STIRLING HŰTŐGÉP NUMERIKUS ANALÍZISE

NUMERICAL ANALYSIS OF STIRLING REFRIGERATOR

Handki Andrea[1], dr. Tolvaj Béla[2]

ABSTRACT

In this paper a method is presented to determine the main characteristics of the thermodynamic processes in the workspace and regenerator of a Stirling machine. The gas flow is described as one-dimensional, non-isentropic, unsteady flow. The basic equations, boundary and initial conditions are presented. The equations are solved with the method of characteristics in case of the working gas, and with the explicit grid method in case of the regenerator.

1. BEVEZETÉS

A Stirling gép működésének leírása, a benne végbemenő folyamatok modellezése nem egyszerű feladat. A most bemutatott módszer a hengerekben és a regenerátorban lejátszódó termodinamikai folyamatokat egydimenziós, instacionárius, nem izentrópikus gázáramlásként modellezi. A modellezéskor feltételezzük, hogy az állapotjelzők a munkaterek középvonalához rendelt *x* helykoordináta és a *t* idő függvényei. Bemutatjuk a mozgás-, a kontinuitási- és az energiaegyenletből álló parciális differenciálegyenlet rendszer egyenleteinek előállítását. Ismertetjük az egyenletrendszer megoldási módszerét, mely a karakterisztikák módszerén és az explicit rácsmódszeren alapul. Bemutatjuk a megoldáshoz szükséges kezdő- és peremfeltételeket.

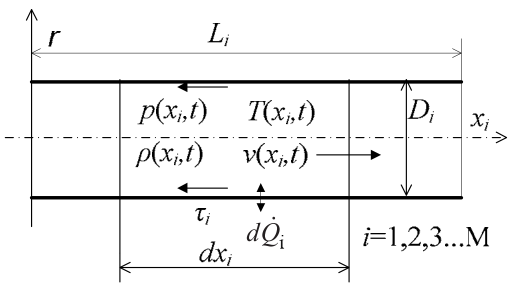
2. A SZÁMÍTÁSI MODELL

A munkagáz áramlását a Stirling hűtőgép részegységeiben az 1. ábrán bemutatott modell segítségével írjuk le. A Stirling hűtőgép minden részegységében a gázáramlást egydimenziós tekintettük és feltételeztük, hogy a csőátmérő gépegységenként állandó, a munkagáz áramlási sebessége és állapotjelzői a *t* idő, és a csővezeték közép-vonalához rendelt *x* helykoordináta függvényei. A gázrészecskék között súrlódás nincs, de az áramlást a csőfalon ébredő csúsztatófeszültség fékezi. A munkagáz és a csőfal között hőcsere lehetséges. A Stirling gép munkatere zárt, vagyis a gáztöltet tömege állandó. A munkatér több részből áll, közülük a munkahengerek térfogata a bennük mozgó dugattyúk miatt időben változó értékű.

A Stirling gép teljes munkateréhez minimum három koordináta rendszert kell rendelni. Korábbi cikkünkben [1,2] részletesen leírtuk a regenerátor nélküli Stirling gép modellezését. A következőkben az ott bemutatott módszer rövid összefoglalása után a regenerátorral ellátott Stirling gép numerikus modellezésére térünk rá.

Az alkalmazott változók jelölése:

a_i	$[m/s]$	hangsebesség;
α_R	$[W/(m^2K)]$	hőátadási tényező a regenerátorban;
λ_R	$[W/(mK)]$	a regenerátor töltet hővezetési tényezője;
A_i	$[m^2]$	a csőkeresztmetszet;
A_R	$[m^2]$	a regenerátor töltet keresztmetszete;
c_R	$[kJ/(kgK)]$	a regenerátor fajhője;
$d\dot{Q}_i$	$[W]$	az elemi hőáram;
D_i	$[m]$	csőátmérő;
k_i	$[W/(m^2K)]$	hőátviteli tényező;
K_R	$[m]$	a gázzal érintkező pórusok összes kerülete az x tengelyre merőleges metszetben;
L_i	$[m]$	csőhossz;
$p_i(x_i,t)$	$[Pa]$	gáznyomás;
$\rho_i(x_i,t)$	$[kg/m^3]$	a gázsűrűség;
s_i	$[J/(kgK)]$	fajlagos entrópia;
t	$[s]$	idő;
τ_i	$[N/m^2]$	a csőfalon ébredő csúsztatófeszültség;
$T_i(x_i,t)$	$[K]$	gázhőmérséklet;
$T_R(x_i,t)$	$[K]$	a regenerátorhőmérséklet;
$v_i(x_i,t)$	$[m/s]$	áramlási sebesség;
x_i	$[m]$	a középvonalon mért helykoordináta.



