CSAVARRUGÓ GRAFO- ANALITIKUS OPTIMÁLÁSA

GRAPHO-ANALYTICAL OPTIMIZATION OF CYLINDRICAL SPRING

Ferenc János Szabó, PhD, associate professor,
University of Miskolc, Institute of Machine and Product Design,
H- 3515 Miskolc, Egyetemváros

ABSTRACT
The grapho- analytical optimization technique is based on the Kuhn- Tucker optimality criterium and in case of few optimization variables it is very simple and easy to realize way to find optimum solutions.
In this paper an example is shown to find the optimal dimensions of a cylindrical compression spring with circular wire cross-section for minimum weight. The curves of the implicit constraints are the borders of the feasible region and the iso- lines of the mass function, which is the objective function to be minimized, will touch this region in the last feasible point. This is the optimum solution.

1. BEVEZETÉS

A grafo- analitikus optimumkereső módszer elméleti alapját a Karush- Kuhn- Tucker féle optimalitási kritérium [1] képezi. A kritérium n darab tervezési változóra érvényes, általános megfogalmazása alapján n változós optimumkeresésre is alkalmas. Jelen cikkben a módszer két változó esetére leegyszerűsített változatát alkalmazzuk, melynek megfogalmazása egyszerű, közérthető és az optimum megkeresésének módjára a félig grafikus, félig analitikus módszert, az úgynevezett grafo- analitikus módszert alkalmazzuk. Ezzel főleg az a célunk, hogy bemutassuk a módszer hatékonyságát, egyszerűségét és alkalmazhatóságát a terméktervezés és a géptervezés különféle területein. A módszer megértése és elsajátítása után bárki, egyetemi hallgatók, tervezők, érdeklődő ipari szakemberek is bátran alkalmazhatják mindennapi feladataik során, új szempontok, érdekes eredmények keresésére, az optimális eredményekkel a tervezett termék, gépelem, szerkezet valamely tulajdonságának javítására, optimalizációjára.

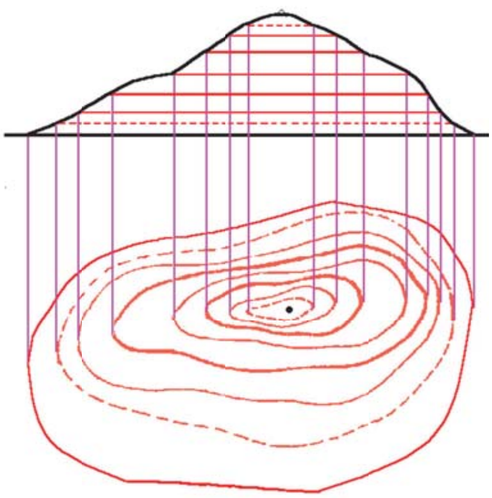
Jelen cikkben egy hengeres, körszelvényű nyomó csavarrugó példáját mutatjuk be tömegminimumra történő optimális tervezésre. A tervezési változók a rugóhuzal átmérője (d) és az átmérő hányados (a = D/d), ahol D a rugó középátmérője. A célfüggvény a rugó egy menetének tömege, aminek a lehetséges minimális értékét keressük. A két tervezési változóra explicit és implicit feltételeket írunk fel. A három legfontosabb implicit feltétel a rugóban ébredő csavarófeszültség korlátozása, a rugóállandóra adott korlátozás és a rugó lehetséges maximális méretének gyárthatósági okokból történő korlátozása volt.

A feltételek ábrázolásával felrajzolható a megfelelőségi tartomány, a célfüggvény szintvonalainak tanulmányozásával pedig eljuthatunk az optimális megoldás megtalálásához. Ebben a cikkben egy számpélda is található a rugó optimális kialakítására.

2. A GRAFO- ANALITIKUS MÓDSZER

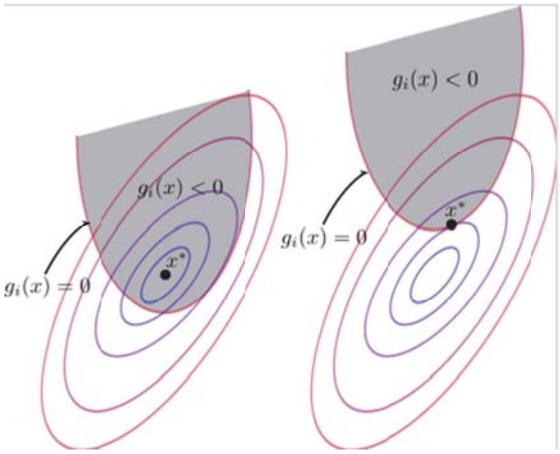
A grafo- analitikus optimumkereső módszer lényege, hogy egyszerre próbáljuk ábrázolni a feladatban szereplő függvényeket (grafika) és közben próbáljuk ezen függvények egyenleteit alakítani, egyszerűsíteni, megoldani (analitika), aminek az eredményeiből olyan következtetéseket vonhatunk le, melyek az ábrázolást segítik és előreviszik az optimális megoldás megtalálásának folyamatát. Ugyanakkor az ábrázolás is gyakran nyújt számunkra olyan eredményeket, szempontokat, amelyek segítenek az egyenletek további célszerű átalakításában. Tehát a két módszer, a grafika és az analitika egymást segítik.

