KOMPAKT KETTŐSRENDSZEREK DINAMIKÁJÁNAK SPIN-PÁLYA KORREKCIÓI

SPIN-ORBIT CONTRIBUTIONS TO THE ANGULAR DYNAMICS OF COMPACT BINARY SYSTEMS

Majár János *

ABSTRACT

The research for the first gravitational wave signal detection is one of the most active field in astrophysics [1,2,3,4]. Some of the most promising sources for detectable waveforms are inspiralling compact binary systems. Among the numerous numerical evaluations there are many challenges in analytical research, including the insertion of eccentric effects, and the rotation of the compact objects. In the present article the next step is detailed on this path, namely, the angular equations of the motion of the binary system are integrated for eccentric and circular orbits. Based on these expressions some details and investigations are foreshown.

1. BEVEZETÉS

A gravitációs hullámok első közvetlen detektálásának talán legígéretesebb forrásai az úgynevezett kompakt kettősrendszerek. Az ezen kettősrendszerek által kisugárzott gravitációs hullámok kutatása során elengedhetetlen a kettősrendszert alkotó kompakt objektumok (melyek lehetnek fekete lyukak és/vagy neutron csillagok) mozgásának törvényszerűségeit részletesen leírni [5]. A kettősrendszer életének "bespirálozási" szakaszában erre a célra a poszt-newtoni közelítés a legalkalmasabb módszer. A detektálható gravitációs hullám jelalakok feltárásához ezen közelítés eredményeit kell összehangolni a hullámterjedést leíró post-minkowski multipól sorfejtéssel, melyben a kettősrendszert alkotó objektumok leírása forrástagok összegeként jelenik meg [6].

A detektált jeleket kiértékelő módszerek számára döntő fontosságú, hogy az elmélet által megjósolható gravitációs hullám jelalakok minél pontosabban közelítsék a valóságos források által kisugárzott hullámformát. Ezért szükséges a kettősrendszer leírásába minden fizikailag releváns effektus figyelembe vétele. Mi ezen effektusok közül a legalacsonyabb rendben fellépő kölcsönhatással foglalkozunk, amelynek oka a kettősrendszert alkotó objektumok forgása, illetve annak hatásai a testek mozgására. Ezen túl igyekszünk a számításokat a lehető legáltalánosabb pályaalak esetében származtatni, így figyelembe vesszük a pálya excentricitásának hatásait is.

Azonban ekkor a kettősrendszer dinamikájának leírása nagyságrendekkel komplikáltabbá válik. Az említett forgási effektusok legalacsonyabb rendű járuléka az ún. spin-pálya kölcsönhatás, amely (többek között) a pályasík precesszálását okozza. Amíg a spinmentes esetben a kompakt objektumok mozgása egyetlen szögváltozóval leírható, a pályasík precesszálása miatt egy, vagy több további szögmennyiséget be kell vezetni a megfelelő, teljes leírás érdekében. Az egyenletek származtatását és megoldását tovább bonyolítja, hogy a spin-pálya kölcsönhatás részeként maguk a spin vektorok is precesszálnak [7].

Az ezen szögmennyiségeket leíró mozgásegyenletek (továbbiakban: szögegyenletek) kiintegrálásának fő nehézsége, hogy azok bonyolultan csatolt differenciálegyenlet-rendszert képeznek, ráadásul excentrikus pályák esetén ezek egyike sem integrálható analitikusan. A szakirodalomban fellelhető közleményekben ezért az egyeneletek adott, speciális határesetekben történő kiintegrálásai szerepelnek [8], vagy a spin effektusokat a pályafrekvencia "kis" perturbációiként kezelő közelítő megoldások.

Ezen cikkben megadjuk egy kettősrendszert alkotó két kompakt asztrofizikai objektum (tömegeik m_1 és m_2, a forgásukat leíró spin vektorok $\mathbf{S}_1$ és $\mathbf{S}_2$) szögegyenleteinek megoldását. A poszt-newtoni sorfejtés rigorózus alkalmazása mellett, ha a szögmozgást nem a szokásos polár-koordinátákkal, hanem Euler-szögekkel írjuk le, a differenciálegyenletek szétcsatolhatóak (a módszer részletei megtalálhatóak a [9] publikációban). Az integrálás során a pálya excentricitásának figyelembe vételéhez pedig felhasználásra kerül a pálya általánosított valódi anomália paraméterezése [10].

Bár a leírás 1 PN (PN a poszt-newtoni sorfejtés rendjeinek rövid jelölése) rendű korrekcióinak vizsgálata korábbi publikációban már szerepel [11], annak eredményeit itt ismét közöljük a kettősrendszer mozgásának lehető legteljesebb leírása érdekében.

