ELTE-PPK, Iskolapszichológia Tanszék[1]
University of Cambridge, Centre for Neuroscience in Education[2]

Alapvető számolási képességek fejlődésének vizsgálata 3. és 5. osztályos gyermekeknél

JÁRMI ÉVA[1] – SOLTÉSZ FRUZSINA[2] – SZŰCS DÉNES[2]
jarmi.eva@ppk.elte.hu, fs299@cam.ac.uk, ds377@cam.ac.uk

Absztrakt
Keresztmetszeti vizsgálatunk célja a számolási képességek tipikus fejlődésének leírása olyan feladatokban, amelyek a kognitív pszichológia szakirodalma alapján érzékenyek a számfeldolgozó rendszer diszfunkcióira.

A 3. osztályos minta 17 főből, az 5. osztályos 19 legalább átlagos értelmi képességű gyermekből állt. A számítógépen bemutatott feladatokban a teljesítményt a válasz helyességén kívül a reakcióidővel is jellemeztük. Hipotézisünknek megfelelően az idősebbek gyorsabbak voltak a pontszámlálásban 4-8 elem esetében, a többjegyű számok kiolvasásában, a párosság megítélésében, azoknál a műveleteknél, ahol számtani emlékezetükre támaszkodhattak, és húszas számkörön belül az összeadás, pótlás/bontás kivitelezésében. A számmegnevezés és a szubitizáció hasonlóan könnyű, míg a kivonás és az inverzió elvének alkalmazása hasonlóan nehéz volt mindkét csoportnak. A teljesítmény-mintázatokat a problémanagyság mentén is elemeztük.

Kulcsszavak: számolási képességek, tipikus fejlődés, reakcióidő, aritmetikai tények, stratégiák

I. Elméleti bevezetés

I. 1. Mit (nem) tudunk a számolási képességek fejlődéséről?

A matematika széleskörű ismereteket foglal magába, melyek elsajátítása többnyire az iskolai oktatás során történik. A matematika világát sok gyermek idegennek érzi, tanulását pedig öncélú agytornának tartja. A kognitív pszichológia művelői és ismerői azonban már két évtizede tudják, hogy a számok felfogására és a velük való műveletvégzésre előhuzalozott az emberi agy. A *számfeldolgozó modul* (BUTTERWORTH 1999), vagy Stanislas Dehaene (2003) fogalmával élve a *számérzék* számolási képességünk veleszületett, nagyrészt specializált (vagyis a többi kognitív képességtől elkülönülő, ha nem is teljesen független) alapja, amely kiterjed kis számosságok (<4) számolás nélküli felfogására, nagyságrendi viszonyaik megértésére és ebben a számkörben összeadásra, kivonásra (GEARY 1995). A preverbális csecsemők – hasonlóan a patkányokhoz, galambokhoz, primátákhoz – képesek továbbá nagyobb mennyiségek közelítő reprezentációjára is (XU et al. 2005). A számszavak elsajátítása, és az ujjakon történő számlálás még az iskolába lépést megelőzően lehetővé teszi a számok és a számtani műveletek megértését, a számfogalom kialakulását nagyobb számkörben is.

A számolási képességek tipikus fejlődésének leírásával azonban még adós a tudomány. A feladat nehézsége egyrészt a számfeldolgozás komplexitásából fakad, hiszen a számolás funkcionálisan és neuroanatómiai szinten is több, viszonylag elkülönülő tudásterületből tevődik össze. A számolás fejlődésmenete ráadásul nem egyenes irányú, jól bejósolható elsajátítási folyamat, mert az egyéni eltérések ebben igen meghatározóak (KAUFMANN–NUERK 2005).

Kutatásunkban kisiskolások (3. és 5. osztályosok) alapvető számolási képességeit vizsgáltuk azzal a céllal, hogy képet kapjunk ezek alakulásáról tipikusan fejlődő gyermekeknél abban az időszakban, amikor a gyakorlatban legtöbbször fel szokott merülni az igény az atipikus fejlődés azonosítására, vagyis a számolási zavar (fejlődési diszkalkulia) diagnosztizálására. A kutatási adatok alapján is kitüntetett jelentőségűnek tűnik az iskola 4. osztálya, ekkorra szilárdulnak meg olyan számokkal kapcsolatos alapvető ismeretek, mint például a lineáris mentális számegyenes, illetve az összeadó- és szorzótábla tényei és az alapvető számolási képességek automatizálódása. Nagyon fontos lenne ennek a fordulópontnak jól mérhető mutatóit megtalálni, melyek mentén lehetővé válhat a számolási zavar megbízható és differenciált diagnosztizálása.

