

A BÁNKI-TURBINA JÁRÓKEREKÉRE VALÓ RÁ- ÁRAMLÁS VIZSGÁLATA POTENCIÁLELMÉLETI ÚTON

INTAKE FLOW PATTERN ANALYSIS OF A BANKI TURBINE BASED ON POTENTIAL THEORY

Hajdú Sándor¹, dr. Czibere Tibor², dr. Kalmár László³

ABSTRACT

As a result of several years of studies, a small capacity turbine supplied with double-flow impeller was introduced in 1917, by Donat Banki. He worked as engineer at the Royal Hungarian State Railways Machine Factory, and then at Ganz & Co. Iron and Machine Works, and finally as professor of Joseph Royal Technical University. This type of machine is still being developed and manufactured worldwide. The paper provides some basic information on the Banki-turbine, as well as on the first results of a potential theory based flow pattern analysis which aims to investigate the streamlines in the intake section of a Banki turbine.

1. BEVEZETÉS

A megújuló energiák hasznosításának reneszánszát éljük. A Bánki-turbina ma is korszerű törpe vízturbina-típus, amelynek jelentősége a megújuló energiaforrások hasznosítása terén az egyre növekvő jelentőségű szélturbináknál semmivel sem kisebb. A Bánki turbinával a hazai irodalom egyelőre csak szórványosan foglalkozik, a közelmúltban mindössze két közlemény jelent meg a tárgykorban [1], [2].

A turbina gyakorlati alkalmazhatóságát javítani lehet a járókerékre történő rá-áramlás és a járókerék geometriájának az optimalizálásával, amely a most indított munkánk távolabbi célja. Az optimalizálás során 2 dimenziós síkáramlás feltételezésével viszonylag egyszerűen kezelhető numerikus módszerek alkalmazhatóak mind a turbina járókerékén kívüli áramlási térben kialakuló áramvonalaknak, mind a járókeréken átömlő folyadékban kialakuló abszolút áramvonalaknak a meghatározására. A

¹doktorandusz, Miskolci Egyetem, Áramlás és Hőtechnikai Gépek Tanszéke

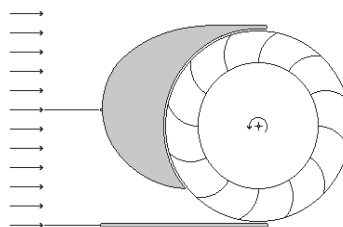
²Akadémikus, Professzor Emeritus, Miskolci Egyetem, Áramlás és Hőtechnikai Gépek Tanszéke

³egyetemi docens, Miskolci Egyetem, Áramlás és Hőtechnikai Gépek Tanszéke

munka első lépéseként a járókerékre történő rááramlás numerikus vizsgálatára kidolgozott módszert mutatjuk be.

2. AZ ÁRAMLÁSVONALAK EGYENLETE A RÁ- ÁRAMLÁSBAN

Az 1. ábrán egy síkbeli párhuzamos áramlásba helyezett speciálisan kialakított "áramvonalas test" mögött kialakuló árnyékban egy Bánki-turbina járókeréke forog. A járókerék úgy van elhelyezve, hogy annak egy részét a szóban forgó párhuzamos áramlás közvetlenül éri, míg a járókerék nagyobbik része az áramvonalas testről leváló örvényterben van, és a leváló örvény forgásirányával megegyező irányban forog. Az áramlást a járókerékre az említett áramvonalas test és egy az áramlással párhuzamosan elhelyezett sík lap tereli; az így kialakuló konfúzorban a járókerékre érkező áramlás sebessége több mint kétszeresére nő.