* *egyetemi adjunktus, Miskolci Egyetem, Fizikai Tanszék*

A különböző poszt-newtoni rendhez tartozó járulékok megkülönböztetésére az alábbi jelölésrendszert vezetjük be. Minden fizikai mennyiség különböző típusú járulékait alsó indexszel jelöljük. Egy tetszőleges A mennyiséget ezzel az alábbi alakban bontunk fel:

$$A = A_N + A_{PN} + A_{SO} \tag{1}$$

ahol A_N jelöli a newtoni rendű tagokat (nulladrend), A_{PN} az első poszt-newtoni korrekció (ennek formális rendje 1 PN), illetve A_{SO} jelöli a spin-pálya korrekciókat (ezek formális rendje 1,5 PN). A számítások során minden részeredményt a fentihez hasonló formában rendezünk, a képlettömbök első sora tartalmazza a newtoni rendű tagokat és formálisan a korrekciókat, majd az azt követő sorokban az egyes korrekciók explicit alakja kerül részletezésre.

Fontos azonban megjegyezni, hogy a különböző korrekciók ilyen szétválasztása csupán technikai jellegű, mivel a formulákban megjelenő paraméterek és időtől függő mennyiségek is tartalmaznak további, magasabb rendű korrekciókat. Ennek kiküszöbölésére csak a paraméter időfüggésének (ami ugyancsak tartalmaz magasabb rendű járulékokat) meghatározása után kerülhet sor, akkor a formális, technikai módszer egyben lényegi sorfejtéssé is válik, és így a vizsgált mennyiségek, és azok időfüggése konzisztensen, rendről rendre meghatározható.

2. SZÖGVÁLTOZÓK ÉS EGYENLETEIK

A kettősrendszer mozgásának leírásakor a cél a rendszert alkotó két objektum relatív helyzetét meghatározó **r** szeparációs vektor időfüggésének kiintegrálása. A szeparációs vektor hosszára vonatkozó radiális egyenlet megoldására több, különböző módszer lelhető fel a szakirodalomban, ezeket nevezzük a pálya paraméterezéseinek. További kihívás azonban a szeparációs vektor irányának a leírása. Erre különböző numerikus módszereket szoktak alkalmazni, mivel a gömbi polár-koordinátarendszer szögváltozóira vonatkozó egyenletek csatolt differenciálegyenlet-rendszert alkotnak. Egy másik jellemző módszer az egyenletek speciális határesetben történő analitikus megoldása (egy forgó objektum, teszt-részecske határeset, stb.)

Munkánk során a polár-szögek helyett Euler-szögek bevezetése mellett döntöttünk, mivel azok egy intuitívabb fizikai értelmezéshez vezetnek, illetve a szögegyenletek analitikusan megoldhatóak a pálya-paraméterezés felhasználásával. Ezen Euler-szögeket az alábbi módon vezetjük be. A szeparációs vektor alakja az Euler-szögek függvényében

$$\mathbf{r} = r\begin{pmatrix} \cos\phi\cos\psi - \cos\iota\sin\phi\sin\psi \\ \sin\phi\cos\psi + \cos\iota\cos\phi\sin\psi \\ \sin\iota\sin\psi \end{pmatrix}, \tag{2}$$

ahol ι a **J** teljes impulzusmomentum-vektor és az $\mathbf{L}_N$ pálya-impulzusmomentum által bezárt szög, ϕ írja le $\mathbf{L}_N$ precesszióját a konstans **J** vektor körül (ezzel leírva a pálya precesszióját), illetve ψ mutatja meg az **r** szeparációs vektor irányát a pillanatnyi pályasíkon [12].

A fenti szögek bevezetésekor fontos kiemelni már a számítások korai szakaszában, hogy a ι szög legalacsonyabb rendű járuléka a 1,5 PN rendhez tartozó spin-pálya korrekció, alacsonyabb rendben az értéke nulla. A fent bevezetett jelölésekkel ez a $\iota_N = \iota_{PN} = 0$ egyenlettel írható le, vagyis $\iota = \iota_{SO}$. Ennek legközvetlenebb eredménye számunkra az, hogy $\cos\iota = 1$ az általunk vizsgált poszt-newtoni rendben.

A **v** relatív sebességvektort az Euler-szögekkel az alábbi módon fejezhetjük ki:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\left(\dot{\phi}\cos\iota + \dot{\psi}\right) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\Upsilon} \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

ahol a figyelembe vettük, hogy $\iota = \iota_{SO}$, és bevezettük az Υ szöget, mint $\Upsilon = \phi + \psi$. Ez a szög látszólagos pályaszögként interpretálható, és a rá vonatkozó dinamikai egyenletet a $\dot{\Upsilon} = v_\perp / r$ összefüggéssel származtatjuk [9].