Jelenleg ha eltérő fejlődésről, vagy fejlődési lemaradásról beszélünk, a normát az iskolai tananyag jelenti, vagyis normális fejlődésű az a diák, aki megfelel a matematikatantárgy követelményeinek adott osztályfokon. Minden matematikát tanító és tanuló számára ismert, hogy ehhez rengeteg olyan feltételnek is teljesülnie kell, ami nem számolás-specifikus (pl. legalább átlagos intelligencia, megfelelő figyelem, emlékezet, grafomotórium), sőt nem is képesség (pl. motiváció, megfelelő oktatás, tanárral való kielégítő kapcsolat). A számolási zavar diagnózisának felállítása során ezeket a tényezőket mind számba kellene venni, hogy ki lehessen szűrni a valódi diszkalkuliás tanulókat, vagyis azokat, akiknek számolás-specifikus sérülésük van. Ennél hatékonyabb és megbízhatóbb eljárás lenne, ha olyan feladatokban mérnénk a gyermekek teljesítményét, melyek közvetlenül (vagyis a lehető legközvetlenebbül) tükrözik a számfeldolgozó rendszer működését, fejlettségét. A tipikusan fejlődő gyermekek eredményei alapján felállított életkori, illetve osztályfok szerinti normákhoz lehetne viszonyítani a gyermek aktuális teljesítményét. Ezért állítottuk kutatásunk fókuszába az alapvető számolási képességeket (numerikus bázisképességeket). Ezek tehát területspecifikus képességek, melyek szoros kapcsolatban állnak a számfeldolgozó modullal/számérzékkel, és a fejlődés során korán (alapjaik még az iskola megkezdése előtt), a formális matematika oktatásának első néhány évében kialakulnak.

A továbbiakban röviden bemutatjuk a számfeldolgozás jelenleg leginkább elfogadott neurokognitív modelljét[1], majd áttekintést adunk a kognitív pszichológia azon eredményeiről az alapvető számolási képességek terén, melyek kutatásunk kiindulópontjaként szolgáltak.

I. 2. A számfeldolgozás hármas kód modellje

Dehaene *hármas kód modellje* (2003) a 'felnőtt agy' számfeldolgozásáról kognitív neuropszichológiai és idegtudományi adatokon nyugszik, elnevezése pedig azt az alapvetést tükrözi, hogy a különböző számolási feladatok megoldásához három elkülönülő

1 Dehaene hármas kód modelljének részletes bemutatásától eltekintünk, mert a szerző *Számérzék* című könyve 2003-ban megjelent magyarul, továbbá Krajcsi Attila (2010) tanulmányában az érdeklődők erről jelen folyóiratban is olvashattak.

reprezentációt használunk. A mennyiségek egyik szimbolikus kódja a számnevek rendszere *(auditoros-verbális szókeret),* ami a számokat hangsorokként tárolja, a másik általunk használt számszimbólum az arab számok rendszere *(vizuális arab szám formátum).* Ezeket az *analóg mennyiségreprezentáció* ruházza fel jelentéssel, vagyis ez tárolja a számok nagyságrendi értékeit. A számok analóg mennyiségi reprezentációja a *mentális számegyenesen* valósul meg, amelyet Dehaene zsugorítottnak/logaritmikus skálájúnak feltételez, vagyis minél nagyobb, ritkábban használt egy szám, annál pontatlanabb a mentális számegyenesre vetített reprezentációja.

A három kód kölcsönös összeköttetésben áll egymással, vagyis a verbális-vizuális alrendszer között *átkódolás* történhet az analóg rendszer közvetítésével az ún. szemantikus úton, de akár közvetlenül is, a számok jelentését nélkülözve. Mindegyik rendszer külön bemenetet kap, és külön kimenetet küld: a vizuális alrendszer az arab számok írását és olvasását végzi, a verbális a betűket olvassa és írja, továbbá a hallott és kimondott számneveket értelmezi, míg az analóg rendszer a vizuális becslésért felelős (pl. ponthalmazok számosságának közelítő meghatározása).

A modell talán legnagyobb értéke, hogy megpróbál magyarázatot adni a különböző számtani műveletek funkcionális és neuroanatómiai elkülönülésére. Az egyes műveletek hozzárendelhetők a különböző reprezentációs formákhoz attól függően, hogy melyikre támaszkodunk a feldolgozás során legerőteljesebben, vagyis a feladat mely idegi hálózatok működését igényli. A kísérleti adatok azt mutatják, hogy a verbális alrendszer a szorzótábla tényeinek, illetve egyjegyű számok összegének tárolásában és felidézésében meghatározó, és persze a verbális számlálásban, ahol a számszavak sorozatának automatikus előállítására van szükség. Az arab számok rendszerére a többjegyű számokkal való műveletvégzés és a számok párosságának megítélése során támaszkodunk. Az olyan feladatok elvégzése, mint a számok nagyságának összehasonlítása, a hozzávetőleges számolás[2], és a kivonás mindenképpen a mentális számegyenes igénybevételével történik.

I. 3. Számmegnevezés, számkiolvasás

Nézzük meg az arab számok megnevezése során lejátszódó folyamatokat elsőként a hármas kód modell mentén. A számjegy alakjának felismerését a *fusiform gyrus számjegyekre specializált vizuális detektorai* végzik kb. 150 ezredmásodperc alatt (Allison et al. 1994). A következő lépés a szám jelentéséhez való hozzáférés, hiszen ahogy már fentebb említettük, a vizuális-verbális átkódolás elsődlegesen a szemantikus úton történik. A számok értelmezése számmegnevezés során tehát reflexesen történik, amit viselkedéses szinten a *távolságfüggő priming-hatás* (Dehaene 2004) bizonyít. Ha az előfeszítő szám (ami csak 50 ezredmásodpercig villan fel a célinger előtt, így tudatosan nem dolgozza fel a kísérleti személy) közelebb áll a megnevezendő célszámhoz, akkor annak megnevezése gyorsabb, mint távolabbi szám esetén (pl. az *5* hatékonyabb előfeszítője a *6* számnak, mint a *2*).