1. ábra. Síkbeli párhuzamos áramlásba helyezett dipólus árnyékában forgó Bánki-turbina

Az 1. ábrán vázolt kétdimenziós áramlás komplex függvénytanai módszerrel könnyen kezelhető [3]. Legyen az x, y síkon az x -tengellyel párhuzamos v_∞ sebességű áramlásban az y -tengely $(0, b)$ és $(0, -b)$ két pontjában elhelyezve egy-egy azonos erősségű dipólus, és határozzuk meg a kialakuló áramlás áramképét (az áramvonalak seregét). Ez a feladat a következő lépésekben oldható meg. A szóban forgó kétdimenziós áramlásnak a komplex potenciálja a $z = x + iy$ komplex számsíkon a következő:

$$W(z) = v_\infty z + 2M \frac{z}{z^2 + b^2} = v_\infty \left(z + \frac{2a^2 z}{z^2 + b^2} \right) \quad (1)$$

ahol M a dipólus erősségét kifejező *dipólmomentum* értéke, amely a végtelenbeli zavartalan párhuzamos áramlás v_∞ sebességével az $M = v_\infty \cdot a^2$ összefüggésben van ($a^2 < b^2$). A komplex potenciál előbbi formulájába behelyettesítve a $z = x + iy$ komplex koordinátát némi átalakítás után adódik a komplex potenciálnak az x, y valós független változókkal felírt alakja:

$$W(x, y) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y) = v_\infty \left(x + iy + 2a^2 \frac{x(x^2 + y^2 + b^2) + iy(b^2 - x^2 - y^2)}{(x^2 - y^2 + b^2)^2 + 4x^2 y^2} \right)$$

Ebből a szóban forgó áramlás *áramfüggvénye*:

$$\Psi(x, y) = v_\infty y \left(1 + 2a^2 \frac{b^2 - x^2 - y^2}{(x^2 - y^2 + b^2)^2 + 4x^2 y^2} \right)$$

és az áramvonalak egyenlete:

$$v_\infty y \left(1 + 2a^2 \frac{b^2 - x^2 - y^2}{(x^2 - y^2 + b^2)^2 + 4x^2 y^2} \right) = \Psi_k \quad (2)$$

A koordinátásk $y > 0$ felén minden $0 < \Psi_k$ diszkrét értékéhez egy áramvonal tartozik.

3. A TORLÓPONTHOZ TARTOZÓ Ψ_T ÉRTÉKE

Először a torlóponthoz (ahol a sebesség eltűnik) tartozó Ψ_T értéket határozzuk meg. Az (1) komplex potenciál szerinti differenciálásával kapjuk a *konjugált komplex* sebességet:

$$\bar{v}(z) = v_x - iv_y = v_\infty \left(1 - 2a^2 \frac{z^2 - b^2}{(z^2 + b^2)^2} \right)$$

ebből adódik a torlópont z_T komplex koordinátáját meghatározó egyenlet:

$$2a^2 \frac{z_T^2 - b^2}{(z_T^2 + b^2)^2} = 1,$$

amit átalakítva

$$z_T^4 + 2(b^2 - a^2)z_T^2 + b^4 + 2a^2 b^2 = 0$$

adódik, és ebből a másodfokú egyenlet megoldó képletével kapjuk a következőt:

$$\begin{aligned} z_T^2 &= a^2 - b^2 \pm \sqrt{(b^2 - a^2)^2 - b^2(b^2 + 2a^2)} = \\ &= a^2 - b^2 \pm \sqrt{a^4 - 4a^2 b^2}. \end{aligned}$$

Mivel a korábbi feltevésünk szerint $a^2 < b^2$, azért most

$$a^4 - 4a^2 b^2 = a^2(a^2 - 4b^2) < 0, \text{ tehát}$$

$$z_T^2 = a^2 - b^2 \pm i \cdot \sqrt{4 \cdot a^2 \cdot b^2 - a^4}$$

és ez exponenciális, illetve trigonometrikus alakban felírva:

$$z_T^2 = |z_T^2| \cdot e^{\pm i\alpha} = \sqrt{b^4 + 2 \cdot a^2 \cdot b^2} (\cos(\alpha) \pm i \cdot \sin(\alpha)),$$

ahol:

$$\cos(\alpha) = \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{b^4 + 2 \cdot a^2 \cdot b^2}}; \quad \sin(\alpha) = \frac{\sqrt{4 \cdot a^2 \cdot b^2 - a^4}}{\sqrt{b^4 + 2 \cdot a^2 \cdot b^2}}.$$

