vizsgálatok tárgya egy ortotrop rugalmas test síkfeladata, azaz egy egyszeresen összefüggő, L_o peremgörbével határolt A_i belső tartományra előírt peremérték-feladat. A vonatkozó egyenletek felírásakor használt ún. indexes jelölésmódban a görög alsó indexek értéke 1, 2 lehet. x (x_1, x_2) futópontot, míg y (y_1, y_2) egy rögzített forráspontot jelöl. Elsőrendű feszültségfüggvények bevezetése után a síktartomány peremívén $u_\lambda(x)$ feszültségfüggvények – ezek képezhetők az előírt feszültségekből, és $t_\lambda(x) = -du_\lambda/ds$ elmozdulás deriváltak a vagylagosan előírható peremfeltételek. A peremelem módszer szokásos egyenletei az alábbiak:

$$u_\kappa(y) = \oint_{L_o} U_{\kappa\lambda}(x, y)t_\lambda(x)ds_x - \oint_{L_o} T_{\kappa\lambda}(x, y)u_\lambda(x)ds_x \quad y \in A_i, \quad (1)$$

$$c_{\kappa\lambda}u_\lambda(y) = \oint_{L_o} U_{\kappa\lambda}(x, y)t_\lambda(x)ds_x - \oint_{L_o} T_{\kappa\lambda}(x, y)u_\lambda(x)ds_x \quad y \in L_o, \quad (2)$$

$$0 = \oint_{L_o} U_{\kappa\lambda}(x, y)t_\lambda(x)ds_x - \oint_{L_o} T_{\kappa\lambda}(x, y)u_\lambda(x)ds_x \quad y \notin L_o \cup A_i, \quad (3)$$

ahol az elsőrendű alapmegoldást $U_{\kappa\lambda}$, a másodrendű alapmegoldást $T_{\kappa\lambda}$ jelöli. $c_{\kappa\lambda}$ pedig az y pontbeli peremgörbe érintőktől függ. Az alapmegoldások mátrixelemeiben mindig megjelenik a futópont és a forráspont $r_\lambda = x_\lambda - y_\lambda$ távolságából képzett $\rho_\alpha = r_1 + \beta_\alpha r_2$ érték, melyben β_α egy

az ortotrop anyagjellemzőktől függő komplex-számot jelent [3]. Így az alapg megoldások az x jelű pont y forráspont-hoz való közeledésekor gyenge, logaritmikus ($\ln \rho_\alpha$) típusú, illetve erős (ρ_α^{-1}) szingularitást mutatnak. Az (1) és (3) integrálegyenletekben a szingularitási probléma nem jelentkezik. A peremérték-feladat numerikus implementációja során a vizsgált feladathoz tartozó tartomány zárt L_o peremgörbéje n_{be} darab, három csomópontú peremelemre osztott. Egyes csomópontokban tehát vagylagosan elsőrendű feszültségfüggvények, vagy elmozdulás deriváltak az ismeretlen mennyiségek. A megoldást a peremen felvett csomópontokban lévő ismeretlenekre a (2) integrálegyenlet numerikus megoldása adja. További részletek a kapcsolatos peremelemes formalizmusról, ortotrop síkrugalmasságtani feladatok duál rendszerbeli alapegyenletéről, a peremfeltételekről (feszültségfüggvények számítása a terhelt peremíveken) a [3] alatti munkában található. A terjedelmi korlátokra is tekintettel ezeket itt külön nem ismertetjük.

3. HIPERSZINGULÁRIS INTEGRÁLEGYENLETEK

Az elsőrendű feszültségfüggvények alkalmazásán alapuló hiperszinguláris integrálegyenlet levezetése a forrásponti szingularitás közvetlen kis környezetének A_i tartományból történő kizárását igényli. Ekképpen az y forráspontban ε sugárral rajzolt körlap A_i síktartományban eső részét távolítjuk el. Az ε sugarú körlap A_i -ben fekvő peremívét s_ε , az L_o megmaradó ívét pedig L_ε jelöli. Ez azt eredményezi, hogy a formalizmus alapja tartományon kívüli forráspont-ra érvényes (3) egyenlet lesz, amely végül a vonatkozó integrálok számításakor a forráspontot tartalmazó kis íven zárt alakú analitikus képletekre vezet. A (3) egyenlet y_ρ szerint vett parciális deriváltja – a ∂_ρ parciális deriváltat vessző után álló alsó indexpozíciójú ρ jelöli:

$$0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{L_\varepsilon} U_{\kappa\lambda,\rho}(x,y) t_\lambda(x) ds_x - \int_{L_\varepsilon} T_{\kappa\lambda,\rho}(x,y) u_\lambda(x) ds_x + \int_{s_\varepsilon} U_{\kappa\lambda,\rho}(x,y) t_\lambda(x) ds_x - \int_{s_\varepsilon} T_{\kappa\lambda,\rho}(x,y) u_\lambda(x) ds_x \right\}. \quad (4)$$

A deriválási művelet után adódó $D_{\kappa\lambda,\rho} = U_{\kappa\lambda,\rho}$ mátrixelemeinek ρ_α^{-1} típusú erős szingularitása lesz. Az $S_{\kappa\lambda,\rho} = T_{\kappa\lambda,\rho}$ mátrix elemeire pedig az ρ_α^{-2} típusú hiperszingularitás lesz jellemző. A vizsgált síkbéli tartomány határoló peremgörbéjén vett y forráspont kis környezetében a peremérték

feladat változóit folytonos és deriválható függvényei a helynek, így a forráspont kis környezetben fekvő x pontban rájuk vonatkozóan az

$$u_\lambda(x) = u_\lambda(y) + u_{\lambda,\delta}(y)(x_\delta - y_\delta) + O(r^2) \quad (5)$$

és

$$t_\lambda(x) = -u_{\lambda,\pi}(y) Q_{3\rho\pi} n_\rho(x) = -u_{\lambda,\pi}(y) \tau_\pi(x) \quad (6)$$

közelítő összefüggések érvényesek – τ_π a peremgörbe érintő egységvektora. Ez azt jelenti hogy y pontbeli értékek (függvényérték és deriváltja) határozzák meg a vonatkozó függvények kis környezetbeli viselkedését. A (5) és (6) összefüggések (4) egyenletbe történő behelyettesítése és az identikusan zérust adó tagok törlése után (a részletes igazolást itt most nem részletezve) jutunk el a feszültség számítás képletéhez. A numerikus implementáció során az n_{be} peremelemre osztott peremgörbén a feszültség számításra szolgáló képletben elkülöníthetők az y forráspontot tartalmazó elem feletti integrálok, amelyek a szingularitásokat kizárólagosan tartalmazzák. Ezek mélyebb analízise a [2] tanulmány alapján igazolja, hogy numerikus integrálásuk nehézségei ellenére analitikusan jól kezelhetők.

4. INTEGRÁLÁS A SZINGULARITÁST TARTALMAZÓ PEREMELEM FELETT

A peremelemek csomópontjaiban a lokális csomóponti sorszámozás sorrendjében vett megoldásokból, a Lagrange polinomok alkalmas elrendezésével nyert N_{λ_j} approximációs mátrix felhasználásával, a $[-1,1]$ intervallumra vonatkozó lokális koordinátára ($x \rightarrow \xi$ és $y \rightarrow \eta$) történő áttérés mellett az

$$u_\lambda(\xi) = N_{\lambda_j}(\xi) u_j^e \text{ és } t_\lambda(\xi) = N_{\lambda_j}(\xi) t_j^e \quad (7)$$

formában áll elő a peremelemek felett a feszültségfüggvény és az elmozdulás derivált vektor közelítése ($j=1, \dots, 6$). Ezekkel a (4) egyenlet átírható a

$$t_{\psi\kappa}(y) = 2Q_{3\rho} \left[\sum_{e=1, e \neq m}^{n_{be}} \int_{\mathbb{R}^2} D_{\kappa\lambda,\rho}(\xi,\eta) N_{\lambda_j}(\xi) J(\xi) d\xi t_j^e + \tilde{I}_{\kappa j \rho}^m u_j^m - \sum_{e=1, e \neq m}^{n_{be}} \int_{\mathbb{R}^2} S_{\kappa\lambda,\rho}(\xi,\eta) N_{\lambda_j}(\xi) J(\xi) d\xi u_j^e - I_{\kappa j \rho}^m u_j^m \right] \quad (8)$$