Ezen eredmények felhasználásával a szeparációs vektor alakja az alábbi lesz

$$\mathbf{r} = r\begin{pmatrix} \cos\Upsilon_N - \sin\Upsilon_N(\Upsilon_{PN} + \Upsilon_{SO}) \\ \sin\Upsilon_N + \cos\Upsilon_N(\Upsilon_{PN} + \Upsilon_{SO}) \\ \iota_{SO}\sin\psi_N \end{pmatrix}. \tag{4}$$

A relatív sebességvektor komponenseinek kiszámítása, illetve a szögegyenletek származtatásának módszere részletesebben a [9] közleményben találhatóak meg.

3. ÁLTALÁNOS MEGOLDÁS ELLIPTIKUS PÁLYÁK ESETÉBEN

A szögekre vonatkozó mozgásegyenletek megoldásához elsőként szükségünk van az alábbi radiális egyenlet megoldására

$$\begin{aligned}
\dot{r}^2 &= \frac{2E}{\mu} + \frac{2M}{r} - \frac{L^2}{\mu^2 r^2} + \left(\dot{r}^2\right)_{PN} + \left(\dot{r}^2\right)_{SO}, \\
\left(\dot{r}^2\right)_{PN} &= 3(3\eta-1)\frac{E^2}{\mu^2} + 2(7\eta-6)\frac{EM}{\mu r} - 2(3\eta-1)\frac{EL^2}{\mu^3 r^2} \\
&\quad + (5\eta-10)\frac{M^2}{r^2} - (3\eta-8)\frac{M^2L^2}{\mu^2 r^3}, \\
\left(\dot{r}^2\right)_{SO} &= \frac{2E\mathbf{L}\cdot\sigma}{M\mu^2 r^2} - \frac{2}{\mu r^3}(2\mathbf{L}\cdot\mathbf{S} + \mathbf{L}\cdot\sigma),
\end{aligned} \tag{5}$$

ahol E a rendszer energiája, L jelöli az **L**=**J**-**S** impulzusmomentum vektor hosszát, $M = m_1 + m_2$ és $\mu = m_1 m_2/M$ a rendszer teljes és redukált tömege, illetve bevezettük az $\eta = \mu/M$ mennyiséget. Továbbá bevezettük a spinvektorok súlyozott összegeit, vagyis $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1+\mathbf{S}_2$ és $\boldsymbol{\sigma} = \zeta_1\mathbf{S}_1+\zeta_2\mathbf{S}_2$ rövid jelöléseket, ahol $\zeta_1 = m_2/m_1$ és $\zeta_2=m_1/m_2$. Végül A_0 jelöli a Runge-Lenz vektor newtoni rendű hosszát, vagyis

$$A_0 = \sqrt{M^2\mu^2 + \frac{2EL^2}{\mu}}\,. \tag{5}$$

3.1. A valódi anomália paraméterezés

Mivel excentrikus pályák esetén a radiális egyenlet analitikusan nem megoldható, egy alkalmas pályaparaméterezést szokás bevezetni. A sok, különböző eljárás közül a valódi anomália paraméterezést választottuk, mivel az vezet a legátláthatóbb formulákra a gravitációs hullám jelalakok esetén [10]. A paraméterezést definiáló három feltétel a következő

$$r(\chi=0)=r_{\min}\,,\qquad r(\chi=\pi)=r_{\max}\,,$$
$$\frac{dr}{d(\cos\chi)} = -(\gamma_0+\gamma_{PN}+\gamma_{SO})r^2\,, \tag{7}$$

ahol $r_{\min}$ és $r_{\max}$ jelölik a pálya két fordulópontját, és mindhárom γ konstans értékű (γ_0 newtoni rendű, γ_{PN} jelöli az 1 PN rendű korrekciókat, és γ_{SO} a spin-pálya járulék), amelyek az első két feltétel alapján határozhatóak meg.