Ezek után elvégezhető már a négyzetgyök-vonás is:

$$z_T = b \cdot \left(1 + 2 \cdot \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \pm i \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right)$$

ahol:

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha)}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1}{\sqrt{2\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1}} \right)}$$

és

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1}{\sqrt{2\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1}} \right)}$$

Végül a behelyettesítések után nyerjük a következőt:

$$\begin{aligned} z_T &= b \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{2\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1} + \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1 \right)} \pm \\ &\pm ib \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{2\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1} - \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1 \right)} \end{aligned}$$

Ezek után kiszámítható a torlóponthoz tartozó Ψ_T érték:

$$\Psi_T = v_\infty y_T \left(1 + 2a^2 \frac{b^2 - x_T^2 - y_T^2}{(x_T^2 - y_T^2 + b^2)^2 + 4x_T^2 y_T^2} \right)$$

4. AZ ÁRAMVONALAK NUMERIKUS MEGHATÁROZÁSA

Az 1. ábrán vázolt áramlás járókerékre érkező részének a numerikus meghatározására FORTRAN forrássnyelven írt számítógépi programot készítettünk. A program az alábbi számítás automatizálja. Bevezetve a $\xi = x/b$, $\eta = y/b$ dimenziótlan helykoordinátákat és a $C_k = \Psi_k / bv_\infty$ jelölést az áramvonalak egyenlete az (2) egyenlet dimenziótlanítása után így alakul:

$$C_k = \eta \left[1 + 2 \left(\frac{a}{b} \right)^2 \frac{1 - \xi^2 - \eta^2}{(\xi^2 - \eta^2 + 1)^2 + 4\xi^2 \eta^2} \right] \quad (3)$$

Az x, y koordinátásk $0 \leq y \leq b$ részén kialakuló áramvonalakhoz $0 \leq C_k \leq \Psi_T / b v_\infty$ állandók tartoznak. Az áramvonalak numerikus meghatározása a (3) egyenletből származtatott

$$F(\eta) = \eta \left[(\xi_n^2 - \eta^2 + 1)^2 + 4\xi_n^2 \eta^2 + 2\left(\frac{a}{b}\right)^2 (1 - \xi_n^2 - \eta^2) \right] - C_k \left[(\xi_n^2 - \eta^2 + 1)^2 + 4\xi_n^2 \eta^2 \right] = 0$$

egyenletnek a $-c/b \leq \xi_n \leq c/b$ tartományban (ahol $c > a$) előre rögzített ξ_n értékek mellett a Newton-Raphson módszerrel való numerikus megoldása útján történik. Az így kapott $\eta_k(\xi_n)$ függvény grafikonja lesz a dimenziótlan ξ, η síkon a k -adik áramvonal.

Az előbbi egyenlet η szerinti deriválásával adódik:

$$F'(\eta) = (\xi_n^2 - \eta^2 + 1)^2 + 4\xi_n^2 \eta^2 + 2\left(\frac{a}{b}\right)^2 (1 - \xi_n^2 - \eta^2) - 4\left(\frac{a}{b}\right)^2 \eta^2 + (\eta - C_k) [8\xi_n^2 \eta - 4\eta (\xi_n^2 - \eta^2 + 1)]$$

és ezek után a Newton-Raphson iterációs módszer rekurziós formulája:

$$\eta_{i+1} = \eta_i - \frac{F(\eta_i)}{F'(\eta_i)}$$

Az iteráció számítási tapasztalataink alapján

$$\eta_0 = \frac{3}{4} C_k$$

kezdőértékkel indítható.

Kiinduló adatokként meg kell adni az

- $a/b < 1$ viszonyszámot,
- a járókerék forgástengelyének a helyét: $(\xi_{teng}; 1) \xi_{teng} = c/b$,
- a járókerék belső/külső sugarának $d/b < 1$ viszonyszámát.

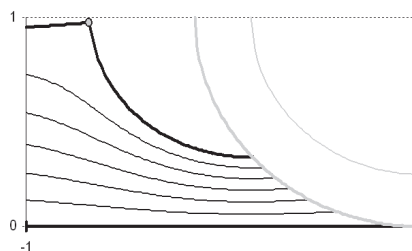
A viszonyszámokkal a járókerék és a rááramlást meghatározó csatorna méretarányait rögzítjük.

