

GÓTIKUS KÖRÍVPROFILÚ GOLYÓSANYA SZERSZÁMPROFILJÁNAK KÖZELÍTÉSE ELLIPSZISSEL

APPROXIMATION OF TOOL PROFILE OF GOTHIC-ARC PROFILE BALLNUT BY ELLIPSE

Hegedűs György*, Takács György**, Patkó Gyula***

ABSTRACT

This paper presents the determination of tool profile on gothic-arc profile ballnut. The derived tool profile points are approximated by the principles of the algorithm worked in article [6]. Errors between the approximated ellipse-arcs and the profile points are determined for different ballnut sizes. All results illustrated by various Figures.

1. BEVEZETÉS

Alakos szerszámok szerszámprofiljának meghatározása régóta ismert feladat, melyre többféle módszert is kidolgoztak [1], [2], [3], [4]. Jelen cikkben golyósanya szerszámprofiljának meghatározását mutatjuk be olyan esetre, ahol az érintkezési szakaszon a teljes profilt egy ellipszissel közelítjük.

2. MATEMATIKAI HÁTTÉR

Számos gyakorlati területen a görbék illesztése adott pontokra gyakran előforduló probléma, ezek közül külön kiemelnénk az ismert pontokra illeszkedő kör és ellipszis egyenleteinek meghatározását [5], [6], [7]. A kúpszelet általános másodfokú polinommal leírható implicit egyenlete

$$F(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad (1)$$

ahol a, b, c, d, e, f az egyenlet együtthatói x és y a kúpszelet pontjainak koordinátái. Ellipszissnél érvényes, hogy

$$b^2 - 4ac < 0. \quad (2)$$

Vektor alakban felírva az (1) egyenletet

$$F(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{a}, \quad (3)$$

* egyetemi adjunktus, Miskolci Egyetem, Szerszámgépek Tanszéke

** PhD, egyetemi docens, Miskolci Egyetem, Szerszámgépek Tanszéke

*** PhD, egyetemi tanár, Miskolci Egyetem, Szerszámgépek Tanszéke

ahol

$$\mathbf{x} = [x^2 \quad xy \quad y^2 \quad x \quad y \quad 1], \quad (4)$$

$$\mathbf{a} = [a \quad b \quad c \quad d \quad e \quad f]^T.$$

Az ismert (x_i, y_i) , $i = 1 \dots n$ pontokra illeszkedő ellipszis egyenlete a pontok algebrai távolságának négyzetösszege minimalizálásával az együtthatóvektor alapján

$$\min \sum_{i=1}^n (F(\mathbf{x}_i))^2 = \min \sum_{i=1}^n (F(\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{a}))^2 \quad (5)$$

módon áll elő. A (2) egyenlőtlenség miatt az előálló egyenletrendszer megoldása általános esetben nehézkes. Az \mathbf{a} együtthatóvektor skálázásával az egyenlőtlenség átírható

$$b^2 - 4ac = 1 \quad (6)$$

egyenletté, ebben az esetben az ellipszisre érvényes approximációs feladat

$$\min \|\mathbf{X} \cdot \mathbf{a}\|^2, \quad (7)$$

$$\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{a} = 1$$

alakban fogalmazható meg. Az $\mathbf{X}^{n \times 6}$ adatmátrix és a $\mathbf{C}^{6 \times 6}$ kényszermátrix

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^2 & x_n y_n & y_n^2 & x_n & y_n & 1 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & & & \\ 0 & -1 & 0 & \mathbf{0}^{3 \times 3} & & \\ 2 & 0 & 0 & & & \\ & \mathbf{0}^{3 \times 3} & & \mathbf{0}^{3 \times 3} & & \end{bmatrix}$$

formában írható fel ((6)-ból kifejezve). A Lagrange multiplikátor alkalmazásával az \mathbf{a} optimális megoldásra a fenti feltételekkel