A fenti definíciót követve a szeparációs vektor hosszának paraméter-függésére az alábbi kifejezéseket kapjuk

$$r(\chi) = \frac{L^2}{\mu(\mu M + A_0\cos\chi)} + r_{PN}(\chi) + r_{SO}(\chi)\,,$$

$$\begin{aligned} r_{PN}(\chi) = &-\frac{2(2-\eta)MEL^2 + (6-\eta)M^3\mu^3}{\mu(\mu M + A_0\cos\chi)^2} \\ &-\frac{2(6-\eta)M^4\mu^6 + 2(10-3\eta)EL^2M^2\mu^3 + (1-3\eta)E^2L^4}{2A_0\mu^3(\mu M + A_0\cos\chi)^2}\cos\chi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{SO}(\chi) = &\frac{2(2\mathbf{L}\cdot\mathbf{S} + \mathbf{L}\cdot\sigma)}{A_0L^2(\mu M + A_0\cos\chi)^2}\big[A_0(2M^2\mu^3 + EL^2) \\ &+ M\mu(2m^2\mu^3 + 3EL^2)\cos\chi\big] \\ &-\frac{2E\mathbf{L}\cdot\sigma\big[A_0M\mu^2 + (M^2\mu^3 + EL^2)\cos\chi\big]}{A_0M\mu^2(\mu M + A_0\cos\chi)^2}\,. \end{aligned} \tag{8}$$

A mozgást leíró dinamikai változókat r függvényében igyekszünk megadni, és így a fenti összefüggések segítségével kiszámolható, hogy ezek hogyan függnek a paramétertől. Azonban egy teljes leíráshoz szükségünk van arra az információra is, hogy a χ valódi anomália paraméter és a koordinátaidő között mi a kapcsolat. Ezt a

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\chi} &= \frac{\mu r^2}{L} + \left(\frac{dt}{d\chi}\right)_{PN} + \left(\frac{dt}{d\chi}\right)_{SO}\,, \\ \left(\frac{dt}{d\chi}\right)_{PN} &= \frac{\mu r^2}{2L^3}\big[(\eta-13)M^2\mu^2 + (3\eta-1)A_0^2 \\ &\qquad + (3\eta-8)M\mu A_0\cos\chi\big]\,, \\ \left(\frac{dt}{d\chi}\right)_{SO} &= -\frac{\mu r^2}{ML^5}\big[(2\mathbf{L}\cdot\mathbf{S} + \mathbf{L}\cdot\sigma)M\mu^2(3M\mu + A_0\cos\chi) \\ &\qquad - EL^2\mathbf{L}\cdot\sigma\big]\,. \end{aligned} \tag{9}$$

differenciálegyenlet írja le.

Bár a $\chi(t)$ függvény analitikusan nem meghatározható, annak inverze igen, így a numerikus integrálás helyére numerikus invertálás kerülhet. Ennek a folyamatnak a részletei 1 PN rendig a [11] publikációban találhatóak meg. A jelen cikk számára releváns eredmény az, hogy a fenti differenciálegyenlet megoldása egy lineáris, és egy korlátos, periodikus, sima függvény összege.

3.2. A relatív sebességvektor komponensei

A mozgás leírásának fontos lépése a relatív sebességvektor nem-triviális komponenseinek meghatározása. A [9] cikk összefüggéseit felhasználva ezek az alábbiak lesznek. Az *x* (vagy párhuzamos) komponens

$$v_{\parallel} = \frac{A_0\sin\chi}{L} + v_{\parallel PN} + v_{\parallel SO}\,,$$

$$\begin{aligned} v_{\parallel PN} = &\frac{2(\eta-1)M^4\mu^6 + 3(3\eta-1)E^2L^4}{2\mu^2A_0L^3}\sin\chi \\ &+\frac{2(4\eta-5)EL^2M^2\mu^3}{2\mu^2A_0L^3}\sin\chi - \frac{(8-3\eta)M\mu A_0^2}{2L^3}\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{\parallel SO} = &-\frac{M\mu^2[(2\mathbf{L}\cdot\mathbf{S} + \mathbf{L}\cdot\sigma)M^2\mu^3 - \mathbf{L}\cdot\sigma EL^2]\sin\chi}{A_0L^5} \\ &-\frac{\mu^2A_0^2(2\mathbf{LS} + \mathbf{L}\sigma)\cos\chi\sin\chi}{L^5}\,, \end{aligned} \tag{10}$$

illetve az *y* (vagy merőleges) komponens

$$v_{\perp} = \frac{\mu M + A_0\cos\chi}{L} + v_{\perp PN} + v_{\perp SO}\,,$$

ahol az egyes korrekciók az alábbiak lesznek

$$v_{\perp PN} = -\frac{2(9-10\eta)M^4\mu^6 + 2(7-8\eta)EL^2\mu^3M^2}{2\mu^2 A_0 L^3}\cos\chi$$
$$-\frac{3(1-3\eta)E^2L^4}{2\mu^2 A_0 L^3}\cos\chi + \frac{(2+\eta)M^3\mu^3 + (3+\eta)MEL^2}{2L^3}$$
$$+\frac{2(\eta-2)M^3\mu^3 + 4(\eta-2)MEL^2}{L^3}\cos^2\chi ,$$

$$v_{\perp SO} = -\frac{\mu[2\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}(3M^2\mu^3 + 2EL^2) + \mathbf{L}\cdot\sigma(4M^2\mu^3 + EL^2)]}{L^5}$$
$$-\frac{\mu^2 M[4(M^2\mu^3 + EL^2)(\mathbf{L}\cdot\mathbf{S} + \mathbf{L}\cdot\sigma) + EL^2\mathbf{L}\cdot\sigma]\cos\chi}{A_0 L^5}$$
$$+\frac{2\mu^2 A_0^2 \mathbf{L}\cdot\mathbf{S}\cos^2\chi}{L^5}. \qquad (11)$$

