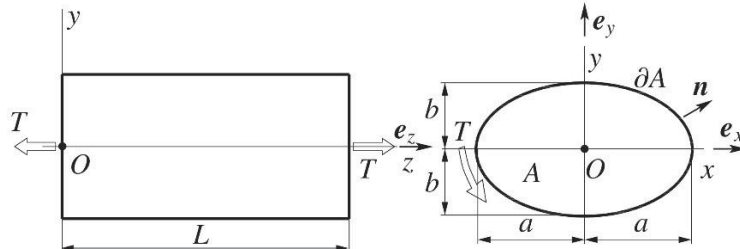


INHOMOGÉN, ANIZOTROP ELLIPSZIS KERESZTMETSZETŰ RUDAK SAINT-VENANT CSAVARÁSA

SAINT-VENANT TORSION OF ANISOTROPIC NONHOMOGENEOUS ELLIPTICAL CROSS SECTIONS

*Ecsedi István, Professor Emeritus, Miskolci Egyetem, Műszaki Mechanikai Intézet;
Baksa Attila, egyetemi docens, PhD, Miskolci Egyetem, Műszaki Mechanikai Intézet*

ÖSSZEFOGLALÁS (ABSTRACT). The present paper deals with the Saint-Venant torsion of non-homogeneous Cartesian anisotropic elliptical cross section. Closed form formulae are given for the torsion function, shearing stresses, torsional rigidity and warping rigidity. The dependence of the torsion function, shearing stresses, torsional rigidity and warping rigidity from the directions of principal axis of orthotropy are also analysed.



1. ábra. Tömör ellipszis keresztmetszetű rugalmas rúd

Az ellipszis keresztmetszet határgörbéjének egyenlete az Oxy keresztzeti koordináta-rendszerben

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (1)$$

ahol a és b az ellipszis főtengelyeinek hosszát jelöli. Ismeretes, hogy anizotrop keresztmetszetre a Hooke törvény szerint, a τ_{xz} , τ_{yz} csúsztató feszültségek a γ_{xz} , γ_{yz} nyírási alakváltozások kapcsolatát az alábbi egyenletek írják le [1,2,3,4,6]

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= A_{55}(x, y)\gamma_{xz} + A_{45}(x, y)\gamma_{yz}, \\ \tau_{yz} &= A_{45}(x, y)\gamma_{xz} + A_{55}(x, y)\gamma_{yz}, \end{aligned} \quad (2)$$

ahol A_{55}, A_{44}, A_{45} az anizotrop, inhomogén rugalmas anyagú rúd nyírási rugalmassági állandói. A tanulmány az alábbi típusú inhomogenitással foglalkozik

$$A_{ij} = f \left(\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} \right) a_{ij} \quad (i, j = 4, 5), \quad (3)$$

illetve $a_{45} = a_{54}$. Itt f egy tetszőleges legalább egyszer folytonosan differenciálható pozitív értékű egyváltozós függvény, továbbá f dimenziótlan. Ismeretes, hogy [5,7]

1. BEVEZETÉS

Az 1. ábra szemlélteti a vizsgálat tárgyát képező rugalmas anizotrop, inhomogén anyagú tömör ellipszis keresztmetszetű rudat.

$$\gamma_{xz} = \varrho \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} - y \right), \quad \gamma_{yz} = \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} + x \right), \quad (4)$$

ahol ϱ a keresztmetszetek fajlagos elcsavaródását jelöli, $[\varrho] = \text{rad/m}$, $\omega = \omega(x, y)$ pedig az ellipszis keresztmetszet csavarási függvénye. A fajlagos elcsavaródás és az alkalmazott csavarónyomaték kapcsolatát a

$$T = \varrho S \quad (5)$$

egyenlet írja le, ahol S a keresztmetszet csavarási merevsége [1,2,3,4]. Jelen feladatra a mechanikai egyensúly egyenletei az alábbi alakban írhatók [6,7]:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \quad (x, y) \in A, \quad (6)$$

$$\tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y = 0 \quad (x, y) \in \partial A,$$

$$T = \int_A (x\tau_{yz} - y\tau_{xz}) dA, \quad (7)$$

ahol A az ellipszis alakú tartományt, ∂A pedig az A tartomány határgörbét jelöli, valamint n_x , n_y az ellipszis alakú határgörbe normális vektorának a koordinátáit jelöli. Egyszerű számolással igazolható, hogy