Neuropszichológiai esettanulmányok[3] alapján arra következtethetünk, hogy létezik egy aszemantikus, vagyis a vizuális-verbális rendszert összekötő közvetlen út is, ami

2 Egy művelet eredményének közelítő becslése elegendő például annak eldöntésére, hogy 145-13 vagy 58+25 végeredménye-e a nagyobb.

3 Mr. M. 68 éves akalkuliás beteg, aki agysérülése nyomán elvesztette számérzékét, kiválóan olvas számokat és végez szimbolikus számításokat, de képtelen felfogni ezek értelmét (Dehaene 2003: 244).

a számokat egyik jelrendszerből a másikba alakítja jelentésük mérlegelése nélkül, de normál működés esetén ezt kevésbé használjuk.

A tízes számrendszerben a helyérték fogalmának (számjegyek helyüktől függően más-más értéket vesznek fel) megértése a többjegyű számok elsajátításának záloga, a számok nyelvtanát pedig a számszavak képzése érdekében kell megtanulni. Nyelvfüggő, hogy a két rendszer mennyire feleltethető meg egymásnak, továbbá a 0 átugrása is bonyolítja a számnevek átváltását arab számra (például „kétszáznegyvenkettő" az nem 200402, hanem 242). Power-Dal Martello (1990) *transzkódolás modellje* ennek megfelelően két operátort feltételez: az első *összefűzi* a helyi értékre bontott számokat (pl. 200+40+2), majd az *átíró* operátor ejti ki a nullákat, ha a szabály úgy kívánja.

Láthatjuk, hogy a számszavak feldolgozásában aritmetikai szabályok is érvényesülnek (nem csak fonémikus szerkezetük mentén történik), ezért különösen indokolt, ha reprezentációjuk elkülönül a nem számokat jelölő szavak rendszerétől (Márkus 2007). Dehaene (1995) EKP adatai valóban arra utalnak, hogy a számok szókategóriája sajátos idegcsoportok működésén alapszik[4]. Dehaene egyik afáziás betegének példája (2003: 256), aki képtelen volt a fonémákat szavakká fűzni, de a számszavak kiejtése során sosem hibázott, azt bizonyítja, hogy még a beszédprodukció szintjén is specializált idegi hálózatok felelősek a számok megalkotásáért.

Az egyjegyű arab számok ismeretében Magyarországon 5 és 6 éves kor között tapasztalható jelentős fejlődés (Soltész 2010). Az iskolába lépés előtt már a gyermekek 90%-a ismeri a számjegyeket 5-ig, közel kétharmaduk pedig 15-ig. Első osztály végére ezeket az összes ép értelmű gyermek elsajátítja, és 39% már ezres számkörben is képes kiolvasni a számokat (Józsa 2003).

A bemutatott szám helyes azonosítása/kiolvasása azonban nem az egyetlen mutatója a feladatban működő rendszer fejlettségi szintjének, épségének. Az arab számokkal való tapasztalatok bővülésével azt várjuk, hogy azonosításuk egyre kevésbé igényel mentális erőfeszítést, automatizálódik, így a kiolvasásukhoz szükséges idő egyre csökken (amíg eléri a felnőttekre jellemző gyorsaságot).

Verguts et al. (2005) neuronháló modellje további érdekes predikcióval szolgál a számmegnevezés fejlődésével kapcsolatban. Korábban már utaltunk a számmegnevezés terén mutatkozó távolságfüggő priming-hatásra, ami a számjegyek mentális számegyenesre történő fordítására utal[5]. A zsugorított számegyenes-elképzeléssel nehezen összeegyezethető azonban, hogy a *priming szimmetrikus* (a *3* ugyanolyan jó előfeszítője az *5 számnak* mint a *7*, Reynvoet et al. 2002), valamint a megnevezési idő nem nő lineárisan a számok nagyságával, 1-9 között végig 455ms körüli (Chochon et al. 1999), nem mutatható ki tehát *nagyság-hatás* (Butterworth et al. 2001). Verguts et al. (2005) modellje[6] 30.000 próba után tökéletesen illeszkedik ezekhez a viselkedéses adatokhoz, de a tanulási fázis elején (kb. 1000 próba után) még jelentős nagyság-hatást generált az, hogy a nagyobb számokkal ritkábban találkozik a gép[7]. A szerzők felvetik annak lehetőségét, hogy ugyanez a mintázat figyelhető meg arab számok terén még kevés gyakorlattal rendelkező gyermekeknél. Annak meghatározása, hogy a tipikus fejlődés mely pontján

4 Bár ez más szókategóriákra is igaz, mint állatok, eszközök, igék, színek, testrészek.

5 Az analóg mennyiségreprezentáció két markáns jellemzője ugyanis a *távolság- és a nagysághatás* (Moyer–Landauer 1967): minél kisebb két szám közt a relatív különbség, annál nehezebb megkülönböztetni őket.

6 A modell bemutatásától terjedelmi okok miatt kénytelenek vagyunk eltekinteni.

7 Dehaene–Mehler (1992) megfigyelése szerint ugyanis a mindennapokban a számok előfordulási gyakorisága nagyságukkal arányosan jelentősen csökken.

várható nagyság-hatás egyjegyű számok tartományában megnevezési feladatban (pl. 6 éves korban, még az iskolába lépés előtt?), még empirikus vizsgálatra szorul.

