

HETEROGÉN ANYAGÚ SÍKGÖRBE RÚD SZABADREZGÉSEINEK SAJÁTFREKVENCIÁI

FREE VIBRATIONS OF HETEROGENEOUS CURVED BEAMS

Kiss László Péter*

ABSTRACT

The present paper deals with the vibration of a heterogeneous curved beam. First we determine the equations of motion provided that the beam is prestressed by a load in such a way that the membrane strain due to the load is constant in the beam. Then we determine the Green function matrix of the beam if there is no load. With the knowledge of the Green function matrix the self adjoint eigenvalue problem giving the natural frequencies are replaced by a system of homogeneous Fredholm integral equations for which the symmetric Green function matrix constitute the kernel. After solving the eigenvalue problem determined by the homogenous Fredholm integral equations we depict the graphs representing the first four natural frequencies as functions of the central angle. The results are compared with those obtained from a FEM solution.

1. BEVEZETÉS

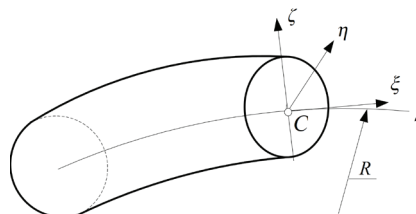
A keresztmetszeti heterogenitású rudak alapvető szilárdságtani összefüggéseit az [1, 2002] tanulmány közli. Az egyensúlyi egyenletek, valamint ezek stabilitásvizsgálattal kapcsolatos feladatok megoldásához felhasználható növekményes alakjának levezetését a szerző MSc diplomaterve tartalmazza. Érdekes hangsúlyozni, hogy a homogén anyagú körívalakú rudak rezgéseivel számos tanulmány foglalkozott. Célszerű ezek közül kiemelni a [2, 1935] dolgozatot – ez az első átfogó jellegű tanulmány, valamint a [3, 1975] értekezést, amely közli a Green-féle függvénymátrix értelmezését elfajuló differenciálegyenlet-rendszerekre. A jelen tanulmány a szokásos feltevések mellett (a rúd állandó sugarú síkgörbe, keresztmetszeti inhomogenitás esete forog fenn, a rúd terhelése a rúd síkjában működik, a keresztmetszet szimmetrikus erre a síkra) kívánja meghatározni az egyik végén befogott, másik végén csuklóval megtámasztott rúd esetén az első négy sajátfrekvenciát, mint a középponti szög függvényét. A gondolatmenet részeredménye lesz a terhelt rúd rezgéseivel kapcsolatos formalizmus tömör levezetése.

*a Sályi István Gépészeti Tudományok Doktori Iskola hallgatója

Témavezető: Prof. Dr. habil Szeidl György, Miskolci Egyetem, Mechanikai Tanszék.

2. ALAPÖSSZEFÜGGÉSEK

Az alábbiak a [4] tanulmány alapján összefoglalóan tekintik át a legfontosabb összefüggéseket. Az 1. ábra az alkalmazott $(\xi = s, \eta, \zeta)$ görbevonalú koordináta-rendszert szemlélteti. A $\xi = s$ koordináta vonal egybeesik az E -vel súlyozott középvonallal (neve röviden középvonal, heterogén rúd esetén nem esik egybe a geometriai középvonallal) – magát a fogalmat az (1) egyenlet értelmezi. A rugalmassági modulus csak a keresztmetszeti koordináták függvénye: $E(\eta, \zeta) = E(-\eta, \zeta)$.



1. ábra. Az alkalmazott koordináta-rendszer

Az E -vel súlyozott középvonal a C pontban dőli a keresztmetszetet, helyét az

$$S_{e\eta} = \int_A E(\eta, \zeta) \zeta dA = 0 \quad (1)$$

egyenlet határozza meg. A képletben $S_{e\eta}$ az E -vel súlyozott statikai nyomaték az η tengelyre. Az

$$A_e = \int_A E(\eta, \zeta) dA, \quad I_{e\eta} = \int_A E(\eta, \zeta) \zeta^2 dA \quad (2)$$

integrálok az E -vel súlyozott területet és másodrendű nyomatékot értelmezik. A továbbiakban különbséget teszünk a terhelés okozta mechanikai mennyiségek (ezek időfüggetlenek), és a terhelt rúd rezgéseire tartozó mechanikai mennyiségek (ezek az előző mechanikai mennyiségek növekményei és időfüggőek) között – az utóbbiakat b index jelöli. Legyen u_o és w_o a középvonal érintő és sugárirányú elmozdulása, R pedig a középvonal görbületi sugara. Az s ívkoordináta és a φ polárszög között az $s = R\varphi$ összefüggés áll fenn. A