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{a} = \lambda \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{a}, \quad (9)$$

$$\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{a} = 1,$$

ahol az $\mathbf{S}^{6 \times 6}$ eloszlási mátrix

$$\mathbf{S} = \mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X} = \begin{bmatrix} S_{x^4} & S_{x^3y} & S_{x^2y^2} & S_{xy^3} & S_{x^2y} & S_{xy^2} \\ S_{x^3y} & S_{x^2y^2} & S_{xy^3} & S_{x^2y} & S_{xy^2} & S_{xy} \\ S_{x^2y^2} & S_{xy^3} & S_{y^4} & S_{xy^2} & S_{xy} & S_x \\ S_{x^3} & S_{x^2y} & S_{xy^2} & S_{x^2} & S_{xy} & S_x \\ S_{x^2y} & S_{xy^2} & S_{y^3} & S_{xy} & S_y & S_y \\ S_{x^2} & S_{xy} & S_{y^2} & S_x & S_y & S_1 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$$S_{x^a y^b} = \sum_{i=1}^n x_i^a y_i^b.$$

A (9) sajátértékfeladatot megoldva a legjobb közelítést a legkisebb sajátértékhez tartozó sajátvektor szolgáltatja az együtthatóvektorra nézve. A fentebb bemutatott megoldás egyik hátránya, hogy a \mathbf{C} kényszermátrix szinguláris, az \mathbf{S} eloszlási mátrix közel szinguláris (abban az esetben, ha a pontok egy valódi ellipszis pontjai, szinguláris), emiatt a numerikus eljárás instabil és nem valós megoldást eredményeznek. Ennek a hátránnak a kiküszöbölésére célszerű particionálni az egyes mátrixokat [6]. Az \mathbf{X} adatmátrixot kvadrátikus és lineáris részre bontva

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= [\mathbf{X}_1 \quad \mathbf{X}_2], \\ \mathbf{X}_1 &= \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^2 & x_n y_n & y_n^2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{X}_2 &= \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (11)$$

mátrixokat kapjuk. Hasonlóan az eloszlási mátrixra

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_2 \\ \mathbf{S}_2^T & \mathbf{S}_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \mathbf{S}_1 &= \mathbf{X}_1^T \cdot \mathbf{X}_1, \\ \mathbf{S}_2 &= \mathbf{X}_1^T \cdot \mathbf{X}_2, \\ \mathbf{S}_3 &= \mathbf{X}_2^T \cdot \mathbf{X}_2, \end{aligned} \quad (12)$$

érvényes a particionálás után. A (8) \mathbf{C} kényszermátrixnál legyen

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

a részmátrix, valamint az együtthatóvektort

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} \quad (14)$$

módon particionáljuk. Ekkor a sajátértékprobléma az

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_2 \\ \mathbf{S}_2^T & \mathbf{S}_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

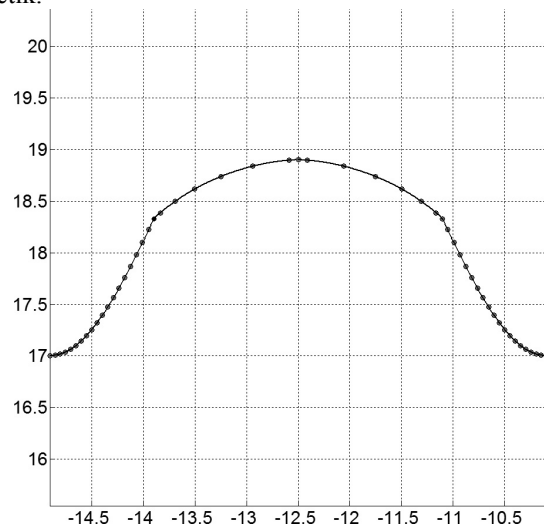
alakban állítható elő. Felhasználva a particionált mátrixokat, a sajátértékfeladat megoldását előállító egyenletrendszer

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \cdot \mathbf{a}_1 &= \lambda \cdot \mathbf{a}_1, \\ \mathbf{a}_1^T \cdot \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{a}_1 &= 1, \\ \mathbf{a}_2 &= -\mathbf{S}_3^{-1} \cdot \mathbf{S}_2^T \cdot \mathbf{a}_1 \end{aligned} \quad (16)$$