1. ábra. Elemi csőszakasz és jellemző mennyiségei

A Stirling gép részegységének jelölésére az *i* indexet alkalmaztuk. Az *i*-edik részegységben a gázáramlás három egyenlettel írható le [3]. Ezek a következők:

mozgásegyenlet:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho_i}\frac{\partial p_i}{\partial x_i} + \frac{\lambda_i v_i |v_i|}{2D_i} = 0, \quad (1)$$

---

[1]tudományos segédmunkatárs, Miskolci Egyetem Áramlás- és Hőtechnikai Gépek Tanszéke

[2]egyetemi docens, Miskolci Egyetem Áramlás- és Hőtechnikai Gépek tanszéke

kontinuitási egyenlet:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\rho_i a_i^{2}}\left[\frac{\partial p_i}{\partial t}+v_i\frac{\partial p_i}{\partial x_i}\right]+\frac{\partial v_i}{\partial x_i}+\\&+v_i\frac{\partial\left(\ln(A_i)\right)}{\partial x_i}=0\end{aligned}, \tag{2}$$

és energiaegyenlet:

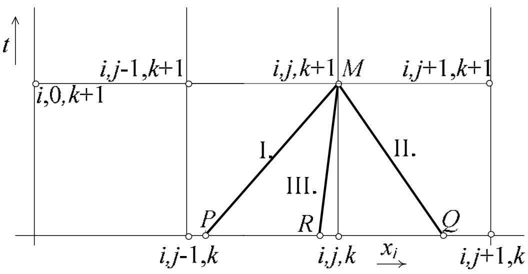
$$\begin{aligned}&\frac{ds_i}{dt}=\left[\frac{\partial s_i}{\partial t}+v_i\frac{\partial s_i}{\partial x_i}\right]=\frac{\lambda_i}{2D_iT_i}v_i^{2}\left|v_i\right|+\\&+\frac{4}{D_i\rho_iT_i}k_i\left(T_i-T_{ai}\right)\end{aligned}. \tag{3}$$

Az (1)-(3) egyenletrendszert a karekterisztikák módszerével oldottuk meg.

3. A KARAKTERISZTIKÁK MÓDSZERE

3.1. A csövekben és hengerekben kialakuló instacionárius áramlás számítása

A munkahengerhez és az összekötő csővezetékekhez egy-egy x_i,t síkot rendeltünk, ahol (i=1,2,3). A három x_i,t síkot változó Δx_i és állandó Δt osztásközű rácshálózattal látjuk el. Az egyes szakaszokat i index jelöli, a szakaszokban lévő számítási pontok száma N_i. A számítási pontok (rácspontok) mindegyikét egy i,j,k indexhármas határozza meg, ahol i csőszakaszt, j helyet, k pedig időpillanatot jelöl.