I. 4. Pontszámlálás

Fontos számolási bázisképesség nem szimbolikus ingerek (jelen vizsgálatban szimultán bemutatott ponthalmaz) számosságának meghatározása. Ez háromféle módon történhet: megbecsülhetjük a látott ingerek mennyiségét, megszámlálhatjuk az elemeket, vagy támaszkodhatunk szubitizációs képességünkre. *Becslés* során preverbális számolás történik, aminek működéséről, fejlődéséről, korlátairól sokat olvashatunk a szakirodalomban, jelen tanulmányban azonban nem térünk ki. Kutatásunkban ugyanis a gyermekek a bemutatott ingerek számának pontos meghatározására törekedtek, és a korlátlan bemutatási idő lehetővé is tette a számlálást[8].

A *számlálás* szabályait, elveit első osztály végére már biztosan elsajátítják a tipikusan fejlődő gyermekek[9], értik a művelet lényegét és helyesen használják. Az egyesével való számlálás az elemek *szeriális letapogatását* igényli, majd minden elemhez hozzárendeljük a soron következő számszót (ez az *egy-az-egyhez megfeleltetés* képessége), és a *kardinalitás elve* értelmében az utolsó szám jelöli a halmaz számosságát (Gelman–Gallistel 1978). Iskoláskorban a számlálás hatékonysága nő, vagyis a számlálási időben, és az alkalmazott stratégiák terén mutatkozik fejlődés. Felnőttek szubvokális számlálási ideje (az ingerek méretének függvényében) +300-400ms/pont (Jensen et al. 1950), míg elsősöknél még ennek kétszeresét (+750ms/pont) mérhetjük (Camos 2003). Ez a különbség az egyesével való számlálás gyorsulásából, illetve hatékonyabb stratégiák megjelenéséből és alkalmazásából is fakad.

Camos (2003) vizsgálatai szerint már hét éves kortól használják a gyermekek a kettesével, hármasával stb. (maximum hatosával) való számlálást, vagyis a *+n stratégiát*, és az *összeadó stratégiát*, amikor az elemeket alcsoportonként számolják össze (pl. „2 meg 3 az 5, plusz 2 az 7…"). Kilenc évesek alkalmazzák először a *szorzó* stratégiát, vagyis az alcsoportokban lévő elemek számát megszorozzák az alcsoportok számával, de ezt a stratégiát minden korcsoportban kevesen, csak a legjobban számlálók alkalmazzák. A +n stratégiát 11 éves kortól egyre gyakrabban használják a gyermekek, és nem csak a közelség mentén alcsoportokba szerveződő ingerek számlálása esetében. Kutatásunkban a random elrendezésű ponthalmazokat a 9-11 éves gyermekek valószínűleg egyesével, vagy kettesével számlálták.

A *szubitizáció* (Kaufman et al. 1949) kis számosságok azonnali, hibátlan, számolás nélküli felfogását jelenti. A pontszámlálás feladatban mért reakcióidő-görbék és hibázási gyakoriságok sajátos képet mutatnak: 3-4 elemnél törést tapasztalhatunk ezekben, vagyis szinte ugyanannyi ideig tart egy, kettő, három, esetleg négy elem számszerűsítése, és hibázás is csak ennél nagyobb ponthalmazok esetében fordul elő. Arról mai napig vitáznak a kutatók, hogy hol van a szubitizációs tartomány határa, és milyen mechanizmus áll a jelenség hátterében.[10] Az egyik versengő magyarázat szerint *pontos becslés* történik, vagyis a preverbális számolás ebben a kis számkörben még gyors és pontos

8 Ha az ingerek bemutatási ideje 200 ezredmásodpercnél rövidebb, akkor csak becslésre van lehetősége a vizsgálati személyeknek.

9 Bővebben erről Jármi Éva (2012) *Számolási képességek fejlődése óvodás- és kisiskoláskorban* tanulmányában olvashatnak az érdeklődők.

10 Vannak, akik magát a jelenséget is megkérdőjelezik, például Balakrishnan–Ashby (1991) nem mutatott ki diszkontinuitást a reakcióidőkben.

(Gallistel–Gelman 1992), a vizsgálati személyek ezért csak ezután (egyénileg eltérő, hogy pontosan hány elemnél, ez mossa el a tartomány határát) térnek át a lassabb verbális számlálásra. Dehaene–Cohen (1994) ezzel szemben minőségileg eltérő folyamatot, az elemek szeriális letapogatását nem igénylő, *párhuzamos, figyelem előtti (vizuális) feldolgozást* feltételez a szubitizáció hátterében. Erre neuropszichológiai bizonyíték a szimultánagnóziás betegeknél kimutatott disszociáció: ők jó teljesítményt mutatnak a szubitizációs tartományban, míg a számlálás deficites (elemeket többször számol, vagy kihagy) a szeriális vizuális exploráció zavara miatt. Piazza et al. (2002) PET vizsgálata nem tudta egyértelműen alátámasztani fenti nézetet, több agyi (parietális, okcipitális és frontális) területen mértek fokozott aktivációt nagyobb elemszámnál, de nem elkülönülő hálózatok vettek részt a szubitizációban illetve számlálásban. Későbbi fMRI vizsgálatukban (Piazza et al. 2003) azonban megerősítést nyert, hogy 3-4 elemnél ugrásszerűen nő meg a figyelmi területek részvétele a feladatban.

I. 5. Számtani műveletek: összeadás

Dehaene modellje kapcsán már volt szó a számtani műveletek funkcionális elkülönüléséről, de még adott műveleten belül is többféle stratégia áll rendelkezésre a feladat megoldására, amelyek eltérően terhelik a számfeldolgozó alrendszereket. Először tekintsük át az *egyjegyű számok összeadásával* kapcsolatos ismereteket.