$$n_x = \frac{x}{a^2}, \quad n_y = \frac{y}{b^2}, \quad (x, y) \in \partial A, \quad (8)$$

ahol $n_x^2 + n_y^2 \neq 1$. A (2), (3) és (6) egyenletek kombinálásával kapjuk a csavarási függvény meghatározó peremérték feladatot:

$$f \left(\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} \right) \left[a_{55} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + 2a_{45} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} + a_{44} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right] + f' \left(\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} \right) \left\{ x \left[a_{55} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} - y \right) + a_{45} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} + x \right) \right] + \right. \quad (9)$$

$$\left. \frac{y}{b^2} \left[a_{45} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} - y \right) + a_{44} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} + x \right) \right] \right\} = 0, (x, y) \in A, \\ \frac{x}{a^2} \left[a_{55} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} - y \right) + a_{45} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} + x \right) \right] + \frac{y}{b^2} \left[a_{45} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} - y \right) + a_{44} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} + x \right) \right] = 0, (x, y) \in \partial A. \quad (10)$$

A (9) egyenletben alkalmaztuk az $f'(\lambda) = \frac{df}{d\lambda}$ jelölést. Közvetlen behelyettesítéssel igazolható, hogy a fenti Neumann típusú peremértékfeladat megoldása az alábbi függvény

$$\omega(x, y) = \frac{a_{55}b^2 - a_{44}a^2}{a_{55}b^2 + a_{44}a^2} xy - \frac{a_{45}}{a_{55}b^2 + a_{44}a^2} (b^2x^2 - a^2y^2) + C. \quad (11)$$

Itt C egy tetszőleges állandó, értéke a rúd z tengely irányú merevtestszerű eltolódásával kapcsolatos, értéke önkényesen megválasztható, nincs hatással a rúd deformációjára. Jelen dolgozatban $C=0$ választást használjuk. A (2), (4) és (10) egyenletekből nyerjük a csúsztató feszültségeket

$$\tau_{xz} = -2\vartheta f \left(\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} \right) \frac{a_{44}a_{55} - a_{45}^2}{a_{55}b^2 + a_{44}a^2} y, \quad (12) \\ \tau_{yz} = 2\vartheta f \left(\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} \right) \frac{a_{44}a_{55} - a_{45}^2}{a_{55}b^2 + a_{44}a^2} x.$$

Az (5) és (7) egyenletek felhasználásával kapjuk az S csavarási merevség képletét

$$S = 4\pi \frac{a_{44}a_{55} - a_{45}^2}{a_{55}b^2 + a_{44}a^2} a^3 b^3 \int_0^1 \lambda^3 f(\lambda) d\lambda. \quad (13)$$

A (13) képlet levezetésénél az alábbi koordináta-transzformációt használtuk

$$x = \lambda a \cos t, \quad y = \lambda b \sin t, \quad (14) \\ dA = \lambda ab d\lambda dt, \quad 0 \leq \lambda \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Homogén anizotrop keresztmetszetre azt kapjuk a (13) képletből, hogy

$$S = \frac{a_{44}a_{55} - a_{45}^2}{a_{55}b^2 + a_{44}a^2} a^3 b^3 \pi, \quad (15)$$

hiszen ez esetben $f(\lambda)=1, 0 \leq \lambda \leq 1$. A vonatkozó irodalom [2,3,4,7] a (13) formulát homogén anizotrop keresztmetszet esetében a csavarási feladat Prandtl feszültség függvényére épített megoldásából vezeti le a

$$k_{44} = \frac{a_{55}}{a_{44}a_{55} - a_{45}^2}, \quad k_{55} = \frac{a_{44}}{a_{44}a_{55} - a_{45}^2} \quad (16)$$

nyírási hajlékonysági együtthatók függvényében

$$S = \frac{a^3 b^3 \pi}{k_{44} b^2 + k_{55} a^2} \quad (17)$$

alakban.