középvonal $\varepsilon_{o\xi}$ fajlagos nyúlását és $\psi_{o\eta}$ szögelfordulását az

$$\varepsilon_{o\xi} = \frac{du_o}{ds} + \frac{w_o}{R}, \quad \psi_{o\eta} = \frac{u_o}{R} - \frac{dw_o}{ds} \quad (3)$$

képletek értelmezik. Az N rúderő és az M hajlítónyomaték a

$$\begin{aligned} \frac{dN}{ds} + \frac{1}{R} \left[\frac{dM}{ds} - \left(N + \frac{M}{R} \right) \psi_{o\eta} \right] + f_t &= 0, \\ \frac{d}{ds} \left[\frac{dM}{ds} - \left(N + \frac{M}{R} \right) \psi_{o\eta} \right] - \frac{N}{R} + f_n &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

egyensúlyi egyenleteknek köteles eleget tenni, ahol f_t és f_n a középvonalon megoszló érintő- és sugárirányú teher (a vizsgálni kívánt konkrét feladatban ez zérus, mivel a szerkezetet a szimmetria tengelyén működő koncentrált erő terheli). A fenti egyenletekhez társul a Hooke törvény:

$$N = \frac{I_{e\eta}}{R^2} \varepsilon_{o\xi} - \frac{M}{R}, \quad M = -I_{e\eta} \left(\frac{d^2 w_o}{ds^2} + \frac{w_o}{R^2} \right), \quad (5a)$$

$$N + \frac{M}{R} = \frac{I_{e\eta}}{R^2} \varepsilon_{o\xi}, \quad m = \frac{A_e R^2}{I_{e\eta}} - 1. \quad (5b)$$

Bevezetve az

$$U_o = \frac{u_o}{R}, \quad W_o = \frac{w_o}{R}, \quad (\dots)^{(n)} = \frac{d^n(\dots)}{d\varphi^n}$$

dimenziómentes elmozdulás-koordinátákat és az n . deriválttal kapcsolatos jelölést az (5) Hooke törvény és a (3) kinematikai egyenletek felhasználásával a

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_o \\ W_o \end{bmatrix}^{(4)} + \begin{bmatrix} -m & 0 \\ 0 & 2 - m\varepsilon_{o\xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_o \\ W_o \end{bmatrix}^{(2)} + \\ + \begin{bmatrix} 0 & -m \\ m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_o \\ W_o \end{bmatrix}^{(1)} + \\ + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_o \\ W_o \end{bmatrix}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -m\varepsilon_{o\xi} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

differenciálegyenlet-rendszert (DER-t) kapjuk a (4) egyensúlyi egyenletekből, ha a rúdon csak koncentrált erő működik teherként. Az átalakítások során kihasználtuk hogy $f_t = 0$ esetén a (4)₁ egyenlet szerint $\varepsilon_{o\xi} = \text{állandó}$.

Ami a mechanikai mennyiségek növekményeit illeti az

$$\begin{aligned} \varepsilon_{mb} = \varepsilon_{o\xi b} + \psi_{o\eta} \psi_{o\eta b}, \quad \psi_{o\eta b} = \frac{u_{ob}}{R} - \frac{dw_{ob}}{ds}, \\ \varepsilon_{o\xi b} = \frac{du_{ob}}{ds} + \frac{w_{ob}}{R} \end{aligned} \quad (7)$$

kinematikai egyenletek, a

$$\frac{d}{ds} \left(N_b + \frac{M_b}{R} \right) - \frac{1}{R} \left(N + \frac{M}{R} \right) \psi_{o\eta b} + f_{tb} = 0, \quad (8a)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 M_b}{ds^2} - \frac{N_b}{R} - \frac{d}{ds} \left[\left(N + \frac{M}{R} \right) \psi_{o\eta b} + \right. \\ \left. + \left(N_b + \frac{M_b}{R} \right) \psi_{o\eta} \right] + f_{nb} = 0 \end{aligned} \quad (8b)$$

mozgásegyenletek (itt

$$f_{tb} = -\rho_a A \frac{\partial^2 u_{ob}}{\partial t^2}, \quad f_{nb} = -\rho_a A \frac{\partial^2 w_{ob}}{\partial t^2}, \quad (8c)$$

ahol A a keresztmetszet területe és ρ_a a keresztmetszeti sűrűség átlaga), továbbá az

$$N_b = \frac{I_{e\eta}}{R^2} \varepsilon_{o\xi b} - \frac{M_b}{R}, \quad M_b = -I_{e\eta} \left(\frac{d^2 w_{ob}}{ds^2} + \frac{w_{ob}}{R^2} \right), \quad (9a)$$

$$N_b + \frac{M_b}{R} = \frac{I_{e\eta}}{R^2} \varepsilon_{o\xi b} \quad (9b)$$

Hooke törvény felhasználásával – értelemszerűen ismételve meg a (6) DER-re vezető gondolatmenetet – a (8) mozgásegyenletekből a