A gyermekek ujjaik segítségével kis számkörben már az iskolába lépés előtt tudnak összeadni. Külön instrukció nélkül felfedezik a *kommutativitás elvét* (összeadásnál a tagok felcserélhetőek), és a számolást a nagyobbik összeadandóval kezdik. Az ún. *minimumstratégia* alkalmazása 5-6 éves kortól jellemző, első osztály végére pedig már nincs szükség az ujjakra sem. *Fejben számolásnál* is a nagyobbik összeadandótól kezdik sorolni a gyermekek a számokat, a számolási idejük ezért a kisebbik összeadandóval egyenes arányban növekszik (egy számolási lépés kb. 400ms).

A műveletek ismételt elvégzése során, asszociációs tanulással (a probléma, vagyis az elvégzendő összeadás és az eredmény asszociálódásával, pl. 3+5 az 8) kiépül az ún. *összeadási tábla* (Ashcraft 1995). Az összeadási táblában az egyjegyű számok összegei szerepelnek, ezek nagyságának függvényében nő előhívási idejük[11]. *Direkt felidézés* esetén a 3+5 eredménye közvetlenül kerül felidézésre, míg a *dekompozíciós stratégia* alkalmazása esetén a probléma lebontása történik pl. 3+(3+2), mert az egyik részösszeg (3+3) hozzáférhetőbb, mint a végeredmény, amelyhez így két lépésben 3+3=6 +2=8 lehet eljutni (Geary 2004). Valóban, a duplázás (3+3, 4x4) eredményei összeadásnál és szorzásnál könnyebben előhívhatók (McCloskey 1992), és számolási zavaros gyermekeknél is megtartottak (Márkus 2007).

A felidézésen alapuló stratégiák alkalmazása annak függvénye, hogy a gyermek mennyire bízik a felidézett válasz helyességében: magas *kritériumszint* esetén, ha a gyermek nem teljesen biztos magában, inkább algoritmusos stratégiára vált (Siegler 1988). Tipikus fejlődés során egyre gyakoribbá válik a felidézés, ami egyrészt jelentősen lerövidíti a műveletvégzés idejét, másrészt kevésbé terheli a munkamemóriát, így lehetővé válik komplexebb problémák (pl. szöveges feladatok) megoldása is (Geary–Widaman 1992).

11 Ez az ún. *problémanagyság-hatás*, melynek hátterében az eltérő gyakorlási mennyiség, és az adatok numerikus szerveződésének hatását egyaránt feltételezik a kutatók (Ashcraft 1995; Butterworth et al. 2001).

A *többjegyű számok összeadása* minőségileg más feladatot jelent a későbbiekben. Az összeadási tábla tényeinek felidézésével szemben, amely a hármas kód modell szerint a verbális számformához köthető, a többjegyű *műveletvégzés algoritmusos*, és a vizuális arabszám-rendszerhez kapcsolódik (DEHAENE 1992, 2003)[12]. Erről az aritmetikai folyamatról kapunk képet a helyes válaszok azonosítása során a hibakeresés feladatban[13].

Amikor a látott végeredmény helyes, akkor feltehetően a *számolás – összevetés stratégiát* alkalmazzák a gyermekek, vagyis kiszámítják a művelet eredményét, és ezt összevetik a látott eredménnyel. Mivel a feladatban nem egyjegyű számok összeadása szerepel, szinte kizárhatjuk, hogy *felidézés – összevetés stratégiával* (vagyis a művelet eredményének felidézésével), vagy *felismerés stratégiával* dolgoztak a gyermekek (CAMPBELL–FUGELSANG 2001). Utóbbi esetében a szemantikus emlékezetben tárolt emléknyomokkal veti össze a válaszadó a látott műveletet (pl. összeadási táblában szereplő 3+4=7 teljes adatsorát ismeri fel az egyén). A számolás – összevetés stratégia alkalmazását az jelzi, ha megoldási idő a kisebbik összeadandó[14] nagyságának függvénye.

A hibás válaszok elutasításához nem feltétlenül szükséges elvégezni a számításokat, mégis hosszabb ideig tart a döntés meghozatala (ASHCRAFT–STAZYK 1981; CAMPBELL–FUGELSANG 2001). A *plauzibilitás stratégia* alkalmazása esetén az egyén a végeredmény kiszámítása/felidézése nélkül is képes gyors 'hibás' döntést hozni, a művelet eredményének *közelítő becslése* révén, vagy a *párossági szabályok* (implicit) alkalmazásával.

A hármas kód modellbe jól illeszkedik a hozzávetőleges számolás és a műveletvégzés elkülönülése, amit a neuropszichológiai esettanulmányokban jelentkező kettős disszociációk is alátámasztanak (DEHAENE–COHEN 1991). A kísérletekben akkor következtethetünk arra, hogy az egyén párhuzamos becslés alapján válaszolt, ha a helytelen válasz elutasításának gyorsasága a helyes eredménytől való távolságának függvénye (pl. könnyebb a 8+4=21…+9 távolság, mint a 8+4=13…+1 távolság). De Rammelaere et al. (2001) adatai ugyanis kizárják annak lehetőségét, hogy a távolság hatása pusztán a kiszámított/felidézett helyes eredmény és a helytelen válasz összevetésének könnyebbségéből fakad[15].