2. ábra. Az egyes gépegységekhez rendelt koordinátarendszer és a rácspontok

A k-adik rácspontban lévő mennyiségek ismeretében először lineáris interpolációval megkerestük azon P, Q és R pontokat, amelyekből kiinduló karakterisztikák az (i,j,k+1) pontban találkoznak, majd a karakterisztika egyenletek lineáris approximációval történt integrálása után kiszámítottuk a $v_{i,j,k+1}$, $p_{i,j,k+1}$ és $s_{i,j,k+1}$ értékét. Az M pontban (i,j,k+1) az állapotjelzők a karakterisztika egyenletekből kiszámíthatók:

$$v_{i,j,k+1}=\frac{B_{P_i}\rho_Pa_P+B_{Q_i}\rho_Qa_Q}{\rho_Qa_Q+\rho_Pa_P}, \tag{4}$$

$$p_{i,j,k+1}=\left(B_{P_i}-B_{Q_i}\right)\left(\frac{1}{\rho_Pa_P}+\frac{1}{\rho_Qa_Q}\right)^{-1}, \tag{5}$$

$$s_{i,j,k+1}=B_{R_i}, \tag{6}$$

$$B_{P_i}=v_P+\frac{p_P}{\rho_Pa_P}-\lambda_i\frac{v_P\left|v_P\right|}{2D_i}\Delta t, \tag{7}$$

$$B_{Q_i}=v_Q-\frac{p_Q}{\rho_Qa_Q}-\lambda_i\frac{v_Q\left|v_Q\right|}{2D_i}\Delta t, \tag{8}$$

$$B_{R_i}=s_R+\frac{\lambda}{2DT_R}v^2\left|v\right|-\frac{4}{D\rho_RT_R}k(T_R-T_{kö}). \tag{9}$$

A k+1 rácspontbeli hőmérséklet, sűrűség és hangsebesség a következő képletekkel számítható ki:

$$T_{i,j,k+1}=T_Re^{\frac{s_{i,j,k+1}-s_R}{c_p}}\left(\frac{p_{i,j,k+1}}{p_R}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}, \tag{10}$$

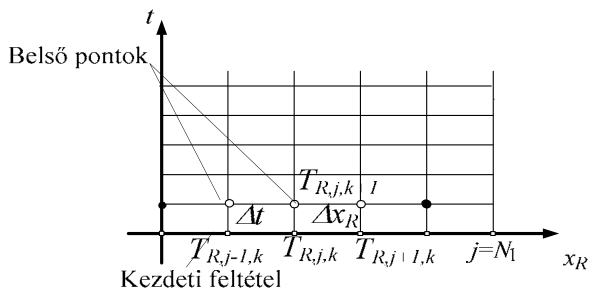
$$\rho_{i,j,k+1}=\frac{p_{i,j,k+1}}{RT_{i,j,k+1}}, \tag{11}$$

$$a_{i,j,k+1}=\sqrt{\kappa RT_{i,j,k+1}}. \tag{12}$$

Így egy tetszőleges (pl. kezdőfeltételként ismert) k-adik sor értékeiből a (k+1)-edik sor rácspontjaiban a $v_{i,j,k+1}$, $p_{i,j,k+1}$ és $s_{i,j,k+1}$ értékhármasok sorra kiszámíthatóak, kivéve az egyes csőszakaszok kezdő- és végpontjait ($j\neq 1$, $j\neq N_i$), amelyekben a csatlakozási ill. peremfeltételeknek kell teljesülni. A számítás akkor konvergens, ha valamennyi részegységre teljesül a Courant - Friedrichs - Lewy féle stabilitási és konvergencia feltéte:

$$T_i=\frac{\Delta t}{\Delta x_i}<\frac{1}{v_{max}+a_i}. \tag{13}$$

3.2. A regenerátorban kialakuló tranziens folyamatok számítása



3. ábra. A szilárd regenerátortesthez rendelt koordinátarendszer és a rácspontok

A Stirling gépek regenerátora porózus testként modellezhető, ahol a nyitott pórusokban áramló munkagáz fűti vagy hűti regenerátort. A munkagáz modellezése a 3.1. fejezetben leírtak szerint történik, az alkalmazott modellt a 3. ábra mutatja be. A szilárd regenerátortest hőmérlege a középvonalával egybeesően felvett x_R koordinátarendszerben az egydimenziós Fourier-egyenlettel írható le:

$$c_R\,\rho_R\,\frac{\partial T_R}{\partial t}=\lambda_R\,\frac{\partial^2 T_R}{\partial x_i^{\,2}}+\frac{\alpha_R\,K_R}{A_R}\left(T_i-T_R\right). \quad (14)$$