A grafo- analitikus módszer megfelelő alkalmazásához szükség van a célfüggvény szintvonalainak előállítására (1. ábra). Ehhez a célfüggvényt tetszőlegesen felvett konstans értékekkel kell egyenlővé tenni és az így kialakuló görbéket ábrázoljuk szintvonalként.



1. ábra. Egy függvény szintvonalai

Ha a feltételeket is ábrázoljuk ugyanabban a koordinátarendszerben, ahol a szintvonalakat, akkor megláthatjuk a probléma szerkezetét, azaz a célfüggvény szélsőértékének alakulását a megfelelőségi tartományhoz képest (2. ábra).

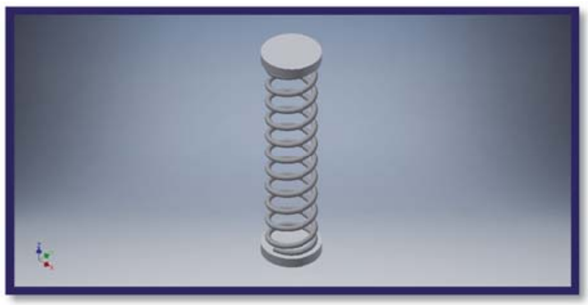


2. ábra. Korlátozás nélküli és korlátozásos optimum

Ekkor alapvetően két eset lehetséges:
Az első esetben a célfüggvény maximuma a megfelelőségi tartomány belsejében van, távol esik a tartomány határvonalaitól. Ekkor nem szükséges a feltételek teljesülését vizsgálni, elegendő a célfüggvény szélsőértékét keresni. Ezt az esetet nevezzük korlátozás nélküli vagy feltételek nélküli optimumkeresésnek.
A másik esetben a szélsőérték kívül esik a tartományon, sőt a „legjobb" pont, ahol a szélsőérték a legjobbnak látszik, a nem megfelelő tartományra esik. Ilyenkor, ha a feltételeket is ki akarjuk elégíteni, akkor a célfüggvénynek nem az igazi, elméletileg elérhető legszélsőségesebb értékét kell keresnünk, hanem azt az utolsó megfelelő pontot kell megtalálnunk, ahol a lehető legjobb szintvonal még éppen nem hagyja el a megfelelőségi tartományt. Ez általában egy érintési pont, amit korlátozásos optimumnak nevezünk.
A grafo- analitikus módszer lényege, hogy ezt a keresett érintési pontot megtaláljuk, a problémában résztvevő függvények ábrázolásával (grafika) és a függvények egyenleteinek vizsgálatával (analitika).

3. KÖRSZELVÉNYŰ, HENGERES NYOMÓ CSAVARRUGÓ VIZSGÁLATA

A 3. ábra egy körszelvényű, hengeres nyomó csavarrugót mutat.

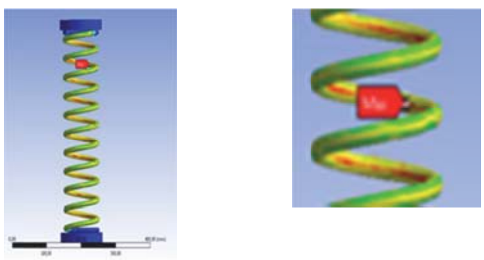


3. ábra. Körszelvényű hengeres nyomó csavarrugó

A rugó tervezésekor nagyon fontos jellemző az a nyírófeszültség [2], ami a rugónak egy jellemző helyén (4. ábra) alakul ki a terhelés során. Enek a nyírófeszültségnek a megengedhető értékére nézve egy fontos feltétel írható fel.

$$\tau_{max} = \frac{8F}{d^2\pi}\left(a + \frac{5}{4} + \frac{7}{8a} + \frac{1}{a^2}\right) \leq \tau_{adm} \quad (1)$$

Az (1) egyenletben F [N] a rugó terhelése.
A nyírófeszültség fellépésének helyét a 4. ábra mutatja.