Régóta tudjuk, hogy a felnőttek egyjegyű számok szorzatainak verifikációs feladatában gyorsabban elutasítják azokat a rossz válaszokat, amelyek megsértik a szorzásra vonatkozó párossági szabályokat (KRUEGER 1986). A párossági információra szorzásnál már 3. osztályos gyermekek is támaszkodnak (vagyis könnyebb a 8x7=57, mint a 8x7=58), pedig általában nem tudják explicit módon megfogalmazni a szabályt (LEMAIRE–FAYOL 1995). A szorzás tanulásának kezdetén tapasztalható hibák nagy része az összeadás párossági szabályaival van összhangban (LEMAIRE–SIEGLER 1995), vagyis elképzelhető, hogy összeadási feladatokban is segítheti a gyermekeket a párossági információ.

Fontos kiemelni, hogy a plauzibilitási stratégiát akkor választják a felnőttek, ha ez az alternatív stratégiáknál hatékonyabb, vagyis gyorsabb megoldást eredményez, mint a válasz felidézése/kiszámolása. Jelen kutatásban az összeadások kiszámítása a vizsgált

12 Kutatásunkban az összeadásoknál az ingerbemutatás formáját a preferált reprezentációhoz igazítottuk annak érdekében, hogy ne legyen szükség átkódolásra, és így a művelet elvégzésének ideje közvetlenül mérhető legyen. Az egyjegyű számok összeadásánál szóban adtuk a feladatot és szóban történt a válaszadás, míg nagyobb számkörben a művelet elvégzése során a számítógép képernyőjén látta a gyermek a számokat.

13 A verifikációs feladatban arról kell gombnyomással dönteni, hogy a látott művelet (pl. 14+4=19) eredménye helyes-e, vagy helytelen.

14 Példáinkban (pl. 16+2=18) ez mindig a hozzáadandó, ha a személy nem bontja az első tagot tízesekre és egyesekre.

15 Nem mutatkozott ugyanis problémanagyság-hatás a helytelen feladatokban.

korosztály számára elég nehéz ahhoz, hogy adaptív stratégiaválasztás esetén is indokolt lenne a plauzibilitási stratégia alkalmazása[16].

I. 6. Számtani műveletek: kivonás, pótlás, bontás

Képalkotó eljárások eredményei szerint még a kis számkörben végzett kivonás is sokkal inkább igényli a számok szemantikus elaborációját, vagyis jobban támaszkodik a *mentális számegyenesre*, mint az összeadás (pl. DEHAENE–COHEN 1997). Ez persze nem jelenti azt, hogy a gyermekek ne hívnák segítségül az összeadási tábla tényeit kivonások megoldása során (SIEGLER 1988). Ha a gyermek algoritmusos stratégiát alkalmaz (például a 8–3 elvégzéséhez), akkor vagy a kisebbítendőtől indul, és onnan *számol lefelé* (8-7,6,5), vagy a kivonandótól kezd *felfelé számolni*, amíg a nagyobb számig ér (3-4, 5,6,7,8). Utóbbi több lépést jelent azokban az esetekben, amikor a kivonandó kisebb, mint a maradék, mégis könnyebb a gyermekek számára, mert a növekvő számsorban ritkábban hibáznak (FUSON 1992). Használatát azért is javasolt erősíteni, mert jól előkészíti a többjegyű kivonás eljárása során szükséges kiegészítést (FUSON–BURGHARDT 2003).

A felfelé számolás gyakorlását szolgálják a *pótlás feladatok* (pl. 3+ =8). Természetesen a gyermekek itt is, és *bontás* során (pl. 8- =3) is támaszkodhatnak az összeadási-tábla tényeire, illetve számolhatnak lefelé, felismerve a feladatokban rejlő kivonást. Sajnos ez a művelettípus kívül esik a kognitív pszichológia vizsgálódási körén, ezért nem tudjuk, hogy milyen stratégiát alkalmaznak a felnőttek ezeknél a példáknál. Az iskolai matematika oktatás első éveiben a gyermekek gyakran találkoznak pótlással/bontással, különösen tízre való pótlással, ezért lehetséges, hogy ebben az életkorban a hiányzó tag felidézése a leghatékonyabb stratégia.

A tízes átlépést igénylő kivonások (például 14–6) nagy nehézséget jelentenek a művelet elsajátításának kezdetén. A gyermekek által alkalmazott stratégia első lépésben a kivonandó felbontását igényli (4+…=6), ami inkább additív művelet, ezután a kapott eredményt ki kell vonni a tízből (10–2=8) számolás, vagy felidézés segítségével (FUSON–KWON 1992). A tízes átlépést igénylő pótlás/bontás hasonló nehézségű, ha kivonás segítségével jutnak el a gyermekek a válaszhoz, de elképzelhető, hogy ezeket a feladatokat egy lépésben, kiegészítéssel oldják meg a gyermekek.

A kivonás fogalmi megértése magában foglalja annak felfogását, hogy a kivonás az összeadás ellentettje (PIAGET 1952), vagyis ha 3+5=8, akkor 8–5=3 és 8–3=5. Már 5–7 évesek jobbak az a+b–b *(inverziós)* feladatokban, mint a végeredmény mentén illesztett a+a–b műveleteknél (BRYANT et al. 1999), sőt képesek a+b–(b+1) jellegű komplex problémáknál is alkalmazni az inverzió elvét, még akkor is, ha magát a szabályt nem tudják megfogalmazni.