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{ob} \\ W_{ob} \end{bmatrix}^{(4)} + \begin{bmatrix} -m & 0 \\ 0 & 2 - m\varepsilon_{o\xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{ob} \\ W_{ob} \end{bmatrix}^{(2)} + \\ + \begin{bmatrix} 0 & -m \\ m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{ob} \\ W_{ob} \end{bmatrix}^{(1)} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{ob} \\ W_{ob} \end{bmatrix} = \\ = \lambda \begin{bmatrix} U_{ob} \\ W_{ob} \end{bmatrix}, \quad \lambda = \rho_a \frac{AR^4}{I_{e\eta}} \alpha^2 \end{aligned} \quad (10)$$

DER-t kapjuk, harmonikus rezgések feltételezése mellett, a dimenziómentes U_{ob} és W_{ob} elmozdulás amplitúdókra. A λ állandót értelmező összefüggésben α jelöli a sajátkőrfrekvenciát. Az átalakítások során a linearizálás érdekében elhanyagoltuk az alábbi kvadratikus tagokat: (a) (8a) egyenlet: $\varepsilon_{o\xi} \varepsilon_{o\xi b}$, (b) (8b) egyenlet: második tag az $\varepsilon_{o\xi b} - (\varepsilon_{o\xi b} \psi_{o\eta})^{(1)}$ különbségben, és ismét a második tag az $1 - \varepsilon_{o\xi}$ különbségben.

Vegyük észre, hogy a terhelés hatása az állandó értékű $\varepsilon_{o\xi}$ fajlagos nyúlás révén jelenik meg a fenti egyenletben. Ez másként fogalmazva azt jelenti, hogy az α sajátkőrfrekvenciákat adó sajátértékfeladatban az α az $\varepsilon_{o\xi}$ fajlagos nyúláson keresztül függ a tehertől.

Vegyük azt is észre, hogy a rúd heterogén volta az m és a ρ_a paramétereken keresztül van jelen a formalizmusban.

A továbbiakban az egyik végén befogott, másik végén csuklóval megtámasztott heterogén rúd szabadrezgéseit vizsgáljuk. Ez esetben a

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{ob} \\ W_{ob} \end{bmatrix}^{(4)} + \begin{bmatrix} -m & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{ob} \\ W_{ob} \end{bmatrix}^{(2)} + \\ + \begin{bmatrix} 0 & -m \\ m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{ob} \\ W_{ob} \end{bmatrix}^{(1)} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{ob} \\ W_{ob} \end{bmatrix} = \\ = \lambda \begin{bmatrix} U_{ob} \\ W_{ob} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (11)$$

alakban írható fel a mozgásegyenlet. Megjegyezzük, hogy ezt az egyenletet ki kell egészíteni a vonatkozó homogén peremfeltétel rendszerrel.

3. GREEN-FÉLE FÜGGVÉNYMÁTRIX

A jelen szakaszban a [3, 1975] értekezés alapján tömören ismertetjük a (11) DER homogén részéhez adott peremfeltételek mellett tartozó Green-féle függvénymátrix szerepét és bemutatjuk a számítását.

A (11) egyenlet átirtható a

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\mathbf{y}) &= \sum_{\nu=0}^4 \overset{\nu}{\mathbf{P}}(\varphi) \mathbf{y}^{(\nu)}(\varphi) = \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\overset{4}{\mathbf{P}}} \underbrace{\begin{bmatrix} U_{ob} \\ W_{ob} \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}^{(4)}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -m & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{\overset{2}{\mathbf{P}}} \underbrace{\begin{bmatrix} U_{ob} \\ W_{ob} \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}^{(2)}} + \\ &+ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -m \\ m & 0 \end{bmatrix}}_{\overset{1}{\mathbf{P}}} \underbrace{\begin{bmatrix} U_{ob} \\ W_{ob} \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}^{(1)}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m+1 \end{bmatrix}}_{\overset{0}{\mathbf{P}}} \underbrace{\begin{bmatrix} U_{ob} \\ W_{ob} \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}^{(0)}} = \\ &= \lambda \underbrace{\begin{bmatrix} U_{ob} \\ W_{ob} \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}(\varphi)}, \quad (12) \end{aligned}$$

azaz a

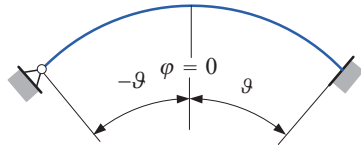
$$\mathbf{K}[\mathbf{y}(\varphi)] = \mathbf{r}(\varphi) \quad (13)$$