4. ábra. A maximális nyírófeszültség fellépésének helye a rugóban

Ezt a feltételt implicit feltétel formájában kezeljük. A tervezési változók a rugó huzal átmérője (d) és az átmérőviszony (a = D/d), ahol D a rugó középátmérője. A méreteket [mm] mértékegységben tételezzük fel.
A tervezési változókra felírt explicit feltételek:

$$d <= 10 \quad ; \quad a >= 4 \qquad (2)$$

Az explicit feltételek elég tág lehetőséget biztosítanak az optimum széleskörű kereséséhez, az implicit feltételek teljesülése esetén pedig ezek a feltételek automatikusan teljesülni fognak.

Újabb implicit feltételt jelent a rugó külső méretének gyárthatósági okokból történő korlátozása: d + D <= 160 [mm]. (3)
A rugó anyagának ismeretében rendelkezésünkre áll a G [Mpa] csavarási rugalmassági modulus értéke is, amellyel felírható a rugóállandó értékét előíró feltétel:

$$C \geq \frac{Gd}{8na^3} \qquad (4)$$

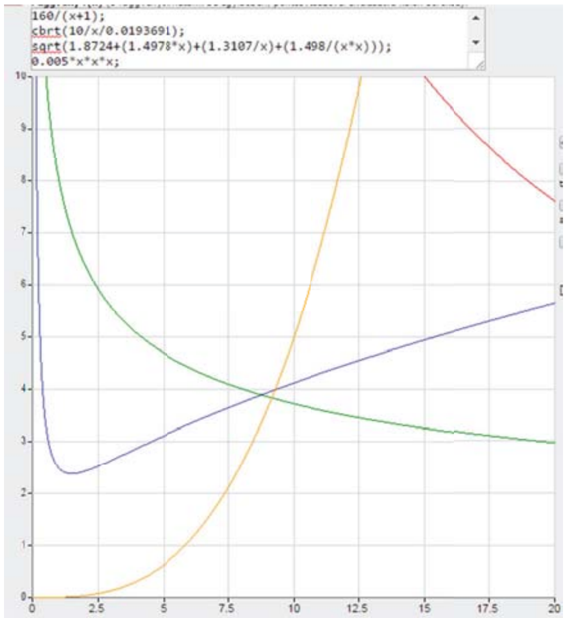
A célfüggvény egy rugómenet tömege, melynek minimális értékét keressük:

$$m = \rho \frac{\pi^2}{4} a d^3 \qquad (5)$$

Ahol ρ a rugó anyagának sűrűsége.
A kívánt terhelhetőség (F) ismeretében az (1), (3), (4) és (5) egyenletek görbéi [3] felrajzolhatók az a-d kooordináta rendszerben (5. ábra), melyben piros szín jelöli a méret korlátozási feltételt, sárga színnel jelöltük a rugóállandó feltételét, kékkel pedig a nyírófeszültségi feltételt. Zöld színnel különböztettük meg a célfüggvény szintvonalát, melyet próbálgatással kell létrehozni, a szintvonalat jellemző szükséges konstans értékének megfelelő beállításával.

A megfelelőségi tartomány a kék, sárga és piros vonalak által határolt háromszög- szerű tartomány, melyet a célfüggvény egyre kisebb tömeghez tartozó szintvonalai a bal oldali csúcsánál fognak érinteni, tehát ott lesz az optimális megoldás. Az optimális megoldás elméleti helyét kissé módosítja, hogy a tervezési változók csak egész értékeket vehetnek fel, de ez csak kis mértékű módosulást jelent.

A rugó többi jellemzője (z menetek száma, y rugóhézag tényező, f rugóút) nem vagy csak elenyésző mértékben befolyásolják a célfüggvény értékét, tehát eldönthetők vagy megválaszthatók az eddigi eredmények ismeretében, vagy esetleg azoktól függetlenül.



5. ábra. A megfelelőségi tartomány és a célfüggvény szintvonalának ábrázolása

Az optimálási folyamat eredményeként adódó rugót az ANSYS Design Space v 17.1 végeselemes programrendszerben [4] is ellenőriztük a maximális nyírófeszültség értékére, valamint a terhelés hatására adódó összenyomódás mértékére.