3.3. A szögegyenletek megoldása

Jelen cikk fő célkitűzése a különböző szögmennyiségek időfüggésének meghatározása. Elsőként az Υ szögre vonatkozó differenciálegyenletet oldjuk meg a valódi anomália paraméterezés felhasználásával. Az Υ szögre vonatkozó differenciálegyenletet az alábbi alakra hozzuk

$$\frac{d\Upsilon}{d\chi} = 1 - \left(\frac{d\Upsilon}{d\chi}\right)_{PN} - \left(\frac{d\Upsilon}{d\chi}\right)_{SO},$$

$$\left(\frac{d\Upsilon}{d\chi}\right)_{SO} = \frac{\mu^3 M(8\mathbf{L}\cdot\mathbf{S} + 3\mathbf{L}\cdot\sigma) + A_0\mu^2(4\mathbf{L}\cdot\mathbf{S} + \mathbf{L}\cdot\sigma)\cos\chi}{L^4},$$

$$\left(\frac{d\Upsilon}{d\chi}\right)_{PN} = \frac{6M^2\mu^2 + \eta M\mu A0\cos\chi}{2L^2}. \qquad (12)$$

Ezen egyenleteket kiintegrálva az eredmény

$$\Upsilon = \Upsilon_0 + \chi - \Upsilon_{PN} - \Upsilon_{SO},$$

$$\Upsilon_{SO} = \frac{\mu^3 M(8\mathbf{L}\cdot\mathbf{S} + 3\mathbf{L}\cdot\sigma)\chi + A_0\mu^2(4\mathbf{L}\cdot\mathbf{S} + \mathbf{L}\cdot\sigma)\sin\chi}{L^4},$$

$$\Upsilon_{PN} = \frac{6M^2\mu^2\chi + \eta M\mu A0\sin\chi}{2L^2}. \qquad (13)$$

Ezek az eredmények írják le a szeparációs vektor mozgását a pillanatnyi pályasíkon. A korábban már említett tény alapján - mely szerint a valódi anomália paraméter egy időben lineáris és egy periodikus függvény összegeként áll elő - látható, hogy csak a χ-ben lineáris tagok tartalmaznak időben (is) lineáris eredményeket. Ezen tagok a pálya-frekvencia korrekcióiként viselkednek. Minden más járulék periodikus, korlátos perturbációkat ír le. Az eredmények alapján jól látható, hogy az 1 PN rendű és spin-pálya korrekciók nem csak a pályafrekvenciák perturbációit írják le, hanem további, sajátos frekvencia-tulajdonságokkal rendelkező periodikus hatásokat is.

A fentihez hasonló módon járunk el a spin-precessziós egyenletek megoldásakor is [7]. Ekkor az egyes spin vektorok irányát gömbi polár-koordinátákkal adjuk meg, vagyis az i-vel indexelt spinvektor

$$\mathbf{S}_i = S_i \begin{pmatrix} \sin\alpha_i\cos\beta_i \\ \sin\alpha_i\sin\beta_i \\ \cos\alpha_i \end{pmatrix}, \qquad (14)$$

ahol az α_i szög az i-edik spin-vektor és a **J** teljes impulzusmomentum vektor által bezárt szög, míg β_i írja le ugyanezen spin-vektor precesszióját. Mivel az α_i szögek az általunk vizsgált PN rendben állandóak, ezért a precessziós egyenletek egyszerű precessziót írnak le. Az integrálás előkészítéseként a β_i szögeket felbontjuk $\beta_i = \beta_{iN} + \beta_{iPN}$ formában, ahol β_{iN} newtoni rendű állandók, illetve

$$\beta_{iPN} = \frac{J\mu^2(4+3\zeta_i)(M\mu\chi + A_0\sin\chi)}{2L^3} \qquad (15)$$

az 1 PN korrekciók (a számolás részletei megtalálhatóak a [7] publikációban).