alakba, ahol $\overset{3}{\mathbf{P}}(x) = 0$, míg a jobb oldalon álló $\mathbf{r}(\varphi)$ súlyozott tehervektornak tekinthető. Vegyük észre, hogy a (11) DER elfajul, mivel a $\overset{4}{\mathbf{P}}$ mátrixnak nincsen inverze. A (11) DER homogén részének általános megoldása az

$$\mathbf{y} = \left[\sum_{i=1}^4 \overset{\mathbf{Y}}{(2 \times 2)}_i \overset{\mathbf{C}}{(2 \times 2)}_i \right]_{(2 \times 1)} \mathbf{e} \quad (14)$$

alakban írható fel, ahol a \mathbf{C}_i állandó és nem szinguláris mátrix, az \mathbf{e} pedig állandó oszlop mátrix, továbbá

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_1 &= \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 \\ \sin \varphi & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y}_2 = \begin{bmatrix} -\sin \varphi & 0 \\ \cos \varphi & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{Y}_3 &= \begin{bmatrix} -\sin \varphi + \varphi \cos \varphi & (m+1)\varphi \\ \varphi \sin \varphi & -m \end{bmatrix}, \\ \mathbf{Y}_4 &= \begin{bmatrix} -\cos \varphi - \varphi \sin \varphi & 1 \\ \varphi \cos \varphi & 0 \end{bmatrix}. \quad (15) \end{aligned}$$



2. ábra. A vizsgált lapos síkgörbe rúd

Nem nehéz belátni, hogy a (12) egyenlethez a vizsgálat tárgyát képező rúd esetén – lásd a 2. ábrát – az

$$\begin{aligned} U_{ob}(-\vartheta) &= 0, & U_{ob}(\vartheta) &= 0, \\ W_{ob}(-\vartheta) &= 0, & W_{ob}(\vartheta) &= 0, \\ W_{ob}^{(2)}(-\vartheta) &= 0, & W_{ob}^{(1)}(\vartheta) &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

peremfeltételek tartoznak.

A (13), (16) peremérték feladat megoldását az

$$\mathbf{y}(\varphi) = \int_a^b \mathbf{G}(\varphi, \psi) \mathbf{r}(\psi) d\psi \quad (17)$$

alakban keressük, ahol a $\mathbf{G}(\varphi, \psi)$ Green-féle függvénymátrixot a következő tulajdonságok határozzák meg:

1. A Green-féle függvénymátrix folytonos függvénye φ -nek és ψ -nek, a $-\vartheta \leq \varphi \leq \psi \leq \vartheta$ és $-\vartheta \leq \psi \leq \varphi \leq \vartheta$ háromszögeken. A

$$(\mathbf{G}_{11}(\varphi, \psi), \mathbf{G}_{12}(\varphi, \psi)) \quad [\mathbf{G}_{21}(\varphi, \psi), \mathbf{G}_{22}(\varphi, \psi)]$$

függvények (2-szer) [4-szer] differenciálhatók φ szerint. Maguk a

$$\frac{\partial^\nu \mathbf{G}(\varphi, \psi)}{\partial x^\nu} = \mathbf{G}^{(\nu)}(\varphi, \psi) \quad (\nu = 1, 2),$$

$$\frac{\partial^\nu G_{2i}(\varphi, \psi)}{\partial x^\nu} = G_{2i}^{(\nu)}(\varphi, \psi) \quad (\nu = 1, \dots, 4; i = 1, 2)$$

deriváltak pedig folytonos függvényei φ -nek és ψ -nek.

2. Legyen φ a $[-\vartheta, \vartheta]$ tartományban. Annak ellenére, hogy a

$$G(\varphi, \psi)_{11}, \quad G_{12}^{(1)}(\varphi, \psi),$$

$$G_{21}^{(\nu)}(\varphi, \psi) \quad (\nu = 1, 2, 3), \quad G_{22}^{(\nu)}(\varphi, \psi) \quad (\nu = 1, 2)$$

függvény és deriváltak folytonosak $\varphi = \psi$ esetén, a $G_{11}^{(1)}(\varphi, \psi)$ és $G_{22}^{(3)}(\varphi, \psi)$ deriváltaknak ugyanitt véges szakadása van:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [G_{11}^{(1)}(\varphi + \varepsilon, \varphi) - G_{11}^{(1)}(\varphi - \varepsilon, \varphi)] = 1/P_{11}(\varphi),$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [G_{22}^{(3)}(\varphi + \varepsilon, \varphi) - G_{22}^{(3)}(\varphi - \varepsilon, \varphi)] = 1/P_{22}(\varphi).$$