alakba, ahol $J(\xi)$ a Jacobi-féle függvénydetermináns. Ha $e \neq m$, akkor az integrálás a jól ismert Gauss szabállyal végezhető el. A számpéldában a 14 pontos, $[-1,1]$ intervallumra vonatkozó változat került alkalmazásra. A szingularitást hordozó m sorszámú elemhez tartozó R^m intervallumon és azon belül megjelenő az elemén lévő forrás-

pont kizárását jelentő ε sugarú kör által a peremelem görbéjéből kimetszett R_ε^m intervallumon a vonatkozó integrálás sorfejtés révén részben analitikusan lesz kezelhető. A továbbiakban a problémát jelentő hiperszinguláris

$$I_{\kappa j \rho}^m = \int_{R_\varepsilon^m} S_{\kappa j \rho}(\xi, \eta) N_{\lambda j}(\xi) J(\xi) d\xi = \int_{R_\varepsilon^m} F_{\kappa j \rho}^m(\xi, \eta) d\xi \quad (9)$$

integrálnak meghatározását taglaljuk. Az enyhébb erős szingularitást hordozó $\tilde{I}_{\kappa j \rho}^m$ integrálérték ehhez hasonlóképpen, de jóval egyszerűbben állítható elő. A szemi-analitikus képlet származtatásához sorfejtések ismerete szükséges. Ezek az y forráspontot tartalmazó R_m peremelemen tekintett $r_\lambda = x_\lambda - y_\lambda$ különbség sorfejtéséből származó

$$A_\lambda = \left. \frac{\partial x_\lambda}{\partial \xi} \right|_{\xi=\eta} = (x_\lambda^1 - 2x_\lambda^2 + x_\lambda^3)\eta + \frac{1}{2}(x_\lambda^3 - x_\lambda^1), \quad (10)$$

$$B_\lambda = \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 x_\lambda}{\partial \xi^2} \right|_{\xi=\eta} = \frac{1}{2}(x_\lambda^1 - 2x_\lambda^2 + x_\lambda^3), \quad (11)$$

tagok, valamint ezek felhasználásával az $S_{\kappa j \rho}$ mátrix minden elemében megjelenő szorzó a

$$\frac{1}{\rho_\alpha^2} = \frac{1}{(A_1 + \beta_\alpha A_2)^2 \delta^2} - 2 \frac{B_1 + \beta_\alpha B_2}{(A_1 + \beta_\alpha A_2)^3 \delta} + O(1) \quad (12)$$

sorfejtése, ahol

$$\delta = \xi - \eta. \quad (13)$$

Az előbbi sorfejtések figyelembe vétele után a (9) integrálban álló

$$F_{\kappa j \rho}^m(\xi, \eta) = \frac{{}^{-2}F_{\kappa j \rho}^m(\eta)}{(\xi - \eta)^2} + \frac{{}^{-1}F_{\kappa j \rho}^m(\eta)}{\xi - \eta} + O(1) \quad (14)$$

Laurent-sorként írható fel a forráspont környezetében, ahol ${}^{-2}F_{\kappa j \rho}^m(\eta)$ és ${}^{-1}F_{\kappa j \rho}^m(\eta)$ csak η függvényei, tehát konkrét számértékek rögzített η esetén. A vonatkozó (14) sort a (9) képlet integrandusából levonva, de egyúttal hozzá is adva azt – elkülönítve ezzel a szinguláris és nem szinguláris képletrészeket – adódik, hogy

$$I_{\kappa j \rho}^m = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{R_\varepsilon^m} \int_{R_\varepsilon^m} \left\{ F_{\kappa j \rho}^m(\xi, \eta) - \left[\frac{{}^{-2}F_{\kappa j \rho}^m(\eta)}{(\xi - \eta)^2} + \frac{{}^{-1}F_{\kappa j \rho}^m(\eta)}{\xi - \eta} \right] \right\} d\xi + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{R_\varepsilon^m} \frac{{}^{-2}F_{\kappa j \rho}^m(\eta)}{(\xi - \eta)^2} d\xi + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{R_\varepsilon^m} \frac{{}^{-1}F_{\kappa j \rho}^m(\eta)}{\xi - \eta} d\xi. \quad (15)$$