Az objektumok mozgását leíró másik két szögmennyiség, vagyis ι és ϕ egyenletei önmagukban nem integrálhatóak ki, erre azonban a gravitációs hullámok leírásakor nincs is szükség, az egyenletekben csak a $\iota_{SO}\sin\phi_N$ és $\iota_{SO}\cos\phi_N$ szorzatok szerepelnek. Mint azt a [9] cikkben részleteztük, az erre vonatkozó egyenletek algebrai egyenletekké egyszerűsödnek, amelyek megoldásai

$$\iota_{SO}\sin\phi_N = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{2}\big[A_i\sin\xi_i - B_i\cos\xi_i$$
$$- C_i\cos\beta_{iN} - \beta_{iPN}\sin\beta_{iN}\big]\sin\alpha_i S_i ,$$

$$\iota_{SO}\cos\phi_N = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{2}\big[B_i\sin\xi_i + A_i\cos\xi_i$$
$$+ C_i\sin\beta_{iN} - \beta_{iPN}\cos\beta_{iN}\big]\sin\alpha_i S_i , \qquad (16)$$

ahol $\xi_i = 2\Upsilon_N - \beta_{iN} = 2\Upsilon_0 + 2\chi - \beta_{iN}$, és

$$A_i = -\frac{\eta\zeta_i v_{\parallel N} v_{\perp N}}{2}, \quad B_i = \left[\frac{(2+\zeta_i)\mu}{2r_N} - \frac{\eta\zeta_i v_{\parallel N}^2}{4} + \frac{\eta\zeta_i v_{\perp N}^2}{4}\right],$$

$$C_i = \left[-\frac{(2+\zeta_i)\mu}{2r_N} + \frac{\eta\zeta_i v_N^2}{4}\right]. \qquad (17)$$

Bár külön-külön a két szöget nem határozzuk meg, a fenti szögkombinációk fizikai tartalma a meghatározó: ezek a pályaimpulzus-momentum *x* és *y* koordinátái - vagyis ezek írják le a pályasík precesszióját **J** körül. Jól látható az eredményekből, hogy ez nem egy egyszerű precesszió, mivel a ι szög jól láthatóan nem állandó értékű a mozgás során.

Bár léteznek olyan határesetek, amelyekben a pálya nem precesszál, vagy a precesszió egyszerű (ι = konst.), ezek nagy része "túl speciális", vagyis túlságosan is lerögzíti a rendszer paramétereinek lehetséges értékét. Ez alól egy kivétel van, amikor $\alpha_i = k\pi$, mivel ebben az esetben a spin vektorok nem precesszálnak, és így a pályasík sem. Ez is elég erőteljes megkötés a kettősrendszer dinamikájára, de fizikailag releváns.

4. A KÖRPÁLYA HATÁRESET

A körpálya határeset definiálásához a relatív sebességvektort az alábbi módon bontjuk fel

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{n} + r\omega\mathbf{m}\,, \tag{18}$$

ahol a mozgás pályafrekvenciáját a korábban bevezetett szögmennyiségek segítségével a

$$\omega = \dot{\phi} + \dot{\psi} = \dot{\Upsilon} \tag{19}$$

alakban írhatjuk fel, és ennek segítségével a körpálya határesetet a

$$\dot{r} = 0, \qquad \dot{\omega} = \ddot{\Upsilon} = 0 \tag{20}$$

feltételekkel definiálhatjuk. Mivel a szeparációs vektor hossza csak 2,5 PN rendben változik (a sugárzás visszahatása miatt), azt a számolásainkban konstans paraméterként kezeljük.

A fenti definíció további következménye, hogy körpálya esetben

$$v_{\perp} = \frac{L}{\mu r} + v_{\perp PN} + v_{\perp SO}\,,$$

$$v_{\perp PN} = -\frac{L[(1-3\eta)Er + (4-2\eta)M\mu]}{\mu^2 r^2}\,,$$

$$v_{\perp SO} = \frac{2M\mu\mathbf{L}\cdot\mathbf{S} - Er\mathbf{L}\cdot\sigma}{M\mu L r^2}, \tag{21}$$

illetve ebből adódóan

$$\Upsilon = \frac{L}{\mu r^2}t + \Upsilon_{PN} + \Upsilon_{SO}\,,$$

$$\Upsilon_{PN} = -\frac{L[(1-3\eta)Er + (4-2\eta)M\mu]}{\mu^2 r^3}t\,,$$

$$\Upsilon_{SO} = \frac{2M\mu\mathbf{L}\cdot\mathbf{S} - Er\mathbf{L}\cdot\sigma}{M\mu L r^3}t. \tag{22}$$

Ezen eredmények azt mutatják, hogy körpálya határesetben - mivel a fenti Υ korrekciók mind lineárisak az időkoordinátában - a spin-pálya kölcsönhatás csak a pályafrekvenciához ad járulékot a pályasíkon való mozgás tekintetében. Azonban, mint azt az alábbiakban megmutatjuk, a pályasík precessziójában továbbra is fellépnek a különböző frekvenciával rendelkező periodikus korrekciók.