3. Legyen α egy tetszőleges állandó vektor. Rögzített $\varphi \in [-\vartheta, \vartheta]$ mellett a $\mathbf{G}(\varphi, \psi)\alpha$ vektor, mint φ ($\varphi \neq \psi$) függvénye ki kell elégítse a homogén differenciálegyenletet:

$$\mathbf{K}[\mathbf{G}(\varphi, \psi)\alpha] = 0.$$

4. A $\mathbf{G}(\varphi, \psi)\alpha$ vektor, mint φ függvénye köteles teljesíteni a (16) peremfeltételeket.

Igazolható a Green-féle függvénymátrix egzisztenciája. Igazolható hogy a (17) vektor kielégíti a (13) DER-t és a (16) peremfeltételeket.

A Green-féle függvénymátrixot az értelmezés harmadik szakasza alapján a

$$\underbrace{\mathbf{G}(\varphi, \psi)}_{(2 \times 2)} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{Y}_i(\varphi) [\mathbf{A}_i(\psi) \pm \mathbf{B}_i(\psi)] \quad (18)$$

alakban keressük, ahol az előjel {pozitív}[negatív] ha $\{\varphi \leq \psi\}[\varphi \geq \psi]$ és

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} i & i \\ A_{11} & A_{12} \\ i & i \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} i & i \\ B_{11} & B_{12} \\ i & i \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}. \quad (19)$$

A Green-féle függvénymátrix értelmezésének második tulajdonsága a

$$\begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & -\sin \psi + \psi \cos \psi & (1+m)\psi & -\cos \psi - \psi \sin \psi & 1 \\ \sin \psi & \cos \psi & \psi \sin \psi & -m & \psi \cos \psi & 0 \\ -\sin \psi & -\cos \psi & -\psi \sin \psi & 1+m & -\psi \cos \psi & 0 \\ \cos \psi & -\sin \psi & \psi \cos \psi + \sin \psi & 0 & -\psi \sin \psi + \cos \psi & 0 \\ -\sin \psi & -\cos \psi & -\psi \sin \psi + 2 \cos \psi & 0 & -\psi \cos \psi - 2 \sin \psi & 0 \\ -\cos \psi & \sin \psi & -\psi \cos \psi - 3 \sin \psi & 0 & \psi \sin \psi - 3 \cos \psi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{B_{11}} & \frac{1}{B_{12}} \\ \frac{2}{B_{11}} & \frac{2}{B_{12}} \\ \frac{3}{B_{11}} & \frac{3}{B_{12}} \\ \frac{3}{B_{21}} & \frac{3}{B_{22}} \\ \frac{4}{B_{11}} & \frac{4}{B_{12}} \\ \frac{4}{B_{21}} & \frac{4}{B_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{2m} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (20)$$

lineáris egyenletrendszerre vezet. Ez az egyenletrendszer zárt alakban oldható meg:

$$\begin{aligned} \frac{1}{B_{11}} &= \frac{1}{2} \sin \psi - \frac{1}{4} \psi \cos \psi, \\ \frac{2}{B_{11}} &= \frac{1}{4} \psi \sin \psi + \frac{1}{2} \cos \psi, \\ \frac{3}{B_{11}} &= \frac{1}{4} \cos \psi, \quad \frac{3}{B_{21}} = \frac{1}{2m}, \\ \frac{4}{B_{11}} &= -\frac{1}{4} \sin \psi, \quad \frac{4}{B_{21}} = -\frac{1}{2} (1+m) \frac{\psi}{m} \end{aligned} \quad (21a)$$

és

$$\begin{aligned} \frac{1}{B_{12}} &= -\frac{1}{4} \cos \psi - \frac{1}{4} \psi \sin \psi, \\ \frac{2}{B_{12}} &= \frac{1}{4} \sin \psi - \frac{1}{4} \psi \cos \psi, \\ \frac{3}{B_{12}} &= \frac{1}{4} \sin \psi, \quad \frac{3}{B_{22}} = 0, \\ \frac{4}{B_{12}} &= \frac{1}{4} \cos \psi, \quad \frac{4}{B_{21}} = \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (21b)$$