A (15) képlet első integrálja reguláris, mivel a vonatkozó $\varepsilon \rightarrow 0$ határátmenet elvégzése után egy a $(\xi - \eta)^n$ hatványaiból álló ($n \geq 0$) hatványsort kapunk. A második és harmadik tagra a határátmenetek elvégzése után már zárt alakú képletek

adódnak [4]. Így a hiperszingularitást tartalmazó integrál értékének számszerű meghatározására az

$$I_{\kappa j \rho}^m = \int_{-1}^1 \left\{ F_{\kappa j \rho}^m(\xi, \eta) - \left[\frac{{}^{-2}F_{\kappa j \rho}^m(\eta)}{(\xi - \eta)^2} + \frac{{}^{-1}F_{\kappa j \rho}^m(\eta)}{\xi - \eta} \right] \right\} d\xi - {}^{-2}F_{\kappa j \rho}^m(\eta) \left(\frac{1}{1+\eta} + \frac{1}{1-\eta} \right) + {}^{-1}F_{\kappa j \rho}^m(\eta) \ln \left| \frac{\eta-1}{1+\eta} \right|, \quad (16)$$

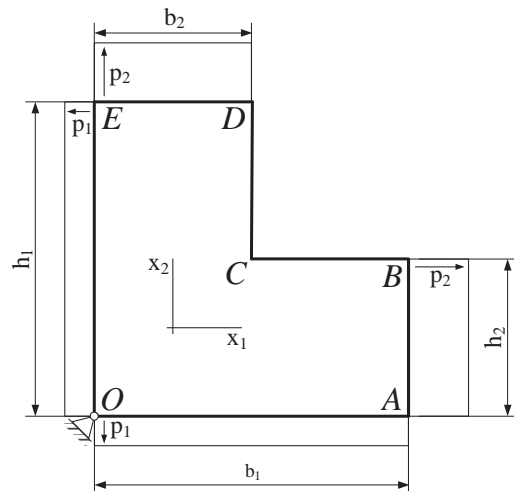
az erős szingularitást hordozó részre pedig az

$$\tilde{I}_{\kappa j \rho}^m = \int_{-1}^1 \left\{ G_{\kappa j \rho}^m(\xi, \eta) - \frac{{}^{-1}G_{\kappa j \rho}^m(\eta)}{\xi - \eta} \right\} d\xi + \ln \left| \frac{\eta-1}{1+\eta} \right| {}^{-1}G_{\kappa j \rho}^m(\eta) \quad (17)$$

formula szolgál. A szingularitást tartalmazó peremelem feletti integrálok számításakor tehát a regulárisra tett integrálok numerikusan meghatározható értékeihez a leválasztott szingularitást hordozó részekből analitikusan előállított függvények forráspont elemen belüli helyzetétől függő, η helykoordináta helyettesítése utáni, számértékei adódnak hozzá.

5. L ALAKÚ TARTOMÁNY VIZSGÁLATA

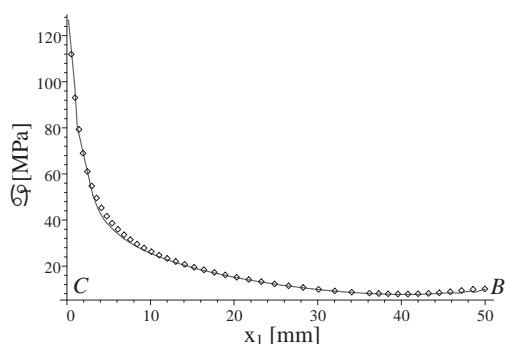
A vizsgált L alakú test síkalakváltozást szenvedő tartománya $h_1 = b_1 = 100 \text{ mm}$ és $h_2 = b_2 = 50 \text{ mm}$ méretekkel, valamint $E_1 = 11769 \text{ MPa}$, $\mu_{12} = 687$, $E_2 = 5886 \text{ MPa}$ és $\nu_{12} = 0,072$ anyagjellemzőkkel bír. Az ábrán látható terhelést biztosító konstans nagyságú $p_1 = 5 \text{ MPa}$ és $p_2 = 10 \text{ MPa}$ feszültségek pedig az adott geometriai viszonyok mellett önegyensúlyi terhelést jelentenek. A tartomány ábrán látható szimmetriáját viszont az anyagjellemzők irányfüggése miatt nem lehet a feladat numerikus implementációja során kihasználni.



