

HŐFESZÜLTSEGEK SZÁMÍTÁSA ÜREGES HENGERES TESTEKBEN HŐMÉRSÉKLETTŐL FÜGGŐ ANYAGÁLLANDÓK ESETÉN

THERMAL STRESSES IN HOLLOW CYLINDRICAL BODIES WITH TEMPERATURE DEPENDENT MATERIAL PROPERTIES

Gönczi Dávid*, Ecsedi István**

ABSTRACT

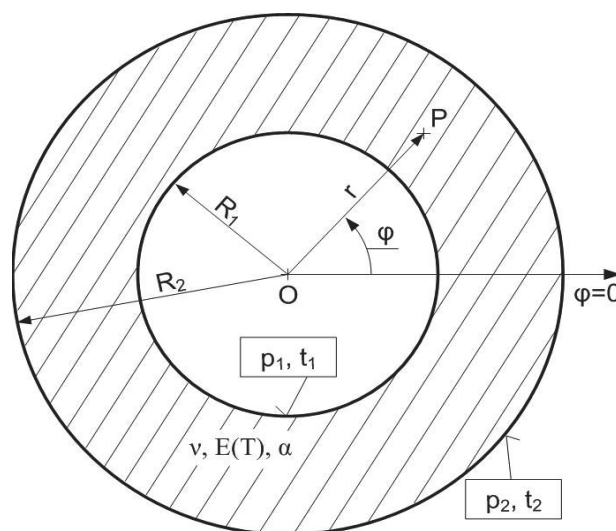
The main objective of this paper is the determination of normal stresses and displacements in hollow circular cylindrical bodies, which are caused by thermal and mechanical loadings. The Young modulus is assumed to be a specific function of the temperature. The problem is considered axisymmetric, therefore the stresses and the temperature field are independent of the axial coordinate. The temperature field and the corresponding thermal stresses are determined by utilizing the equations of the steady-state uncoupled thermoelasticity. The analytical solution is obtained under the assumption that the body is in plane strain state.

1. BEVEZETÉS

Napjainkban számos könyv és cikk foglalkozik homogén és inhomogén hengeres testekben, forgásszimmetrikus hő és mechanikai terhelések hatására kialakuló feszültségek és elmozdulások meghatározásával [2, 3, 4, 7, 8, 9, 10].

Az 1. ábrán látható a vizsgált hengeres test keresztmetszete. A feladat tengelyszimmetrikusnak tekinthető, a megoldásához az $O\varphi z$ hengerkoordináta rendszer használatát. A henger belső átmérője R_1 , külső átmérője R_2 . Az időben nem változó mechanikai terhelés –nyomás– a belső peremfelületen p_1 , a külső felületen p_2 . A potenciálmélet egyes típusú peremfeltételeit írjuk elő a palástfelületeken, továbbá t_1 és t_2 jelöli a belső és külső felületek hőmérsékleteit. A testet z tengely irányába végtelen kiterjedésűnek tekintjük, a külső és belső hengeres felületek hőmérséklete időben állandó. Ennek következtében az állandósult állapothoz tartozó hőmérsékletmező nem függ a z axiális koordinátától, pusztán az r radiális koordináta függvénye.

Az állandósult állapothoz tartozó hőfeszültségek számítására a síkalakváltozási állapot egyenleteit használjuk [1, 2, 3, 4, 5].



1. ábra. Az üreges körhenger keresztmetszete a terhelések feltüntetésével.

2. A HŐMÉRSÉKLETMEZŐ ÉS A RUGALMASÁGI MODULUSZ KAPCSOLATA

Azt az esetet vizsgáljuk, mikor az állandósult állapotú, üreges, körhenger alakú test palástfelületeinek hőmérsékletei adottak (nincsenek belső hőforrások). A radiális hőáramot konstansnak, a hőmérsékletmezőt forgásszimmetrikusnak tételezzük fel, azaz csak a radiális koordináta (r) függvénye. Ekkor [5, 6]

$$0 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial r} r \right), \quad T(r) = D_1 \ln r + D_2, \quad (1)$$

ahol λ a hővezetési tényező és $T(r)$ a hőmérsékletmező.