$$\begin{bmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta & \sin \vartheta - \vartheta \cos \vartheta & -(1+m)\vartheta & -\cos \vartheta - \vartheta \sin \vartheta & 1 \\ \cos \vartheta & -\sin \vartheta & -\sin \vartheta + \vartheta \cos \vartheta & (1+m)\vartheta & -\cos \vartheta - \vartheta \sin \vartheta & 1 \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta & \vartheta \sin \vartheta & -m & -\vartheta \cos \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & \vartheta \sin \vartheta & -m & \vartheta \cos \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & -\cos \vartheta & -\vartheta \sin \vartheta + 2 \cos \vartheta & 0 & \vartheta \cos \vartheta + 2 \sin \vartheta & 0 \\ \cos \vartheta & -\sin \vartheta & \sin \vartheta + \vartheta \cos \vartheta & 0 & \cos \vartheta - \vartheta \sin \vartheta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{A_{1i}} \\ \frac{2}{A_{1i}} \\ \frac{3}{A_{1i}} \\ \frac{3}{A_{2i}} \\ \frac{4}{A_{1i}} \\ \frac{4}{A_{2i}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a \cos \vartheta - b \sin \vartheta - c(\sin \vartheta - \vartheta \cos \vartheta) + d(1+m)\vartheta + e(\cos \vartheta + \vartheta \sin \vartheta) - f \\ a \cos \vartheta - b \sin \vartheta - c(\sin \vartheta - \vartheta \cos \vartheta) + d(1+m)\vartheta - e(\cos \vartheta + \vartheta \sin \vartheta) + f \\ a \sin \vartheta - b \cos \vartheta - c\vartheta \sin \vartheta + dm + e\vartheta \cos \vartheta \\ a \sin \vartheta + b \cos \vartheta + c\vartheta \sin \vartheta - dm + e\vartheta \cos \vartheta \\ -a \sin \vartheta + b \cos \vartheta + c(\vartheta \sin \vartheta - 2 \cos \vartheta) - e(\vartheta \cos \vartheta + 2 \sin \vartheta) \\ a \cos \vartheta - b \sin \vartheta + c(\sin \vartheta + \vartheta \cos \vartheta) + e(\cos \vartheta - \vartheta \sin \vartheta) \end{bmatrix}. \quad (23)$$

A (23) egyenletrendszer is zárt alakban oldható meg. A megoldást a Maple 15 program felhasználásával határoztuk meg. Azokat a viszonylag hosszú kifejezéseket, melyeket az $\frac{1}{A_{11}}(\psi), \dots, \frac{4}{A_{21}}(\psi); \psi \in [-\vartheta, \vartheta]$ függvényekre kaptunk terjedelmi okok miatt nem közöljük.

Figyelembe véve, hogy a (11) mozgásegyenlet esetén $\mathbf{r} = \lambda \mathbf{y}(\varphi)$ a (11) mozgásegyenlet és a (16) homogén peremfeltétel-rendszer által meghatározott sajátér-

Figyeljük meg, hogy a megoldást adó

$$\frac{1}{B_{11}}(\psi), \dots, \frac{4}{B_{21}}(\psi), \quad \psi \in [-\vartheta, \vartheta]$$

függvények függetlenek a peremfeltételektől.

Vezessük be az egyszerűbb írásmód kedvéért az

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{B_{1i}}, \quad b = \frac{2}{B_{1i}}, \quad c = \frac{3}{B_{1i}}, \\ d &= \frac{3}{B_{2i}}, \quad e = \frac{4}{B_{1i}}, \quad f = \frac{4}{B_{2i}} \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (22)$$

jelöléseket.

Figyelembe véve a (16) peremfeltételeket, de elhagyva a vonatkozó részleteket hat egyenletből álló egyenletrendszert kapunk az

$$\frac{1}{A_{11}}(\psi), \dots, \frac{4}{A_{21}}(\psi), \quad \psi \in [-\vartheta, \vartheta]$$

függvényekre:

térfeladat megoldása köteles kielégíteni a

$$\mathbf{y}(\varphi) = \lambda \int_a^b \mathbf{G}(\varphi, \psi) \mathbf{y}(\psi) d\psi \quad (24)$$

integrálegyenlet-rendszert. Másként fogalmazva azt mondhatjuk, hogy a (24) homogén integrálegyenlet-rendszer megoldása megadja a λ sajátértékeket és az \mathbf{y} sajátfüggvényeket. A (24) integrálegyenlet-rendszer által meghatározott sajátértékfeladatot algebrai sajátér-

térfeladatra lehet visszavezetni a peremelem módszer numerikus eljárásainak felhasználásával.