Az eddig bemutatott megoldás a függvények ábrázolására épült, azaz a grafikai oldalt szemléltette. Vizsgáljuk meg az analitikai oldalt is:
A megoldás grafikai oldala azt mutatja, hogy a keresett optimális megoldást kifejező pont a sárga és a kék színű görbe metszéspontja, azaz a nyírófeszültségi feltétel és a rugóállandót kifejező feltétel metszéspontja. Ennek kiszámításához egyenlővé kell tennünk a két függvényt, tehát az (1) egyenletben található nyírófeszültségi feltétel és a (4) egyenletben leírt rugóállandó feltételt kell vizsgálnunk, hogy milyen a és d érték esetén veszik fel ugyanazt a függvényértéket, azaz hol van a metszéspontjuk. Ehhez a következő két egyenlet alkotta egyenletrendszert kell megoldanunk: (6)

$$\frac{8F}{d^2\pi}\left(a + \frac{5}{4} + \frac{7}{8a} + \frac{1}{a^2}\right) = \tau_{adm}$$

$$\frac{Gd}{8na^3} = c$$

Ez a következő egyenletre vezet:

$$Aa^8 - a^3 - \frac{5}{4}a^2 - \frac{7}{8}a - 1 = 0 \qquad (7)$$

Az optimális megoldást kifejező (7) egyenlet egy nyolcadrendű egyenlet a- ra nézve. Az egyenletben $A = \frac{G^2}{F}\tau_{adm}\pi 8n^2c^2$, n a menetek száma.

Az így adódó nyolcadrendű egyenlet könnyen megoldható különféle módszerekkel, például iterációs technika, felező módszer, aranymetszés módszer, különböző numerikus módszerek egyenletek megoldására, vagy a (7) egyenlet bal oldalán látható függvény ábrázolható és megfigyelhető az ábrázolt képen, hogy hol vannak zérushelyei. A zérushelyek közül ki kell választani azt, amely a-ra elméletileg elfogadható értéket jelent. (Nem mind a 8 zérushely jelenik majd meg az ábrázolt képen, mivel lehetnek komplex zérushelyek is). A függvény zérushelyei közül az a változóra megengedhető tartományon (explicit és implicit feltételek) már csak egy-két érték helyezkedhet el, ezek közül könnyű kiválasztani azt, amely a grafikai megoldás által mutatott metszéspont környezetében található. Ezzel a megoldás analitikai oldala nagyon pontosan megadja az optimális megoldás értékét a-ra. A d változó optimális értéke pedig adódik az a értékének a (6) egyenletrendszer második tagjába való visszahelyettesítésével.

5. KÖVETKEZTETÉS

A Karush- Kuhn- Tucker féle optimalitási kritériumon alapuló grafo- analitikus optimumkereső módszer alkalmazásával módszert fejlesztettünk ki hengeres, körszelvényű nyomó csavarrugó tömegminimumra történő méretezésére.

A tervezési változók a körszelvény átmérője és a rugó átmérő- hányadosa voltak, melyekre explicit feltételeket definiáltunk. A maximálisan megengedett nyírófeszültséget, a rugó megengedhető legnagyobb méreteit és a rugóállandó által leírt feltételt implicit feltételek formájában vettük figyelembe.

A feltételek a- d koordinátarendszerben való ábrázolásával adódott a megfelelőségi tartomány, melyhez a célfüggvényby szintvonalaival közelítve adódik a keresett optimális megoldást jelentő pont.

Az optimális megoldás elérésének másik útja a grafo- analitikus megoldás analitikai oldalának követésével realizálható. Ez az út egy nyolcadrendű egyenletre vezet, melyből az a változó optimális értéke könnyen meghatározható. A d változó optimális értéke a rugóállandó feltételbe való visszahelyettesítéssel szintén egyszerüen kiszámítható. Az így adódó elméleti optimumokat kis mértékben módosítani szükséges, ha a választható diszkrét értékeket is tiszteletben kívánjuk tartani.

6. FELHASZNÁLT IRODALOM

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Karush%E2%80%93Kuhn%E2%80%93Tucker_conditions legutóbbi megtekintés: 2017. október 16.

[2] Dr. Szota György: *Gépelemek IV.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1990.

[3] http://www.mathelp.honlapja.hu/temak/fuggvenyek/grapher.html legutóbbi megtekintés: 2017. október 17.

[4] ANSYS Inc.; SAS IP Inc. (2011): *ANSYS Mechanical APDL Technology Demonstration Guide*, Southpointe, 275 Technology Drive, Canonsburg, PA 15137, USA.

7. KÖSZÖNETNYÍLVÁNÍTÁS

A cikkben és a hozzá tartozó előadásban ismertetett kutató munka az EFOP-3.6.1-16-2016-00011 jelű „Fiatalodó és Megújuló Egyetem – Innovatív Tudásváros – a Miskolci Egyetem intelligens szakosodást szolgáló intézményi fejlesztése” projekt részeként – a Széchenyi 2020 keretében – az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.

A cikkben ismertetett kutatómunka a TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001 projekt eredményeire alapozva az Új Széchenyi Terv keretében a Magyar Állam és az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.