*PhD hallgató, Miskolci Egyetem, Mechanikai Tanszék,

**egyetemi tanár, Miskolci Egyetem, Mechanikai Tanszék

A potenciálmélet Dirichlet típusú peremfeltételi egyenleteit felhasználva jutunk el a hőmérsékletmező D_1 és D_2 integrációs konstansok nélküli, végső alakjához [6]

$$T(r) = \frac{t_1 - t_2}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \ln \frac{r}{R_2} + t_2. \quad (2)$$

A továbbiakban azt az esetet vizsgáljuk, amikor $t_2 = 0$. Az üreges körhenger alakú testekben a radiális, a tangenciális és az axiális feszültségmező felírható az alábbi formában [1, 3, 4, 5]:

$$\sigma_r(r) = L[(1-\nu)\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\varphi - \alpha(1+\nu)T], \quad (3)$$

$$\sigma_\varphi(r) = L[\nu\varepsilon_r + (1-\nu)\varepsilon_\varphi - \alpha(1+\nu)T], \quad (4)$$

$$\sigma_z(r) = \nu(\sigma_r + \sigma_\varphi) - \alpha ET, \quad (5)$$

ahol ν a Poisson szám, α a lineáris hőtágulási együttható, $u(r)$ az elmozdulásmező, a radiális és tangenciális nyúlásokra fennáll, hogy

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r}, \quad (6)$$

továbbá bevezettük az alábbi jelölést is:

$$L = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)}. \quad (7)$$

A feladat megoldása során abból indulunk ki, hogy az E rugalmassági modulusz a hőmérsékletmező exponenciális függvénye, kapcsolatuk az alábbi kifejezéssel írható le:

$$L(r) = L_0 e^{\beta T(r)}. \quad (8)$$

L_0 és β az anyagra jellemző konstansok, β értéke az előírt hőmérsékleti tartományra vonatkozó mérési eredmények alapján határozható meg. A (8) egyenlet következménye, hogy a rugalmassági modulusz a hőmérsékletmezőn keresztül a radiális koordinátának a függvénye, továbbá kiemelendő, hogy $T = T(r)$. A (2) és (8) egyenletek alapján célszerű bevezetni az alábbi konstant:

$$g = \frac{\beta t_1}{\ln \frac{R_2}{R_1}}. \quad (9)$$

Ezt felhasználva a (8) egyenlet átírható az

$$L(r) = L_0 e^{-g \ln \frac{r}{R_2}} = L_0 \left(\frac{R_2}{r} \right)^g \quad (10)$$

alakba, ahol $L_0 = \frac{E(t_2)}{(1-\nu-2\nu^2)}$.

3. AZ ELMOZDULÁSMEZŐ SZÁMÍTÁSA

Az elmozdulásmező differenciálegyenletét az egyensúlyi egyenletből kiindulva írjuk fel [2, 3, 4, 5]

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0 \quad (11)$$

A (11) egyenletbe beírva a (3) és (4) kifejezéseket kapjuk, hogy

$$L \left[(1-\nu) \frac{d^2 u}{dr^2} + \left(\frac{1-\nu}{r} \right) \frac{du}{dr} - (1-\nu) \frac{u}{r^2} - (1+\nu) \alpha \frac{dT}{dr} \right] + \frac{dL}{dr} \left[(1-\nu) \frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} - (1+\nu) \alpha T \right] = 0, \quad (12)$$

amelyhez felhasználva az alábbi összefüggéseket

$$\frac{1}{L} \frac{dL}{dr} = \frac{d}{dr} (\ln L) = -\frac{g}{r}, \quad \frac{dT}{dr} = \frac{t_1}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \frac{1}{r} \quad (13)$$

felírható az elmozdulásmező differenciálegyenlete:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \left(\frac{1-g}{r} \right) \frac{du}{dr} - \left(1 + \frac{g\nu}{1-\nu} \right) \frac{u}{r^2} = k_1 \frac{1}{r} - k_2 \frac{1}{r} \ln \frac{r}{R_2} \quad (14)$$