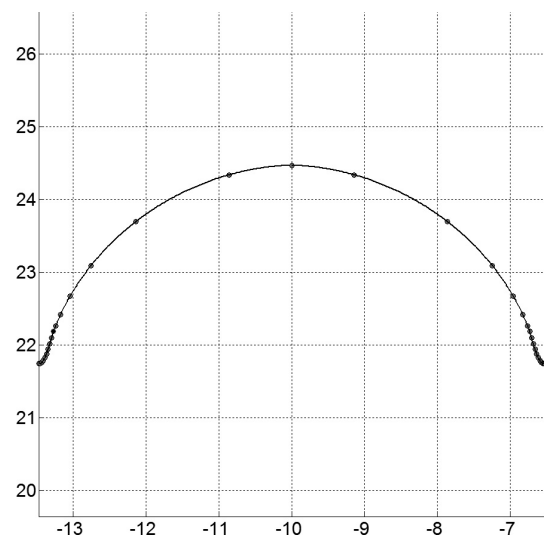
alakban írható fel, ahol $\mathbf{M}^{3 \times 3} = \mathbf{C}_1^{-1} \cdot (\mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{S}_3^{-1} \cdot \mathbf{S}_2^T)$ csökkentett eloszlási mátrix. A numerikusan stabil megoldást a (16) egyenletrendszer \mathbf{M} mátrixának \mathbf{a}_1 sajátvektorához tartozó λ sajátérték szolgáltatja. Az ellipszisívek egyenleteinek ismeretében lehetőség nyílik a metszéspontok meghatározására.

3. EREDMÉNYEK BEMUTATÁSA

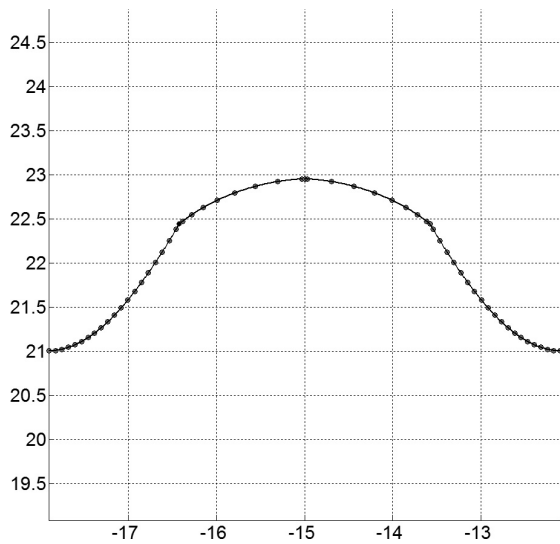
Az előző fejezetben ismertetett eljárást alkalmazva a rendelkezésre álló pontokat közelítő ellipszisíveket, és a közelítő szerszámprofilokat az 1. – 4. ábrák szemlélítik.



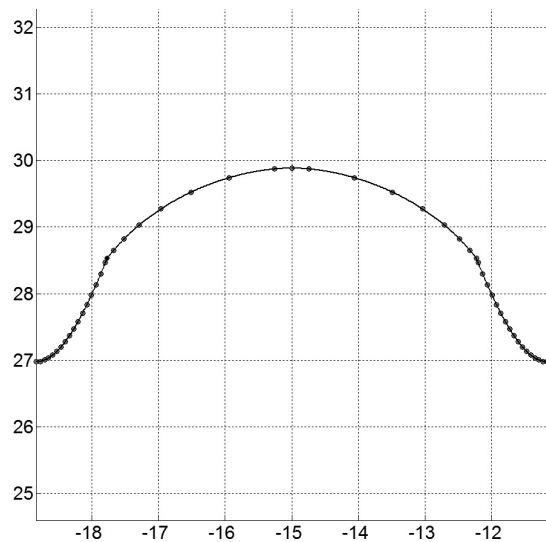
1. ábra. A közelítő ellipszisprofil 32x25 méretű golyósanyánál



2. ábra. A közelítő ellipszisprofil 40x20 méretű golyósanyánál



3. ábra. A közelítő ellipszisprofil 40x30 méretű golyósanyánál



4. ábra. A közelítő ellipszisprofil 50x30 méretű golyósanyánál

A bemutatott eredmények az alámetszési szakaszt közelítő szerszámprofil is ábrázolják, ahol a közelítő profilt szakaszosan interpoláló harmadfokú *Bezier* görbékkel állítottuk elő.