A körpálya határeset feltételeit alkalmazva a spin precesszióra

$$\beta_i = \beta_{iN} + \frac{(4+3\eta_i)J}{2r^3}t, \tag{23}$$

illetve ennek felhasználásával a a $\iota_{SO}\sin\phi_N$ és $\iota_{SO}\cos\phi_N$ szögkombinációkra

$$\iota_{SO}\sin\phi_N = \sum_{i=1}^{2}\left\{\frac{A_i\left[\cos\beta_{iN} - \cos\xi_i\right]}{L} - \frac{\sin\beta_{iN}(4+3\eta_i)Jt}{2Lr^3}\right\}\sin\alpha_i S_i\,,$$

$$\iota_{SO}\cos\phi_N = \sum_{i=1}^{2}\left\{\frac{A_i\left[\sin\xi_i + \sin\beta_{iN}\right]}{L} - \frac{\cos\beta_{iN}(4+3\eta_i)Jt}{2Lr^3}\right\}\sin\alpha_i S_i, \tag{24}$$

ahol bevezettük a $\xi_i = 2\Upsilon_0 + 2Lt/\mu r - \beta_{iN}$ rövid jelölést, illetve az A_i koefficiensek alakja az alábbira egyszerűsödik

$$A_i = (2+\zeta_i)\frac{\mu}{2r} + \frac{\zeta_i L^2}{4M\mu r^2}. \tag{25}$$

Ezen eredményekből is látszik, hogy csak nagyon speciális esetekben áll elő olyan dinamika, amelyben egyszerű precesszió lép fel, vagy egyáltalán nincs pályaprecesszió. A fenti összefüggések alapján az egyszerű precesszió feltétele az, hogy a kettőst alkotó objektumok fő paraméterei (tömegek, spinek, stb.) meg kell egyezzenek. Másrészről, a pálya precessziójával csak akkor nem kell számolni, ha mindkét objektumra igaz, hogy spinvektoraik nem precesszálnak, akárcsak az excentrikus pályák esetében.

5. ÖSSZEFOGLALÁS

Eredményeink azt mutatják, hogy a pálya precessziója a kettősrendszert alkotó objektumok forgásának természetes következménye, és ez a precesszió több, különböző frekvenciájú hatás komplex összessége. Ezen hatások mindegyike megjelenik a detektálható gravitációs hullám jelalakban is.

Látható továbbá, hogy a spin effektusok által okozott korrekciók nem tekinthetők pusztán a pályafrekvencia kis perturbációinak. Egészen más jellegű járulékokkal kell számolni a pályasík precesszióját, illetve orienttációját leíró szögmennyiségek kifejezéseiben, nem ritkán newtoni rendbe tartozó frekvenciákkal.

A gravitációs hullám jelalakok vizsgálata során ezen effektusokat mind számba kell vennünk, főleg, mivel azok igen alacsony (csupán 1,5 PN) rendben már lényegi járulékokkal egészítik ki a leírást. A gravitációs hullám detektorok adatait elemző módszerekbe ezeket így be kell építeni, mivel ezek nélkül fals, vagy csak túlságosan speciális esetben érvényes hullámalakokat találhatnak a mért adatok között.

2 PN rendben a két test forgása közötti, úgynevezett spin-spin kölcsönhatás ezt a képet tovább bonyolítja, mivel kinematikai feltételt kapunk arra, hogy körpálya határeset fizikailag releváns paraméterek esetén nem érhető el, a testek forgása korlátot szab a circularizációnak. Ez a spin-effektusok fontosságán túl azt is mutatja, hogy a testek forgásának hatásai sem hanyagolhatóak el a leírásban.

Fenti eredményeink meghatározzák a további kutatások irányát is. Amikor a mozgás szögmennyiségeit harmonikus függvénybe helyettesítjük, majd sorba fejtünk, szekuláris divergencia tagok lépnek fel. Ezek kezelésére komplex sorfejtéses módszert kell alkalmaznunk, amely különválasztja a frekvencia- és amplitúdó perturbációkat (az előbbiek helytelen kezelése vezet a szekuláris tagok fellépéséhez).

Ezen probléma megoldása után a mozgás részletes leírása alapján már származtathatóak a detektálható gravitációs hullám jelalakokra vonatkozó összefüggések, melyek a hosszú távú kutatási tevékenység fő célkitűzését jelentik.

6. KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A bemutatott kutató munka a TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001 jelű projekt részeként az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.