2. CSAVARÁSI MEREVSÉG ELEMZÉSE

2.1. Feladat az adott területű azon anizotrop ellipszis keresztmetszet geometriai adatainak meghatározása, amelyekhez a maximális csavarási merevség tartozik. E feladat megoldásához az alábbi szélsőérték probléma kapcsolódik, keresendő

$$\max_{\tilde{a}, \tilde{b}} 4\pi \frac{a_{44}a_{55} - a_{45}^2}{a_{55}\tilde{b}^2 + a_{44}\tilde{a}^2} \tilde{a}^3 \tilde{b}^3 F = 4\pi \frac{a_{44}a_{55} - a_{45}^2}{a_{55}b^2 + a_{44}a^2} a^3 b^3 F \quad (18)$$

megoldása, feltéve, hogy $\tilde{a}\tilde{b}\pi = A$, ahol A a keresztmetszeti terület értékét jelöli. A (18) egyenletbe bevezettük az

$$F = \int_0^1 f(\lambda) \lambda^3 d\lambda. \quad (19)$$

jelölést. A fenti szélsőérték probléma megoldása

$$a = \sqrt{\frac{A}{\pi}} \sqrt[4]{\frac{a_{55}}{a_{44}}}, \quad b = \sqrt{\frac{A}{\pi}} \sqrt[4]{\frac{a_{44}}{a_{55}}}, \quad (20) \\ S_{\max} = \frac{2(a_{44}a_{55} - a_{45}^2) A^2}{\sqrt{a_{44}a_{55}}} \frac{F}{\pi}.$$

A (20)_{1,2} képletek segítségével igazolható, hogy jelen esetben

$$\omega(x, y) = \frac{a_{45}(a_{55}y^2 - a_{44}x^2)}{2a_{44}a_{55}}, \\ \tau_{xz} = -\vartheta f \left[\left(x^2 \sqrt{\frac{a_{55}}{a_{44}}} + y^2 \sqrt{\frac{a_{44}}{a_{55}}} \right) \frac{T}{\pi} \right] \frac{a_{44}a_{55} - a_{45}^2}{a_{44}} y, \quad (21) \\ \tau_{yz} = \vartheta f \left[\left(x^2 \sqrt{\frac{a_{55}}{a_{44}}} + y^2 \sqrt{\frac{a_{44}}{a_{55}}} \right) \frac{T}{\pi} \right] \frac{a_{44}a_{55} - a_{45}^2}{a_{55}} x.$$

2.2. Igen egyszerű képlet fejezi ki a csavarási merevség és az ellipszis keresztmetszet súlyponti x, y főtengelyeire számított J_x és J_y másodrendű nyomatékainak a kapcsolatát

$$S = \frac{4J_x J_y}{a_{55} J_x + a_{44} J_y} (a_{44} a_{55} - a_{45}^2) F. \quad (22)$$

Itt felhasználtuk, hogy

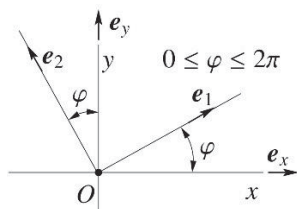
$$J_x = \frac{ab^3}{4} \pi, \quad J_y = \frac{a^3 b}{4} \pi. \quad (23)$$

A (22) képletet homogén izotrop ellipszis keresztmetszetre ($a_{44} = a_{55}$, $a_{45} = 0$, $F = 0,25$) Nikolai vezette le 1906-ban [6].

2.3. Jelölje az orthotóp inhomogén ellipszis keresztmetszetű rúd orthotrópiai főirányait az

$$\begin{aligned} e_1 &= \cos \varphi e_x + \sin \varphi e_y, \\ e_2 &= -\sin \varphi e_x + \cos \varphi e_y, \\ e_3 &= e_z \end{aligned} \quad (24)$$

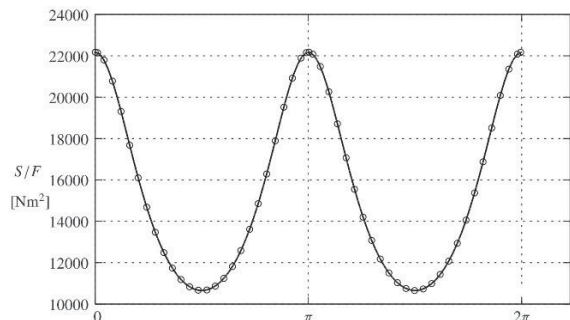
egységvektor hármas, ahol e_x , e_y , e_z az x , y és z tengelyek irányába mutató egységvektorokat jelölnek (2. ábra).