4. A KÖZELÍTŐ PROFIL HIBÁJA

A közelítő profil hibáját a származtatás során előállított metszéspontokhoz határozzuk meg. Az eltérések meghatározásához keressük a metszéspontok és a közelítő ellipszisív közötti távolságokat. Ehhez célszerű az általános helyzetű ellipszisívet és a metszéspontokat az origóba transzformálni oly módon, hogy az ellipszisív kis és nagytengelye a koordinátatengelyekkel egybeessen. Az ellipszis paramétereinek ismeretében a metszéspontokra érvényes transzformáció a

$$\mathbf{P}'_E = \mathbf{R}_z^{-1} \cdot \mathbf{P}_E - \mathbf{C}_E \quad (17)$$

összefüggés szerint végezhető el, ahol \mathbf{P}_E a szomszédos ellipszisívek metszéspontja, \mathbf{C}_E a profilt közelítő ellipszisív középpontja, \mathbf{R}_z az orientációnak megfelelő forgatási mátrix. Legyen a profil pontja $\mathbf{E}(t)=[a\cos(t) \ b\sin(t) \ 1]$, a \mathbf{P}'_E pont és az ellipszisív \mathbf{E} pontja közötti legkisebb távolság feltétele, hogy

$$(\mathbf{P}'_E - \mathbf{E}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{E}(t)}{dt} = \mathbf{0} \quad (18)$$

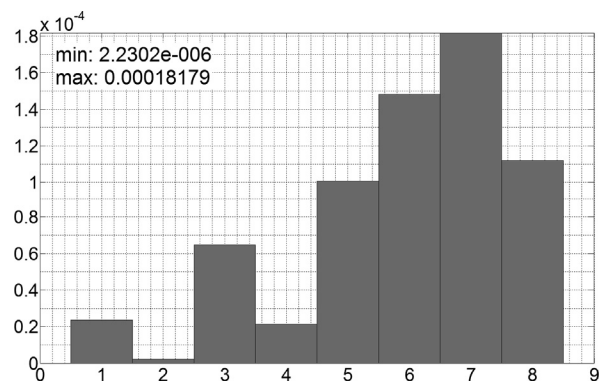
teljesül. Ekkor a nemlineáris egyenlet a *Newton-Raphson* módszerrel oldható meg az

$$\begin{aligned} (a^2 - b^2)\cos(t)\sin(t) - ax_{P'_E}\sin(t) + by_{P'_E}\cos(t) &= 0 \\ (a^2 - b^2)(\cos^2(t) - \sin^2(t)) - ax_{P'_E}\cos(t) - by_{P'_E}\sin(t) &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

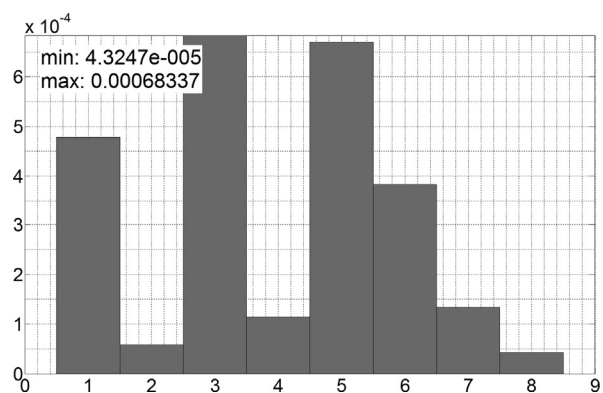
egyenletek felhasználásával. A t paraméter ismeretében a \mathbf{P}'_E pont és az ellipszisív \mathbf{E} pontja közötti távolság a

$$|d| = |\mathbf{P}'_E - \mathbf{E}| \quad (20)$$

képlet szerint számítható. A közelítő profilok eltéréseinek abszolút értékeit a megfigyelési pontokban az 5 – 8. ábrák szemléltetik.



5. ábra. A közelítő ellipszisprofil és a pontok közötti eltérés 32x25 méretű golyósanyánál



6. ábra. A közelítő ellipszisprofil és a pontok közötti eltérés 40x20 méretű golyósanyánál

5. ÖSSZEFOGLALÁS

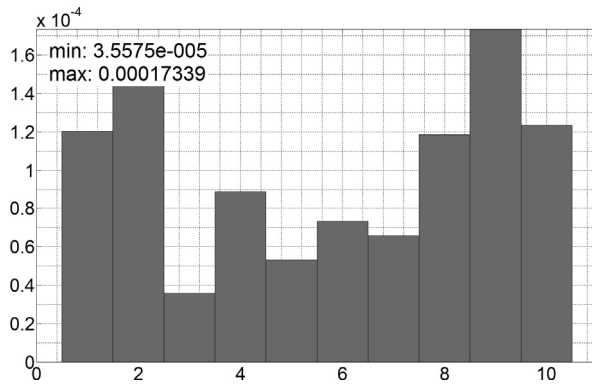
A cikkben gótikus körívprofilú golyósanyák származtatott szerszámprofiljának egy lehetséges meghatározását mutattuk be. Az eljáráshoz egy numerikusan stabil, iteráció nélküli algoritmust alkalmaztunk [6]. A szerszám és a munkadarab érintkezési tartományán a közelítő szerszámprofil ellipszisívvel írtuk le és meghatároztuk az így előállított közelítő szerszámprofil és a származtatott szerszám profilpontok közötti eltéréseket. Az eljárással a mérnöki gyakorlatban elfogadott nagyságrendű hibával határozható meg a szerszámprofil jellemző pontjai, ezek igazolását a jövőben próbaforgácsolásokkal és mérésekkel célszerű igazolni.