4. HETEROGÉN EGYENES RÚD REZGÉSEI

A görbe rúdra vonatkozó eredmények kiértékelését segíti majd, ha áttekintjük röviden az egyenes tengelyű, keresztmetszeti inhomogenitású rudak sajátrezgéseire vonatkozó sajátértékfeladat megoldását [5, 2011]. Feltelevük hogy az egyenes rúd keresztmetszeti jellemzői és heterogenitása megegyezik a görbe rúdéval. Feltelevük továbbá hogy az egyenes és görbe rúd azonos hosszúságú. Ismeretes, hogy ez esetben a

$$\frac{d^4 W_s}{ds^4} = \lambda_s W_s, \quad \lambda_s = \frac{\rho_a A}{I_{e\eta}} \alpha_s^2 \quad (25)$$

a középvonalra merőleges irányú rezgések W_s amplitúdóját adó differenciál-egyenletet. Itt az indexben álló s az egyenes rudat azonosítja, egyébként a jelölések ugyanazok mint a görbe rúd esetén, pl. ρ_a a keresztmetszet átlagos sűrűsége, avagy α_s pedig az egyenes rúd sajátfrekvenciája. A bal oldali végén csuklóval megtámasztott, jobb oldali végén befogott egyenes rúd esetén az 1. táblázat tartalmazza a peremfeltételeket.

1. táblázat.

Bal oldalon csukló, jobb oldalon befogás

Bal oldali támasz	Jobb oldali támasz
$W_s = 0$	$W_s = 0$
$W_s^{(2)} = 0$	$W_s^{(1)} = 0$

Igazolható – lásd pl. [5, 2011] – hogy

$$\sqrt[4]{\lambda_{i s}} \ell_s = c_{i, jell} \pi, \quad i = 1, 2, \dots \quad (26)$$

ahol az i index a sajátértékeket (vagy ami ugyanaz, a sajátfrekvenciákat) számlálja, ℓ_s az egyenes rúd hossza, a $c_{i, jell}$ együttható értéke pedig a támaszoktól függ – nekünk a továbbiakban a 2. táblázatból csak a bal oldalon csuklóval megtámasztott, a jobb oldalon pedig befogott rúd esetére vonatkozó adatok kellenek, a többi érték csak a teljesség kedvéért szerepel a táblázatban:

2. táblázat.

A $c_{i, jell}$ együttható értékei

Megtámasztás	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$
Két végén csukló	1,000	4,000	9,00	16,00
Csukló, befogás	1,556	5,078	10,541	17,97
Két végén befogás	2,266	6,243	12,23	20,25

A (25)₂ és a (26) képletek egybevetéséből az

$$\alpha_{i s} = \frac{c_{i, jell} \pi^2}{\sqrt{\frac{\rho_a A}{I_{e\eta}} \ell_s^2}} \quad (27)$$

összefüggést kapjuk a heterogén egyenes rúd i . sajátfrekvenciájára.

5. SZÁMÍTÁSI EREDMÉNYEK

Összevetve a görbe rúdra érvényes (10) összefüggést, valamint az egyenes tengelyű rudakra érvényes (27) képletet (az eddigiekkel összhangban azonos hosszúságú, azonos keresztmetszetű és azonos heterogenitású rudakat tételezve fel) rögtön adódik, hogy a

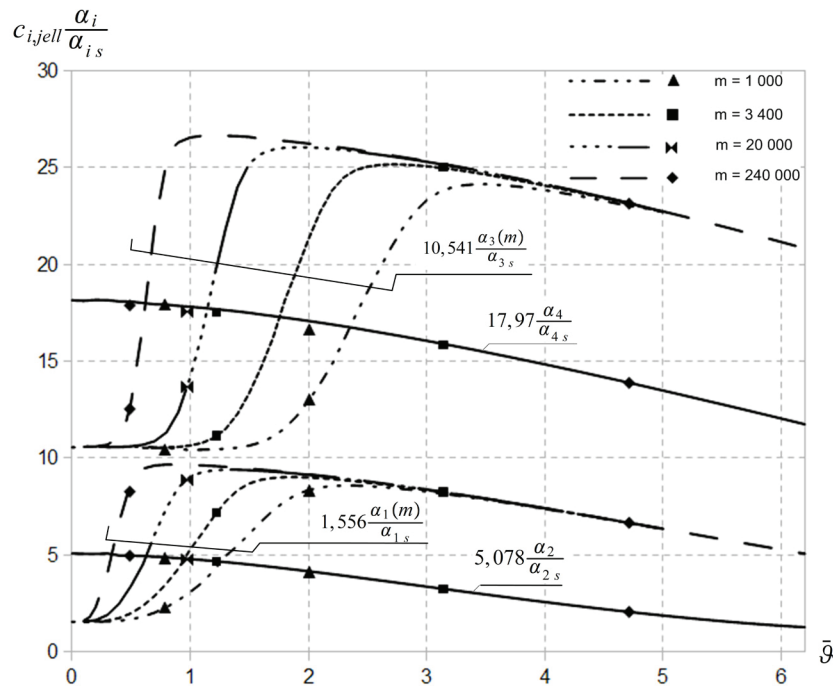
$$\frac{\alpha_i}{\alpha_{i s}} = \frac{\sqrt{\lambda_i}}{\sqrt{\frac{\rho_a A}{I_{e\eta}} R^2}} = \frac{\bar{\vartheta}^2 \sqrt{\lambda_i}}{c_{i, jell} \pi^2} \quad (28)$$

tört a sajátfrekvenciák hányadosa. A képlet átalakítása során kihasználtuk, hogy $\ell_s = 2R\vartheta = R\bar{\vartheta}$ – azonos a két rúd hossza.