Itt bevezettük, hogy

$$k_1 = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \frac{g}{\beta}, \quad k_2 = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \frac{g^2}{\beta}. \quad (15)$$

A (14) egyenlet homogén részének megoldása az alábbi

$$u_{\text{hom}} = C_1 r^{\lambda_1} + C_2 r^{\lambda_2}, \quad (16)$$

$$\lambda_1 = \frac{g}{2} + \sqrt{\frac{g^2}{4} + 1 + \frac{g\nu}{1-\nu}}, \quad \lambda_2 = \frac{g}{2} - \sqrt{\frac{g^2}{4} + 1 + \frac{g\nu}{1-\nu}}. \quad (17)$$

Az inhomogén rész megoldásához felhasznált próbafüggvények és azok hosszas számítások útján meghatározott konstansai a következő alakban adhatók meg

$$u_{\text{inh3}} = C_3 r, \quad u_{\text{inh4}} = C_4 r \ln \frac{r}{R_2} + C_5 r, \quad (18)$$

$$C_3 = -(1+\nu) \frac{\alpha}{\beta}, \quad C_4 = g(1+\nu) \frac{\alpha}{\beta},$$

$$C_5 = (2-g)(1-\nu^2) \frac{\alpha}{\beta}. \quad (19)$$

Ezek alapján az elmozdulásmező egyenlete zárt alakban felírható a C_1 és C_2 integrációs konstansok segítségével, amelyeket a hengeres peremfelületre

érvényes feszültségi peremfeltételek segítségével határozhatunk meg:

$$u(r) = C_1 r^{\lambda_1} + C_2 r^{\lambda_2} + (1+\nu) \frac{\alpha}{\beta} r \left[(1-2\nu) + g(\nu-1 + \ln \frac{r}{R_2}) \right]. \quad (20)$$

4. A FESZÜLTÉGMEZŐ MEGHATÁROZÁSA

Az elmozdulásmező előzőekben meghatározott alakját felhasználva az ε_r és ε_φ nyúlások kiszámíthatók. A (6) egyenlet alapján

$$\varepsilon_r = C_1 \lambda_1 r^{\lambda_1-1} + C_2 \lambda_2 r^{\lambda_2-1} + (1+\nu) \frac{\alpha}{\beta} \left[(1-2\nu) + g \left(\nu + \ln \frac{r}{R_2} \right) \right], \quad (21)$$

$$\varepsilon_\varphi = C_1 r^{\lambda_1-1} + C_2 r^{\lambda_2-1} + (1+\nu) \frac{\alpha}{\beta} \left[(1-2\nu) + g \left(\nu - 1 + \ln \frac{r}{R_2} \right) \right]. \quad (22)$$

Majd az így kapott egyenleteket behelyettesítve a (3) egyenletbe megkapjuk a radiális normálfeszültség eloszlását leíró kifejezést.

$$\begin{aligned} \sigma_r(r) = L \left\{ (1-\nu) \left[C_1 \lambda_1 r^{\lambda_1-1} + C_2 \lambda_2 r^{\lambda_2-1} + (1+\nu) \frac{\alpha}{\beta} \cdot \left[(1-2\nu) + g \left(\nu + \ln \frac{r}{R_2} \right) \right] \right] + \nu \left\{ C_1 r^{\lambda_1-1} + C_2 r^{\lambda_2-1} + (1+\nu) \frac{\alpha}{\beta} \left[(1-2\nu) + g \left(\nu - 1 + \ln \frac{r}{R_2} \right) \right] \right\} - \alpha(1+\nu) \left(\frac{-t_1}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \ln \frac{r}{R_1} + t_1 \right) \right\}. \quad (23) \end{aligned}$$