A kétlépéses műveletvégzés, főleg többjegyű számokkal (pl. 13+13-4) a vizsgált osztályfokokon nagy kihívást jelent a gyermekek számára, ezért várhatóan mind a hibázások számában, mind a reakcióidőben egyértelműen tükröződik, ha az inverzió elvének alkalmazásával, számolás nélkül oldja meg a gyermek a példát. A szabály felismerését és használatát segíti 7-9 éveseknél, ha az inverziós és a kontroll példákat külön-külön, nem keverve mutatják be (STERN 1992). Annak érdekében, hogy az adatok

16 Lemaire–Fayol (1995) kutatásában a 3. osztályosok még a probléma nehézségétől függetlenül alkalmazták a plauzibilitási stratégiát, míg a 4. osztályosok válaszaiban már megfigyelhető volt a felnőttekre jellemző adaptív stratégiaválasztás.

a gyermekek kompetenciáját tükrözzék (érti-e az inverzió elvét), kutatásunkban két elemmel segítettük meg az inverzió szabályának alkalmazását: az instrukció során adott figyelmeztetéssel[17], illetve három ‘gyakorló’ inverziós példával, amelyeket a tényleges mérés előtt mutattunk be (a válaszokat rögzítettük, de nem dolgoztuk fel).

I. 7. Párossági ítélet

A matematikában járatos felnőttek számára a párosság (egy szám páros-e vagy páratlan) a számok kiugró jellemzője, ezek kategorizálásánál elsődleges szempont.[18] A párossági ítélet megalkotása során a személy szemantikus emlékezetéből hívja elő a párossági információt, ami közvetlenül az arab számformához kapcsolódik (Dehaene et al. 1993). A *direkt felidézés* stratégiája mellett/helyett két további megoldási módra támaszkodhatnak a kevésbé gyakorlott gyermekek: megvizsgálhatja, hogy a szám *osztható-e kettővel*, vagy kipróbálhatja, hogy *kettesével számolva* eljut-e a célszámig. Ezekben az esetekben a szám nagysága jelentősen befolyásolja a reakcióidőt, vagyis *problémanagyság-hatás* mutatkozik (Berch et al. 1999).

A kettesével való számolás következménye lehet a páros számok előnye. Az ún. *párossági hatás* értelmében a páros számokkal kapcsolatban gyorsabban tudunk dönteni, míg a *MARC-hatás* (Markedness Association of Response Codes) arra utal, hogy a páratlan számokat a bal, a páros számokat a jobb oldalhoz társítjuk (Berch et al. 1999). A mentális számegyenes téri kiterjedését bizonyító *SNARC-hatást* (Spatial-Numerical Association of Response Codes), vagyis hogy bal kezünkkel/oldalon gyorsabban hozunk számossággal kapcsolatos döntéseket a relatíve kis számokról, míg jobb kezünkkel/oldalon a relatíve nagy számokról, Dehaene et al. (1993) először szintén párossági feladatban mutatta ki. Láthatjuk, hogy több tényező (szám nagysága, párossága, helyes válaszgomb helyzete) egyszerre fejti ki hatását, ami azt eredményezi, hogy a fenti jelenségek a különböző kutatásokban nem következetesen mutatkoznak. Kutatásunkban a vizsgálati személyek párossági ítéletét kevés próbával mértük, ezért csak a robusztusabb, a válaszadó stratégiájára is utaló problémanagyság-hatást ellenőriztük, a többi hatás kivédése érdekében pedig a válaszgombok helyzetét szisztematikusan variáltuk.

A páros-páratlan megkülönböztetést a tízes számkörben a magyar diákok már első osztályban elsajátítják, ezért a vizsgált időszakban elsősorban a reakcióidő terén várható esetleg javulás. Berch et al. (1999) egészen hatodik osztályig tapasztalta a megoldási idő folyamatos csökkenését a párossági feladatokban, de a mintájukban szereplő amerikai diákok a magyaroknál jóval később, harmadik osztályban kapnak direkt instrukciókat a párosságról.

I. 8. A vizsgálat kérdései, hipotézisei

1. Számmegnevezés: az egyjegyű számok megnevezése már harmadik osztályra automatizálódott, ezért nem mutatható ki nagyság-hatás, és a két csoport reakcióideje azonos.

17 *„Figyelj, egy csalafinta feladat következik! Olyan műveleteket fogsz látni, amiben mindig van egy összeadás és egy kivonás. Mondd meg a végeredményt, de légy résen, mert vannak olyan példák, ahol nem kell elvégezned a műveleteket, akkor is tudod a végeredményt!”*

18 Ha például három egyjegyű szám közül ki kell választani azt a kettőt, ami a legközelebbi kapcsolatban áll egymással, a felnőttek elsősorban a számok párosságát veszik figyelembe (Miller–Gelman 1983).