A (14) egyenletet az explicit numerikus eljárás szerint diszkretizálva és felhasználva a *3. ábra* jelöléseit $T_{R,j,k+1}$ rácsponti hőmérséklet a k-adik időpontbeli rácsponti hőmérsékletekből kiszámítható:

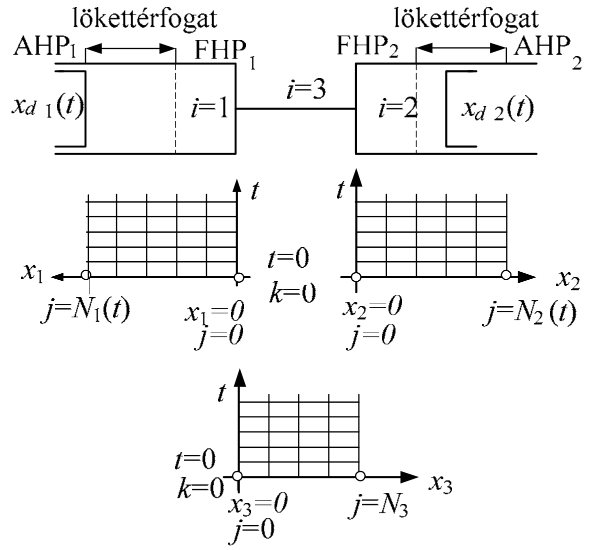
$$T_{R,i,j,k+1}=T_{R,i,j,k}\left[1-\frac{2\Delta t\,\lambda_R}{c_R\,\rho_R\,\Delta x_R^2}\right]+\frac{\Delta t}{c_R\,\rho_R}\cdot$$
$$\cdot\left[\lambda_R\,\frac{T_{R,i,j+1,k}+T_{R,i,j-1,k}}{\Delta x_R^2}+\frac{\alpha_R\,K_R}{A_R}\cdot\left(T_{i,j,k}-T_{R,i,j,k}\right)\right]. \quad (15)$$

A (15) képlet valamennyi belső rácspont hőmérsékletének kiszámítására alkalmas. Ha a regenerátor két végén a hőcserét elhanyagoljuk, akkor

$T_{R,i,0,k+1}=T_{R,i,1,k+1}$ és $T_{R,i,N_R,k+1}=T_{R,i,N_R-1,k+1}$.

4. PEREMFELTÉTELEK

A 4. ábrán az egyes géprészekhez rendelt koordinátarendszerek láthatók.

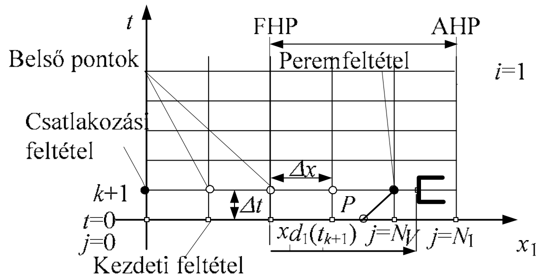


4. ábra. A gépegységekhez kapcsolt koordináta rendszerek

A vízszintes tengelyeken az x_i helykoordinátákat, a függőleges tengelyeken a t időt ábrázoltuk. A peremfeltételek egyszerű megadhatósága érdekében a Δt időlépés értéke minden koordináta rendszerben azonos értékű. A Δx_i rácsosztás viszont koordinátarendszerenként változhat.

4.1. 1. henger dugattyújának peremfeltétele

Az i=1. hengerhez rendelt rácshálózat a 5. ábrán látható.