Hasonló módon a többi normálfeszültség is számítható. Az ismeretlen C_1 és C_2 konstansokat a peremfeltételi egyenletekből határozhatjuk meg. A szóban forgó egyenletek az alábbiak:

$$\sigma_r(R_1) = -p_1, \quad \sigma_r(R_2) = -p_2. \quad (24)$$

A (24) egyenletrendszer részletesebben kifejtett alakja:

$$a_{11}C_1 + a_{12}C_2 = f_1, \quad (25)$$

$$a_{21}C_1 + a_{22}C_2 = f_2. \quad (26)$$

Itt bevezettük az alábbi jelöléseket:

$$a_{11} = (1-\nu)\lambda_1 R_1^{\lambda_1-1} + \nu R_1^{\lambda_1-1}, \quad (27)$$

$$a_{12} = (1-\nu)\lambda_2 R_1^{\lambda_2-1} + \nu R_1^{\lambda_2-1}, \quad (28)$$

$$a_{21} = (1-\nu)\lambda_1 R_2^{\lambda_1-1} + \nu R_2^{\lambda_1-1}, \quad (29)$$

$$a_{22} = (1-\nu)\lambda_2 R_2^{\lambda_2-1} + \nu R_2^{\lambda_2-1}, \quad (30)$$

$$f_1 = -\frac{p_1}{L} - \frac{\alpha}{\beta} (1-\nu^2) \left[(1-2\nu) + g \left(\nu + \ln \frac{R_1}{R_2} \right) \right] - \frac{\alpha}{\beta} \cdot (\nu + \nu^2) \left[(1-2\nu) + g \left(\nu - 1 + \ln \frac{R_1}{R_2} \right) \right] + \alpha(1+\nu)t_1, \quad (31)$$

$$f_2 = -\frac{p_2}{L} - \frac{\alpha}{\beta} (1-\nu^2)(1-2\nu + g\nu) - \frac{\alpha}{\beta} (\nu + \nu^2) \cdot (1-2\nu + g\nu - g), \quad (32)$$

ahonnan

$$C_2 = \frac{a_{21}f_1 - a_{11}f_2}{a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22}}, \quad C_1 = \frac{f_1 - a_{12} \frac{a_{21}f_1 - a_{11}f_2}{a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}. \quad (33)$$

Az így kiszámított integrációs állandókat visszaírva a (20) egyenletbe az elmozdulásmező és a (3), (4) egyenletek alapján pedig a feszültségmező számítható.

Általánosított sicalakváltozási állapotra a fenti feladatot Nowinski [12] a következő feltételek teljesülése esetén oldotta meg

$$g = 1, \quad R_2 = 2R_1, \quad p_1 = p_2 = 0.$$

A [11] tanulmány pedig tömör és üreges gömbre gömbszimmetrikus hőmérsékletmezőt, feszültségeket és elmozdulást feltételezve $\nu=0.5$ esetén oldotta meg hőmérsékletfüggő rugalmassági moduluszal számolva az állandósult állapotra vonatkozó hőrugalmasságtani feladatot.

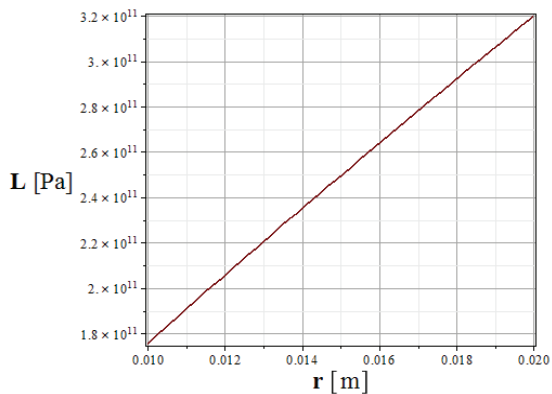
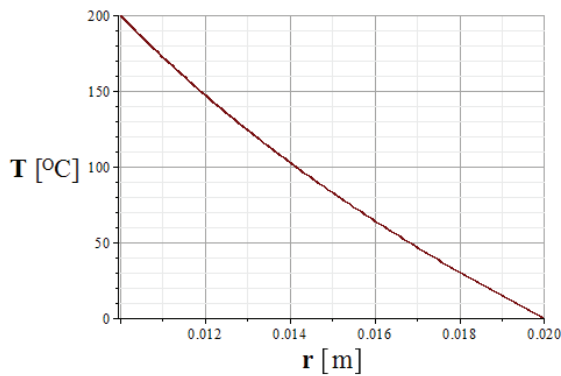
5. NUMERIKUS PÉLDA