A számítás eredményeként az áramvonalakat a dimenziótlan $\xi = x/b$, $\eta = y/b$ koordinátarendszerben pontonként megadva, táblázatos alakban kapjuk meg. A Bánki-turbina egy választott méretarányokkal adódó elrendezéséhez kiszámított áramvonalakat a 2. ábrán mutatjuk be.

A számítási tartomány a bevezetőben említett, a párhuzamos áramlásba helyezett dipóluspárral meghatározott áramvonalas testen kialakuló torlóponthoz tartozó áramvonal és az áramlással párhuzamosan elhelyezett síkklap között kialakuló tartomány. Ezeket az áramvonalakat az ábrán vastagított vonalakkal emeltük ki.

Az ábrán a járókerék lapátózott terének a kontúrjait szürke negyed-körívek szemléltetik. A belépő oldalon a torlóponthoz szürke köröcske jelöli, a torlóponthoz tartozó koordinátáit megadjuk.

Kiinduló adatok:
 $a/b = 0.7500$ $c/b = 0.7500$ $d/b = 0.75000$
 Áramvonalak:
 $C_0 = 0.75066$ $C_1 = 0.12511$ $C_2 = 0.25022$
 $C_3 = 0.37533$ $C_4 = 0.50044$ $C_5 = 0.62555$
 Torlóponthoz:
 $\xi_0 = -0.7142$ $\eta_0 = 0.9735$

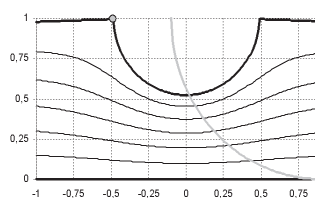


2. ábra. Síkbeli párhuzamos áramlásba helyezett dipólus-pár árnyékában forgó Bánki-turbinára történő rááramlás áramvonalai

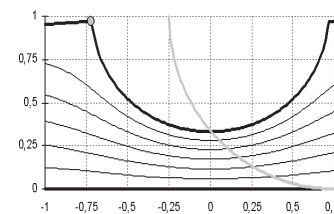
5. TOVÁBBI KUTATÁSI FELADATOK

A 3. ábrán a rááramlás néhány jellegzetes $a/b < 1$ viszonyszám mellett meghatározott áramvonalait az összehasonlíthatóság javítására egymás mellé helyezett diagramokon mutatjuk be. A rááramlás áramképe együtt változik a geometriai méretarányok megváltozásával. Ahogyan azt a 3. ábra is szemlélteti, az ismertetett számítási modell esetében két paraméter határozza meg a járókerék kertületén belépő áramlást. Az egyik az $a/b < 1$ viszonyszám, a másik az egység sugarú járókerék tengelyének a pozícióját jellemző $c/b < 1$ viszonyszám.

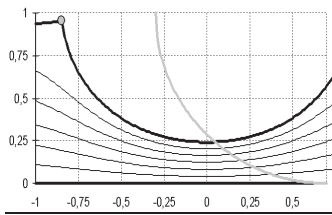
Kiinduló adat:
 $a/b = 0.5000$ $c/b = 0.90000$
 Áramvonalak:
 $C_0 = 0.88201$ $C_1 = 0.14700$ $C_2 = 0.29400$
 $C_3 = 0.44100$ $C_4 = 0.58800$ $C_5 = 0.73500$
 Torlóponthoz:
 $\xi_0 = -0.4872$ $\eta_0 = 0.9937$



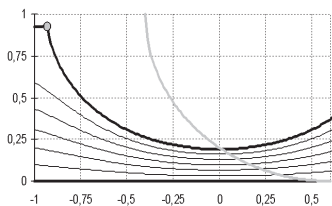
Kiinduló adat:
 $a/b = 0.75000$ $c/b = 0.75000$
 Áramvonalak:
 $C_0 = 0.75066$ $C_1 = 0.12511$ $C_2 = 0.25022$
 $C_3 = 0.37533$ $C_4 = 0.50044$ $C_5 = 0.62555$
 Torlóponthoz:
 $\xi_0 = -0.7142$ $\eta_0 = 0.9735$