2. ábra. Orthotropiai főirányok az xy síkban

Ismeretes, hogy jelen esetben a nyírási merevségek az alábbi alakban adhatók meg a G_{13} és G_{23} csúsztató rugalmassági modulusok és orthotrópia főirányát megadó φ szög függvényében [2,3]

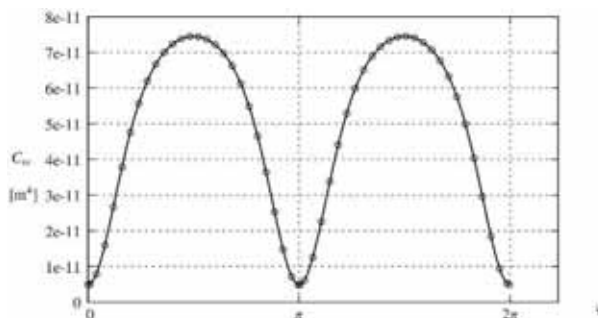
$$\begin{aligned} a_{55}(\varphi) &= G_{13} \cos^2 \varphi + G_{23} \sin^2 \varphi, \\ a_{44}(\varphi) &= G_{13} \sin^2 \varphi + G_{23} \cos^2 \varphi, \\ a_{45}(\varphi) &= (G_{13} - G_{23}) \cos \varphi \sin \varphi. \end{aligned} \quad (25)$$



3. ábra. $S(\varphi)/F$ függvény szemléltetése

A következőkben az alábbi numerikus adatokkal számolunk:

$$\begin{aligned} G_{13} &= 8 \times 10^9 \text{ Pa}, \quad G_{23} = 2,5 \times 10^9 \text{ Pa}, \\ a &= 0,045 \text{ m}, \quad b = 0,02 \text{ m}. \end{aligned}$$



4. ábra. $C_\omega(\varphi)$ függvény szemléltetése

A 3. ábra szemlélteti a csavarási merevséget ($S(\varphi)/F$), mint a φ változó függvényét. Jelen feladatban

$$\begin{aligned} \frac{S_{\max}}{F} &= 22174,60618 \text{ Nm}^2, \\ \frac{S_{\min}}{F} &= 10652,1909 \text{ Nm}^2. \end{aligned} \quad (26)$$

2.4. Igen fontos keresztmetszeti jellemző, a keresztmetszet vetemedési merevsége, értékét az alábbi integrál definiálja

$$C_\omega(\varphi) = \int_A \omega^2(x, y, \varphi) dA. \quad (27)$$

A $C_\omega = C_\omega(\varphi)$ függvény görbét a 4. ábra szemlélteti az előzőekben használt numerikus adatokkal számolva.

3. CSÚSZTATÓ FESZÜLTSEGEK

Az előző fejezet adatait használjuk a csúsztató feszültségekhez kapcsolódó ábrák megrajzolásához, kiegészítve a $\vartheta = 1,5 \times 10^{-2}$ rad és $f(\lambda) = \exp(\alpha \lambda)$, $\alpha = 0,5$ adatokkal.

A csúsztató feszültségek alábbi reprezentációját használjuk

$$\begin{aligned} \tau_{xz}(\lambda, t, \varphi) &= \\ &= -2\vartheta f(\lambda) \frac{a_{55}(\varphi)a_{44}(\varphi) - a_{45}^2(\varphi)}{a_{55}(\varphi)b^2 + a_{44}(\varphi)a^2} \lambda a \sin t, \end{aligned} \quad (28)$$

$$0 \leq \lambda \leq 1, \quad 0 \leq t, \varphi \leq 2\pi,$$

$$\begin{aligned} \tau_{yz}(\lambda, t, \varphi) &= \\ &= 2\vartheta f(\lambda) \frac{a_{55}(\varphi)a_{44}(\varphi) - a_{45}^2(\varphi)}{a_{55}(\varphi)b^2 + a_{44}(\varphi)a^2} \lambda a \cos t, \end{aligned} \quad (29)$$

$$0 \leq \lambda \leq 1, \quad 0 \leq t, \varphi \leq 2\pi,$$

Az 5. ábra a $\tau_{xz}(\lambda, \pi/2, \varphi_i)$, a 6. ábra pedig a

$$\tau_{yz}(\lambda, 0, \varphi_i) \quad 0 \leq \lambda \leq 1, \quad (i=1, \dots, 4), \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{4}$$

$\varphi_3 = \frac{\pi}{3}, \quad \varphi_4 = \frac{\pi}{2}$ függvények grafikonjait szemlélteti.