A numerikus számítások kivitelezéséhez a *Maple 15* matematikai szoftvert használtuk. Az üreges körhenger geometriáját, a peremfelületek hőmérsékleteit és az anyagi paramétereket az alábbi értékeknek vettük:

$$R_1 = 0.01 \text{ m}, \quad R_2 = 0.02 \text{ m}, \quad t_2 = 0^\circ\text{C}, \quad t_1 = 200^\circ\text{C}, \quad \nu = 0.25,$$

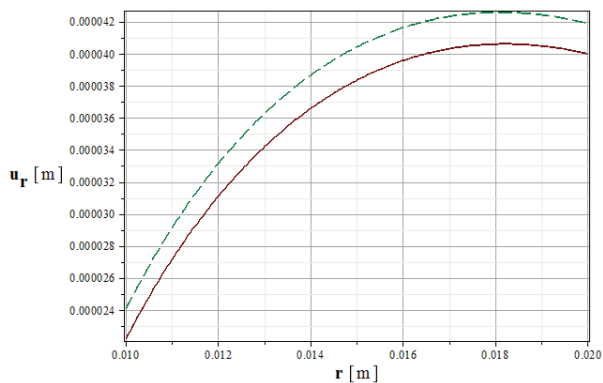
$$\alpha = 2 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^\circ\text{C}}, \quad \beta = 0.003, \quad L_0 = 3.2 \cdot 10^{11} \text{ Pa}.$$

A 2. ábra szemlélteti az L mennyiség változását a radiális koordináta függvényében és a hőmérsékletmezőt.



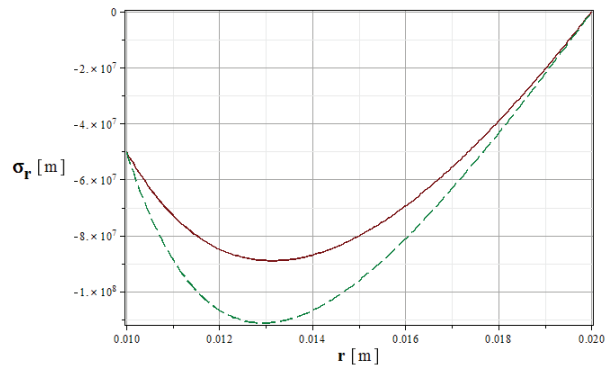
2. ábra. A hőmérsékletmező és a rugalmassági modulusz a radiális koordináta függvényében.

A belső felületen ható mechanikai terhelés $p_1=50\text{MPa}$, a külső palástfelület terheletlen ($p_2=0\text{MPa}$). Az előzőekben ismertetett módszerrel kapott elmozdulásmező a 3. ábrán látható. Végül a 4. és 5. ábra mutatja a radiális és tangenciális feszültségek eloszlását a vizsgált esetben. Látható, hogy a radiális feszültségmező kielégíti a mechanikai peremfeltételeket.

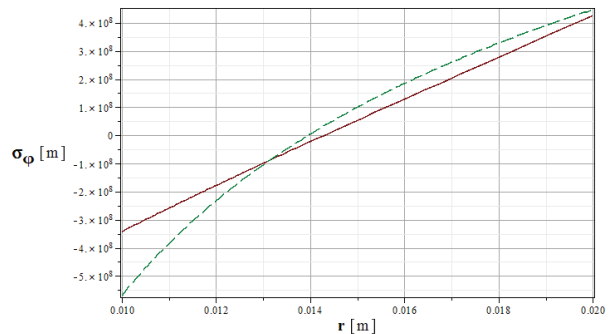


3. ábra. Az elmozdulásmező.