Kiinduló adat:
 $a/b = 0.90000$ $c/b = 0.70000$
 Áramvonalak:
 $C_0 = 0.65681$ $C_1 = 0.10947$ $C_2 = 0.21894$
 $C_3 = 0.32840$ $C_4 = 0.43787$ $C_5 = 0.54734$
 Torlópont:
 $\xi_0 = -0.8452$ $\eta_0 = 0.9510$

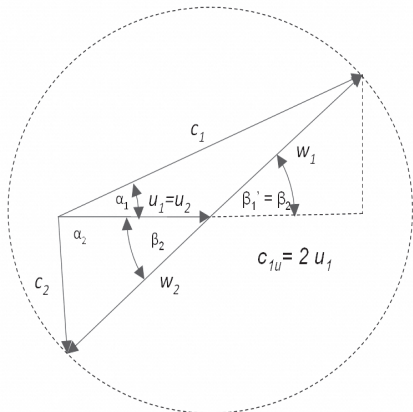


Kiinduló adat:
 $a/b = 1.000000$ $c/b = 0.60000$
 Áramvonalak:
 $C_0 = 0.58998$ $C_1 = 0.09833$ $C_2 = 0.19666$
 $C_3 = 0.29499$ $C_4 = 0.39332$ $C_5 = 0.49165$
 Torlópont:
 $\xi_0 = -0.9306$ $\eta_0 = 0.9306$



3. ábra. Síkbeli párhuzamos áramlásba helyezett dipólus-pár esetén kialakuló áramvonalak különböző geometriai arányok mellett

A Bánki-turbina esetében a be- és a kiömlés ugyanazon a lapátélen megy végbe. Ezért a be- és kilépő sebességi háromszögekben (a veszteség figyelmen kívül hagyásával és sűrű lapátózás esetén) a kerületi sebesség, valamint a be- és a kilépő relatív sebesség egyenlő, továbbá a lapátszögek azonosak ($\beta_2 = \beta_1'$), de az átömlesztés ellentétes iránya miatt az egyik esetben a lapátszög a sebességi háromszög külső szöge: $\beta_1' = 180^\circ - \beta_1$



4. ábra. A Bánki-turbina sebességi háromszögei optimális működés esetén

A legjobb hatásfokú működés esetén (4. ábra) a belépő abszolút sebesség kerületi sebesség irányú összevője (c_{1u}) éppen a kerületi sebesség kétszerese ($c_{1u} = 2 u_1$) és a kilépő abszolút sebesség iránya megegyezik a járókerék sugarának az irányával ($\alpha_2 = 90^\circ$). A számítási paraméterek optimális megválasztása esetén az érintett lapátkerületen a fenti geometriai feltételek legjobb közelítése adódik. Az optimalizálás megvalósításához kapcsolódó feladatok jelölik ki a munkánk további irányát.

6. KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

"A tanulmány/kutató munka a TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001 jelű projekt részeként – az Új Magyarország Fejlesztési Terv keretében – az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg."

7. IRODALOMJEGYZÉK

- [1] CZIBERE, T.: Az el nem évülő Bánki-turbina létrehozója 150 éve született, GÉP 60. évf. 3. sz. / 2009.
- [2] LAKATOS, K.: Hydraulische Analyse einer Bánki-Turbine, Acta Mechanica Slovaca 3/2000, pp. 499-505, ISBN 1335-239.
- [3] CZIBERE, T.: A Bánki-turbina járókerékére való rááramlás vizsgálata potenciáleméleti úton, Kutatási jelentés p. 11, 2012.

A szerzők köszönetet mondanak a lektorálásban közreműködő alábbi személyeknek:

Bordás Róbert;
 Fáy Árpád;
 Gyulai László;
 Hajdú Sándor;
 Janiga Gábor;
 Juhász András;
 Schiffter Ferenc;
 Siménfalvi Zoltán;
 Takács Ágnes.