5. ábra. Az 1. hengerhez rendelt rácshálózat

A t=0 (k=0) időpillanatban a dugattyú a felső holtpontban van. A rácspontok száma ekkor a legkevesebb, de $N_{1min}\geq 2$. A (j=0…$N_1(t)$,k=0) rácspontban a kezdeti feltételből $p_{i,j,k}, s_{i,j,k}$ *és* $v_{i,j,k}$ értéke ismert. Δt idő alatt a dugattyú $x_{d1}(t_{k+1})$ utat tesz meg. A t_{k+1} időpillanatban a belső pontokban az (4-13) egyenletekből meghatározható $p_{i,j,k+1}, s_{i,j,k+1}$ és $v_{i,j,k+1}$ értéke. A dugattyú a két holtpont között a mozgástörvényei által meghatározott helyen tartózkodik. A dugattyú $x_{d1}(t)$ mozgástörvénye, ezáltal sebessége és gyorsulása is ismert. Behelyettesítve $t=t_{k+1}$ értékét a dugattyú k+1 időpillanatbeli helyzete, sebessége és gyorsulása meghatározható:

$$x_{d1,k+1}=x_{d1}(t_{k+1}), \quad (16)$$

$$v_{d1,k+1}=v_{d1}(t_{k+1}), \quad (17)$$

$$a_{d1,k+1}=a_{d1}(t_{k+1}). \quad (18)$$

A $j=N_V$ pontban a $v_{1,NV,k+1}$ sebesség lineáris interpolációval határozható meg:

$$v_{1,N_V,k+1}=v_{1,N_V-1,k+1}+ + \Delta x_1\,\frac{v_{d1,k+1}-v_{1,N_V-1,k+1}}{\Delta x_1+s_{V,k+1}}, \quad (19)$$

ahol:

$$N_V=int\left(\frac{x_{d1,k+1}}{\Delta x_1}\right), \quad (20)$$

$$s_{V,k+1}=x_{d1,k+1}-N_V\cdot\Delta x_1. \quad (21)$$

A sebesség ismeretében a nyomás a P pontból a ($1,N_V,k$+1) pontba befutó

$$v_{1,N_V,k+1}+\frac{1}{\rho_P a_P}\,p_{1,N_V,k+1}=B_P \quad (22)$$

karakterisztika egyenletből meghatározható:

$$p_{1,N_V,k+1}=\left(B_Q-v_{1,N_V,k+1}\right)\rho_P a_P. \quad (23)$$

A ($1,N_V,k$+1) rácspontban az entrópia a III. karakterisztika egyenletből számítható ki:

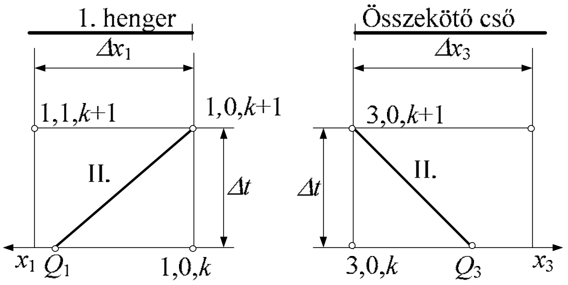
$$s_{i,j,k+1}=B_{R_i}. \quad (24)$$

Végül (10)-(12)-ből meghatározhatjuk a hőmérséklet, a hangsebesség és a sűrűség értékét.

A 2. munkahenger dugattyújánál lévő peremfeltétel számítása az előzőkben leírtakkal azonos módon történik, csak az első (i) indexet kell 1-ről 2-re módosítani.

4.2. A hengerek illeszkedése az összekötő csőhöz

A peremfeltétel vázlata az 6. ábrán látható.



6. ábra. Az 1. henger és az összekötő cső kapcsolata

A csatlakozási helyen hat ismeretlen értékét kell kiszámítani: $p_{1,0,k+1}$, $\rho_{1,0,k+1}$, $v_{1,0,k+1}$, $p_{3,0,k+1}$, $\rho_{3,0,k+1}$, $v_{3,0,k+1}$, amelyek meghatározására hat egyenlet szükséges. Ezek a következők:

$$v_{1,0,k+1} - \frac{1}{\rho_{Q_1} a_{Q_1}} p_{1,0,k+1} = B_{Q_1} , \qquad (25)$$

$$v_{3,0,k+1} - \frac{1}{\rho_{Q_3} a_{Q_3}} p_{3,0,k+1} = B_{Q_3} , \qquad (26)$$