A $\beta=0$ esetre vonatkozó megoldást, mikor is $L=L_0$ a 3-5. ábrákon szaggatott zöld vonal szemlélteti. A $\beta=0$ eset külön vizsgálatot igényel, részletes kidolgozását a rétegzett, üreges, körhenger alakú testekre a [13] tanulmány ismerteti.



4. ábra. A radiális normál feszültség eloszlása.



5. ábra. A tangenciális feszültségmező.

6. ÖSSZEZÉS

A tanulmány egy analitikus (egzakt) eljárást ismertet az üreges körhenger alakú testekben a mechanikai és hőterhelés hatására kialakuló elmozdulásmező és hőfeszültségek meghatározására. Azt az esetet vizsgáljuk, mikor a rugalmassági modulusz a hőmérsékletmezőn keresztül a radiális koordináta egy meghatározott függvényeként írható fel. A kidolgozott analitikus módszer alkalmazásával nyert numerikus eredmények a különböző numerikus eljárásokkal kapott megoldások számára „Benchmark” feladatként is használhatók a szóban forgó közelítő módszerek pontosságának az ellenőrzésére. A bemutatott analitikus módszer alkalmazásával nyert numerikus eredményeket egybevetve az egyes numerikus eljárásokkal (pl. végelem módszer, differencia módszer stb.) kapott megoldásokkal mód nyílik a vizsgált közelítő módszerek pontosságának ellenőrzésére.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A kutató munka a TÁMOP-4.2.2/B-10/1-2010-0008 jelű projekt részeként – az Új Magyarország Fejlesztési Terv keretében – az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.

7. IRODALOMJEGYZÉK

- [1] **Boley, B. A., Weiner, J. H.:** *Theory of Thermal Stresses*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1960.
- [2] **R. Solecki, R. I. Conant,** *Advanced Mechanics of Materials*, Oxford University Press, Oxford, 2003.
- [3] **R. B. Hetnarski, M.R. Eslami,** *Thermal Stresses Advanced Theory and Applications*, Springer, New York, (2010).
- [4] **N. Noda, R. B. Hetnarski and Y. Tanigawa,** *Thermal Stresses*, Lastran Corporation, Rochester, New York, 2000.
- [5] **I. L. Nowinski,** *Theory of Thermoelasticity with Applications*, Sythoff and Noordhoff, Alpen aan den Rijn, 1978.
- [6] **H. S. Carslaw, I. C. Jaeger,** *Conduction of Heat in solids*, Clarendon Press, Oxford, 1959.
- [7] **Lutz, M. P., Zimmerman R. W.:** Thermal stresses and effective thermal expansion coefficient of a functionally graded sphere. *Thermal Stress*, 19, pp. 39-54, 1996.
- [8] **Obata Y., Noda N.:** Steady thermal stress in a hollow circular cylinder and a hollow sphere of a functionally gradient materials. *Thermal Stress*, 17, pp. 471-487, 1994.
- [9] **Kim, K. S., Noda, N.:** Green's function approach to unsteady thermal stresses in an infinite hollow cylinder of functionally graded material. *Acta. Mech.* 156, 61–145, 2002.
- [10] **Liew K. M., Kitipornchai S., Zhang X. Z., Lim C. W.:** Analysis of the thermal stress behaviour of functionally graded hollow circular cylinders. *Solids and Structures*, 40, pp. 2355–80., 2003.
- [11] **Nowinski, J.:** Thermoelastic Problem for an Isotropic Sphere with Temperature Dependent Properties, *Zeit. Angew. Math. Phys.*, 1959, 10, p.565.
- [12] **Nowinski, J.:** Thermal Stresses in a Thick-Walled Cylinder Made of Material, Sychibitinc Variable Elastic Properties, *Arch. Mech. Stos.* 5, 1953, 4, p. 629. (in Polish)
- [13] **Gönczi D., Ecsedi I.:** Hőokozta feszültségek és elmozdulások meghatározása rétegzett körhenger alakú testekben, *Multidiszciplináris Tudományok* 2. kötet. 2012. pp. 39-48.