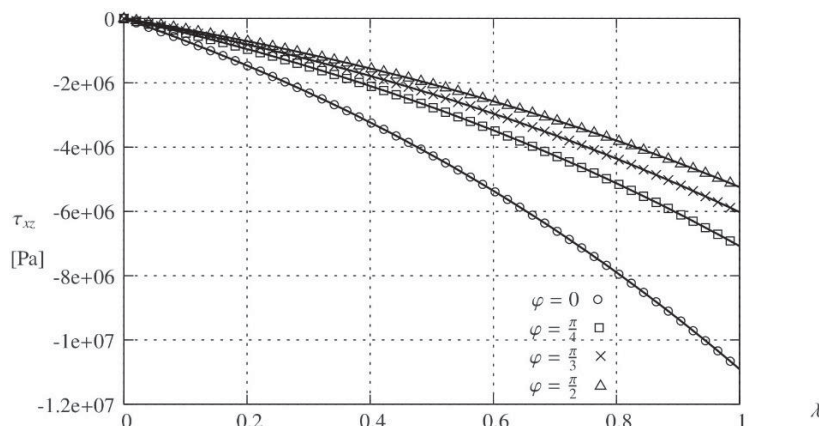
6. KÖVETKEZTETÉSEK

A dolgozat tárgyát inhomogén, anizotrop rugalmas anyagú ellipszis keresztmetszetű rúd Saint-Venant csavarási feladata alkotja. Általános anizotrópiát feltételezve megadja a csavarási feladat csavarási (vetemedési) függvényét, a csúszató feszültségek és csavarási, valamint a vetemedési merevség képleteit. Meghatározásra kerülnek az adott területű és nyírási merevségekkel rendelkező maximális csavarási merevséget adó keresztmetszet geometriai méretei. Az orthotrop keresztmetszet esetén a tanulmány részletesen elemzi a csavarási feladat mechanikai jellemzőinek és az orthotropia főirányainak a kapcsolatát.

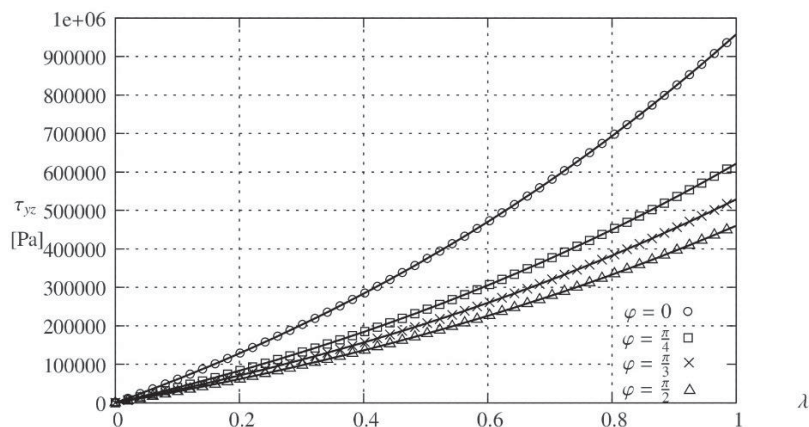
Köszönetnyilvánítás: A tanulmány elkészítését a Nemzeti Kutatási és Fejlesztési Hivatal (NKFIH) K115701 projektre támogatta. A cikkben ismertetett kutató munka az EFOP-3.6.2-16-2016-00011 jelű „Fiatalodó és Megújuló Egyetem – Innovatív Tudásváros – a Miskolci Egyetem intelligens szakosodást szolgáló intézményi fejlesztése” projekt részeként – a Széchenyi 2020 keretében – az Európai

6. IRODALOM

- [1] O. Rand, V. Rovenskii, *Analytical Methods in Anisotropic Elasticity*, Birkhauser, Basel 2005.
- [2] S.G. Lekhnitskii, *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body*. Mir Publishers, Moscow, 1981.
- [3] S.G. Lekhnitskii. *Torsion of Anisotropic and Non-homogeneous Beams*. Nauka, Moscow, 1971. (In Russian).
- [4] L.M. Milne-Thomson, *Antiplane Elastic Systems*. Springer-Verlag, Berlin, 1962.
- [5] I.S. Solonnikoff, *Mathematical Theory of Elasticity*, (2nd ed.), McGraw-Hill, New York, 1956.
- [6] A.I. Lurje, *Theory of Elasticity*. Springer-Verlag, Berlin, 2005.
- [7] M. Sadd, *Elasticity: Theory, Applications and Numerics*. Elsevier, New York, 1958.



5. ábra. $\tau_{xz}(\lambda, \pi/2, \varphi_i)$ szemléltetése.



6. ábra. $\tau_{yz}(\lambda, 0, \varphi_i)$ szemléltetése.