6. KÖSZÖNETNYÍLVÁNÍTÁS

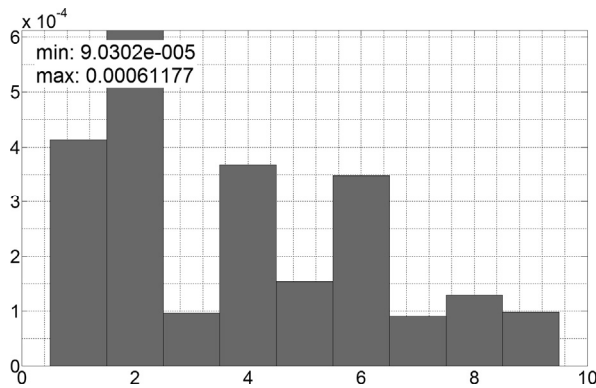
A bemutatott kutatómunka a TÁMOP-4.2.2/B-10/1-2010-0008 jelű projekt részeként – az Új Magyarország Fejlesztési Terv keretében – az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.

7. IRODALOM

- [1] HARADA H., KAGIWADA T.: Grinding of high-lead and gothic-arc profile ball-nuts with free quill-inclination, *Precision Engineering* 28 (2004), 143–151
- [2] LITVIN, F. L.: Development of Gear Technology and Theory of Gearing, *NASA Reference Publication 1406, Chicago, 1998.*
- [3] DUDÁS I.: Csavarfelületek gyártásának elmélete, *Akadémiai doktori disszertáció, Miskolc, 1991*
- [4] DUDÁS L.: Kapcsolódó felületpárok gyártásgeometriai feladatainak megoldása az elérés modell alapján, *Kandidátusi értekezés, Budapest, TMB, 1991, 144p.*
- [5] W. Gander, G. H. Golub, R. Strelbel: Least-squares fitting of circles and ellipses, *BIT Numerical Mathematics*, 1994, Volume 34, Number 4, 558–578
- [6] R. Hal, J. Flusser: Numerically stable direct least squares fitting of ellipses, *The Sixth International Conference in Central Europe on Computer Graphics and Visualization (1998)*, Volume 21, Issue 5, 125–132
- [7] M. Pílu, A. Fitzgibbon, R. Fisher: Ellipse-specific Direct least-square Fitting, *IEEE International Conference on Image Processing, Lausanne, September 1996*



7. ábra. A közelítő ellipszisprofil és a pontok közötti eltérés 40x30 méretű golyósanyánál



8. ábra. A közelítő ellipszisprofil és a pontok közötti eltérés 50x30 méretű golyósanyánál

Az 1. táblázat tartalmazza a (20) képlet alapján számított eltérések abszolút értékeit a közelítő ellipszisív és a megfigyelési pontok (szerszám származtatott profilpontjai) között.

1. táblázat. A közelítő profil eltéréseinek abszolút értékei különböző méretű golyósanyáknál

Méret	A közelítő profil eltérései	
	d_{min} [mm]	d_{max} [mm]
32x25	$2,230230 \cdot 10^{-6}$	$1,817885 \cdot 10^{-4}$
40x20	$4,324672 \cdot 10^{-5}$	$6,833688 \cdot 10^{-4}$
40x30	$3,557504 \cdot 10^{-5}$	$1,733867 \cdot 10^{-4}$
50x30	$9,030191 \cdot 10^{-5}$	$6,117721 \cdot 10^{-4}$

A fenti táblázat adataiból megállapítható, hogy a legnagyobb eltérés mértéke 10^{-4} nagyságrendű, mely a gépészmérnöki gyakorlatban elfogadott érték. Az így előállított profil megmunkálási pontosságát próbaforgácsolással és méréssel kell igazolni a jövőben.