Program készült Fortran90 programozási nyelven a (24) Fredholm integrálegyenlet-rendszerrel kapcsolatos sajátértékfeladat megoldására. A program a fenti hányadost határozza meg a $\bar{\vartheta}$ teljes nyílásszög és a heterogenitást tükröző m paraméter függvényében. A számítási eredményeket a 3. ábra grafikusán szemlélteti az első négy sajátfrekvencia esetére. Az alábbiakra érdemes felhívni a figyelmet:

- (a) megváltozik a $\bar{\vartheta} \rightarrow 0$ határesethez tartozó frekvenciasorrend ahogy a $\bar{\vartheta}$ nyílásszög növekszik – pl. az első sajátfrekvenciából nagyságát tekintve a harmadik lesz;
- (b) a $\bar{\vartheta} \rightarrow 0$ határesetben páros frekvenciák nem függenek az m paramétertől.

Végeselemes kontrolszámításokat is végeztünk az Abaqus 6.7. kereskedelmi szoftver segítségével (a Linear perturbation/Frequency step módot választva a B23 jelű két csomópontú köbös rúdelemek segítségével). A végeselemes számítások eredményeit diszkrét pontok jelölik az ábrán. A kétféleképpen végzett számítások eredményei között nincs jelentős eltérés. A maximális különbség a saját programmal végzett számítási eredményekre vonatkoztatva nem haladja meg a 2,7%-ot.



3. ábra A sajátfrekvenciák hányadosai

6. KÖVETKEZTETÉSEK

Összhangban a jelen tanulmány bevezetésében megfogalmazott célkitűzésekkel az alábbiakat érdemes ehelyütt hangsúlyozni:

- Ha ismeretes a konstans fajlagos nyúlás az azt okozó teher függvényében, akkor a (10) mozgásegyenlet felhasználásával meghatározható a terhelés és sajátfrekvenciák közötti kapcsolat a lineáris elmélet keretei között.
- Zérus terhelés esetére homogén Fredholm-féle integrálegyenlet rendszerrel kapcsolatos sajátértékfeladatra vezettük vissza a sajátfrekvenciák meghatározásának feladatát. Ez a vonatkozó Green-féle függvénymátrix kiszámítását igényelte. Ezek az eredmények ismereteink szerint új eredményeknek tekinthetők.
- Érdemes arra itt külön is felhívni a figyelmet, hogy a Green-féle függvénymátrix ismeretében tetszőleges $r(\varphi)$ teherre kvadratúrákkal számítható ki a rúd középvonalának elmozdulása – visszahivatkozunk itt az elmozdulást adó (17) képletre.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A kutatás a TÁMOP 4.2.4.A/2-11-1-2012-0001 azonosító számú Nemzeti Kiválóság Program - Hazai hallgatói, illetve kutatói személyi támogatást biztosító rendszer kidolgozása és működtetése konvergencia program

című kiemelt projekt keretében zajlott. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.

A kutató munka a TÁMOP-4.2.2/B-10/1-2010-0008 jelű projekt részeként - az Új Magyarország Fejlesztési Terv keretében - az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.

Hivatkozások

- [1] L. Kiss. A possible model for heterogenous curved beams. *Multidiszciplináris tudományok*, 2(1):61–76, 2012, (in Hungarian).
- [2] K. Federhoffer. *Über den Einfluss der Achsendehnung der Rotationsträgheit und der Schubkraft auf die Frequenzen der Biegungsschwingungen eines Kreisringes*. Sitz-Ber. Akad. Wiss. Austria, Series IIa. Vol 144., 1935.
- [3] G. Szeidl. *Effect of Change in Length on the Natural Frequencies and Stability of Circular Beams*. Ph.D Thesis, Department of Mechanics, University of Miskolc, Hungary, 1975. (in Hungarian).
- [4] G. Szeidl and L. Kiss.: A Nonlinear Mechanical Model For Heterogeneous Curved Beams. In S. Vlase, editor, *Proceedings of the 4th International Conference on Advanced Composite Materials Engineering, COMAT*, volume 2, pages 589–596, 18 - 20 October 2012, Braşov, Romania.
- [5] L. Kiss. Heterogén anyagú síkgörbe rudak egyes feladatainak megoldása. MSc diplomatervezés, Miskolci Egyetem, Mechanikai Tanszék, 2011.