1. ábra. Az L alakú ortotrop tartomány önegyensúlyi terheléssel

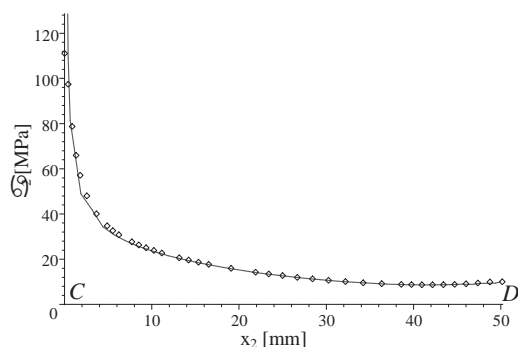
A tartomány 160 db azonos méretű peremelemre bontott peremgörbéje mentén az elemcsomó-

pontokra felírt (2) integrálegyenletekből alkotott egyenletrendszer numerikus megoldását alapul véve feszültség számítás végezhető a (16), (17) képleteken alapuló Fortran nyelven fejlesztett számító program segítségével. A feszültségeloszlást a peremen, az ábrán jelölt C sarokpontban, azaz a feszültség gyűjtőhely környezetében hasonlítjuk össze az Abaqus végelem program segítségével végzett számítással. A végeleemes számításban használt háló (16232 darab, CPE8R típusú elem) az irodalmi előzmények által javasolt módon C körül jól besűrített, így a peremelemes számítás ellenőrzésére alkalmas. A 2. ábrán a CB oldal mentén folytonos vonallal ábrázolt, x_1 irányú normál feszültségre vonatkozó peremelemes megoldás látható, mint jól illeszkedik a kis rombuszokkal jelölt Abaqus számítási eredményekre.



2. ábra. Hiperszinguláris egyenletekből számított σ_1 feszültség (—) összehasonlítása CB oldal mentén a VEM (\diamond) eredményekkel

A CD határoló egyenes mentén is jó illeszkedés tapasztalható a 3. ábrán látható módon az ott fellépő x_2 irányú normál feszültség esetén. A kiválasztott oldalak mentén külön nem megjelenített feszültségkoordináták zérus értékűek.



3. ábra. Hiperszinguláris egyenletekből számított σ_2 feszültség (—) összehasonlítása CD oldal mentén a VEM (\diamond) eredményekkel

Kisebbsé eltéréseket a jó minőségű végeleemes felbontás okoz. Azonban kitűnik, hogy a C pontnál jelentkező feszültségcsúcs közelében a hagyományos peremelemes eljárással szemben a hiperszingulárisra tett integrálegyenletek elég pontos feszültségértékeket szolgáltatnak.

6. ÖSSZEFOGLALÁS

A bemutatott munka a síkrugalmasságtan duál rendszerében a peremelem módszer hiperszinguláris integrálegyenletein alapuló eljárást dolgozott ki a perem menti feszültségek pontosabb számítására ortotrop anyagmodell mellett. Alapgondolat, hogy a peremen ébredő feszültségeket elvben pontosan megadó, de szinguláris integrálok is tartalmazó képletekben a szinguláris részeket elkülönítve, analitikusan, nagyon kis hibával terheltlen kezelhetjük.

7. KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A cikkben ismertetett kutató munka az EFOP-3.6.1-16-2016-00011 jelű „Fiatallodó és Megújuló Egyetem – Innovatív Tudásváros – a Miskolci Egyetem intelligens szakosodást szolgáló intézményi fejlesztése” projekt részeként – a Széchenyi 2020 keretében – az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.

7. IRODALOM.

- [1] Hildenbrand J., Kuhn G.: *Numerical computation of hypersingular integrals and application to the boundary integral equation for the stress tensor*, Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol. 10, 1992. pp. 209-217.
- [2] Guiggiani M.: *Hypersingular formulation for boundary stress evaluation*, Engineering Analysis with Boundary Elements, Special Issue on Integration Techniques, 13(2), 1994. pp. 169-179.
- [3] Szeidl G., Dudra J.: *On the direct BEM formulation in the dual system of plane elasticity for orthotropic bodies*, Journal of Computational and Applied Mechanics 10 (2) (2015) 147-168.
- [4] Szirbik S.: *Hypersingular boundary integral formulations for plane elasticity in terms of first-order stress functions*, Journal of Computational and Applied Mechanics 11 (1) (2016) 49-66.