$$\frac{p_{3,0,k+1}}{a_R^2} - \rho_{3,0,k+1} = B_{R_3} , \qquad (27)$$

$$v_{1,0,k+1} A_1 \rho_{1,0,k+1} = -v_{3,0,k+1} A_3 \rho_{3,0,k+1} , \qquad (28)$$

$$p_{1,0,k+1} = p_{3,0,k+1} , \qquad (29)$$

$$\rho_{1,0,k+1} = \rho_{3,0,k+1} . \qquad (30)$$

A hat egyenletből a hat ismeretlen kiszámítható:

$$v_{1,0,k+1} = \frac{B_{Q_1} a_{Q_1} \rho_{Q_1} - B_{Q_3} a_{Q_3} \rho_{Q_3}}{\rho_{Q_1} a_{Q_1} + \frac{A_1}{A_3} \rho_{Q_3} a_{Q_3}} , \qquad (31)$$

$$v_{3,0,k+1} = \frac{v_{1,0,k+1} A_1 \rho_{1,0,k+1}}{A_3 \rho_{3,0,k+1}} , \qquad (32)$$

$$p_{1,0,k+1} = \left(v_{1,0,k+1} - B_{Q_1}\right) a_{Q_1} \rho_{Q_1} , \qquad (33)$$

$$p_{3,0,k+1} = \left(v_{3,0,k+1} - B_{Q_3}\right) a_{Q_3} \rho_{Q_3} , \qquad (34)$$

$$p_{1,0,k+1} = p_{3,0,k+1} , \qquad (35)$$

$$s_{3,0,k+1} = B_{R_3} . \qquad (36)$$

Hasonlóan eljárva a 2. henger és az összekötő cső között a peremfeltétel a következő egyenletekkel írható le:

$$v_{3,N_3,k+1} = \frac{B_{P_3} a_{P_3} \rho_{P_3} + B_{Q_2} a_{Q_2} \rho_{Q_2}}{\rho_{P3} a_{P_3} + \frac{A_3}{A_2} \rho_{Q_2} a_{Q_2}} , \qquad (37)$$

$$v_{2,0,k+1} = \frac{v_{3,N_3,k+1} A_3 \rho_{3,N_3,k+1}}{A_2 \rho_{2,0,k+1}} , \qquad (38)$$

$$p_{3,N_3,k+1} = p_{2,0,k+1} = \left(B_{P_3} - \frac{B_{P_3} \cdot a_{P_3} + B_{Q_2} \cdot a_{Q_2}}{\rho_{P_3} a_{P_3} + \frac{\rho_{Q_2} A_2 a_{Q_2}}{A_3}} \right) a_{P_3} \rho_{P_3} , \qquad (39)$$

$$s_{2,0,k+1} = s_{3,N_3,k+1} = B_{R_3} . \qquad (40)$$

5. ÖSSZEFOGLALÁS

A cikkben a Stirling gépekben lejátszódó instacionárius hőátviteli és áramlási folyamatok egydimenziós instacionárius számítási modelljét mutattuk be. Felírtuk a folyamatokat leíró differenciálegyenleteket, a kezdeti és peremfeltételeket, amelyeket a munkagáznál a karakterisztikák módszerével, a regenerátortestnél az explicit rácsmódszerrel numerikusan oldottunk meg.

6. KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

"A tanulmány a TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001 jelű projekt részeként – az Új Magyarország Fejlesztési Terv keretében – az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg".

7. IRODALOM

[1] HANDKI A., TOLVAJ B.: Numerical simulation of thermodynamic processes in the workspace of a stirling heat pump, *Proc. CMFF 2012*., pp.384-391. 2012.

[2] HANDKI, A., TOLVAJ, B.: Investigation of the processes in a Stirling machine with the method of characteristics, *Proc. Micro Cad* 2012.

[3] SEIFERT, H.: Instationäre Strömungsvorgänge in Rohrleitungen an Verbrennungskraftmaschinen, Springer-Verlag. 1962.