7. IRODALOM

[1] P. FRITSCHEL, Proc. SPIE **4856**, szerk. M. Cruise és P. Saulson (SPIE, Bellingham, WA, 2003), 282 old.; gr-qc/0308090.

[2] VIRGO, http://www.virgo.infn.it

[3] Einstein Telescope, http://www.et-gw.eu

[4] K. DANZMANN és társai: LISA - Laser Interferometer Space Antenna, Pre-Phase A Report, Max-Planck Institut für Quanten-optik, Report MPQ **233** (1998).

[5] L. BLANCHET, Living Rev. Relativity **9**, 4 (2006).

[6] L. E. KIDDER, Phys. Rev. D**52**, 821 (1995).

[7] J. MAJÁR, Phys. Rev. D**80**, 104028 (2009).

[8] C. KÖNIGSDÖRFFER, A. GOPAKUMAR Phys. Rev. D**71**, 024039 (2005).

[9] J. MAJÁR, M. VASÚTH, Phys. Rev. D**77**, 104005 (2008).

[10] Z. KERESZTES, B. MIKÓCZI, L. Á. GERGELY, Phys. Rev. D**72**, 104022 (2005).

[11] J. MAJÁR, P. FORGÁCS, M. VASÚTH, Phys. Rev. D**82**, 064041 (2010).

[12] L. GERGELY, Z. PERJÉS, M. VASÚTH, Phys. Rev. D**57**, 3423 (1998).

CONTENTS

GÉP

INFORMATIVE JOURNAL
for Technics, Enterprises, Investments, Sales, Research-Development, Market of the Scientific Society of Mechanical Engineering

Dear Reader,

In the present, 03/2012 issue of the journal „Gép", research results of the Centre of Excellence of Mechatronics and Logistics are presented in the form of publications. The project has been supported by the European Union, co-financed by the European Social Fund, as well as the contribution of the units of the University of Miskolc participating in the research. The excellence center is made up of four scientific workshops, all of them being related to mechatronics and logistics. Complex research on the fields of mechatronics and logistics and the implementation of the research results seem inevitable, since both are consequences of the trends of Hungarian economic development and the policy of the Hungarian government (dynamic expansion of the automobile industry, the creation of regional logistical centers, etc.). Intelligent systems are only marketable with adequate costs, communication and legal environment, therefore the research from the above aspects concerning mechatronics and logistics are also beneficial.

The Centre of Excellence of Mechatronics and Logistics are made up of the scientific workshops Research and Development of Elements of Mechatronic Systems, The Enhancement of Reliability of Wired and Wireless Communication Systems for Mechatronics and Logistics Applications and Innovative Solutions for Enhancement of Competitiveness of Organizations. During the last years research period numerous lecturers, researchers and students have been given the opportunity to present their research results at acknowledged Hungarian and international conferences. Among its main objectives, the center intends to keep young lecturers, researchers in the region, to build networks with industrial companies and implement joint research with them.

The Robert Bosch Department of Mechatronics, the Department of Machine Tools, the Department of Electronic and Electrical Engineering as well as the Department of Physics are involved in the research group Research and Development of the Elements of Mechatronic Systems with seven research and development topics. Their research projects are performed in the topics of modelling, developing and research of starters, super-finishing equipment, ball screws, the production of components with intricate surfaces, electro-mechanical actuators, electricity networks and problems of atomic and solid state physics. The present collection of articles represents an important part of the recent year's work of the excellence center.

Prof. Dr. Béla Illés
university professor,
leader of the Center of Excellence

Dr. Szabó Tamás
associate professor,
leader of the Research Group

Managing Editor: Vesza József. Editor's address: 3534 Miskolc, Szervezet utca 67.
Postage-address: 3501. Pf. 55. Phone/fax: (+36-46) 379-530, (+36-30) 9-450-270 • e-mail: mail@gepujsag.hu

Published by the Scientific Society of Mechanical Engineering, 1027 Budapest, Fő u. 68.
Postage-address: 1371, Bp, Pf. 433
Phone: 202-0656, Fax: 202-0252, E-mail: a.gaby@gteportal.eu, Internet: www.gte.mtesz.hu
Responsible Publishere: Dr. Igaz Jenő Managing Director

http://www.gepujsag.hu
Printed by Gazdász Nyomda Kft. 3534 Miskolc, Szervezet u. 67.
Price per month: 1260 Ft.
Distribution in foreign countries by Kultúra Könyv és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat H–1389 Budapest, Pf. 149. and Magyar Média H–1392 Budapest, Pf. 272.

INDEX: 25 343 ISSN 0016-8572

All articles are peer reviewed.