2. Számkiolvasás: milyen számkörben automatizálódott harmadik, ill. ötödik osztályra a többjegyű számok kiolvasása, és van-e ebben életkori eltérés?
3. Pontszámlálás:
   - 3/A. A szubitizáció jelensége megmutatkozik a reakcióidő-görbén és a hibaszámban, és ebben a tartományban nincs különbség a két csoport teljesítményében.
   - 3/B. A számlálás hatékonysága nő harmadik és ötödik osztály között, vagyis a számlálási tartományban az ötödikesek reakcióideje kisebb.
4. Összeadási tábla: milyen számkörben automatizálódott harmadik, ill. ötödik osztályra az egyjegyű számok összeadása, és van-e ebben életkori eltérés?
5. Hibakeresés összeadásoknál:
   - 5/A. A helyes végeredmény azonosításának ideje a hozzáadandó szám nagyságának függvénye, ami az összeadás algoritmusának alkalmazását jelzi, és ennek hatékonysága nő harmadik és ötödik osztály között.
   - 5/B. A helytelen végeredmény elutasítása során alkalmazzák-e a gyermekek a plauzibilitás stratégiát (közelítő becslés, párossági információ figyelembe vétele), és van-e ebben életkori eltérés?
6. Kivonás, pótlás/bontás: milyen stratégia alkalmazására utalnak a reakcióidő adatok a tízes átlépést igénylő vs. nem igénylő feladatokban, és van-e ebben életkori eltérés?
7. Inverziós algoritmusok:
   - 7/A. Milyen arányban ismerik fel és alkalmazzák az inverzió elvét az inverziós példák (A+B-B) megoldásához a harmadik, ill. ötödik osztályosok, és van-e ennek hatékonyságában életkori eltérés?
   - 7/B. A számolást igénylő többlépéses műveletek (A+A-B) megoldásának helyessége és ideje terén az ötödikesek teljesítménye jobb.
8. Párossági ítélet: az egyjegyű számok párosságának megítélése már harmadik osztályra automatizálódott, ezért nem mutatható ki problémanagyság-hatás, és a két csoport reakcióideje azonos.

II. Módszer

II. 1. A vizsgálat alanyai

A vizsgálati mintát két budapesti általános iskola harmadikos és ötödikes diákjai alkotják. A vizsgálat megkezdése előtt szülői belegyezést kértünk, illetve rövid írásos tájékoztatást nyújtottunk a szülők és a tanárok számára a vizsgálat céljairól, módszereiről és eljárásáról.

Az első vizsgálati ülésen, melynek elsősorban szűrő funkciója volt, 20-20 fő vett részt. A tipikus fejlődés tanulmányozása érdekében a mintába kerüléshez két kritériumnak kellett teljesülnie: a gyermeknek nincs ismert tanulási-, illetve viselkedészavara (tanári interjú alapján), és az általános kognitív képességeket mérő teszteken teljesítménye legalább a normál övezetbe tartozik. Ez alapján három főt kellett kiejteni, egy fő pedig nem vett részt a vizsgálat második ülésén. A mintába végül a harmadik osztályosok közül 17 fő (életkor: 9.3-10.4 év; átlag: 9.77; szórás: 0.37), az ötödikesek közül 19 fő (életkor: 11.1-12.3 év; átlag: 11.59; szórás: 0.4) került, a nemek eloszlása 18-18 fiú, illetve lány.

II. 2. A vizsgálat menete

Az adatgyűjtés 2005 tavaszán történt, tanítási időben, az iskolák által rendelkezésünkre bocsátott helyiségekben. A két üléses vizsgálatokat három kiképzett vizsgálatvezető végezte, mindkét ülés kb. 45-60 percig tartott. Az első ülésben a gyermekek általános kognitív képességeit mértük, a második alkalommal került sor a számolási feladatokra[19].

II. 3. Mérőeszközök

A szűréshez a *Snijders-Oomen nonverbális intelligencia-teszt* (SON-R 5,5-17) három próbáját (Mozaik, Emlékezés képekre, Képrendezés), a fókuszált figyelmet mérő *Toulouse-Pieron Figyelem Tesztet*, valamint a munkamemória különböző komponenseinek kapacitását tükröző *Számterjedelem tesztet* alkalmaztuk.

Mivel a számolási bázisképességek mérése során elsősorban a reakcióidő adatokra támaszkodunk (a hibaszám alacsony, ezért kevésbé informatív a könnyű számolási feladatoknál), nem-numerikus gyorsasági feladatban is vizsgáltuk a v.sz-ek teljesítményét: a *Tárgymegnevezés* feladatban tíz mindennapi tárgy sematikus rajzát[20] (Snodgrass–Vanderwart 1980) mutattuk be számítógépen, a gyermekeknek pedig minél gyorsabban meg kellett nevezniük a látott tárgyat. A szó kimondásának kezdetét a számítógéphez csatlakoztatott mikrofon érzékelte (ún. *voice key*), az inger megjelenésétől eltelt reakcióidő így ezredmásodperces pontossággal rögzíthető.

Jelen kutatáshoz nyolc számolási feladatot választottunk ki kutatócsoportunk fejlődési diszkalkulia azonosítását célzó tesztjének *(MiniMath)* feladatgyűjteményéből. Számítógépes bemutatásuk a kísérleti pszichológiában gyakran használt *Presentation®* szoftverrendszer segítségével történt.

Az egyes számolási feladatok[21]:

1. *Számmegnevezés, számkiolvasás:* egy- és többjegyű arab számok (10db) kimondott számszavakká történő transzkódolása.
2. *Pontszámlálás:* szimultán bemutatott vizuális ingerek (1-10) számosságának meghatározása szubitizáció (1-3), és számlálás (4-10) segítségével.
3. *Összeadó-tábla:* hallott egyjegyű számok összegének megnevezése (12db).
4. *Hibakeresés összeadásoknál:* helyes/hibás összeadások (pl. 14+5=17) helyességéről döntéshozás (16db), válaszadás gombnyomással.
5. *Kivonás:* egy- és többjegyű kivonások eredményének megnevezése (6db).
6. *Pótlás és bontás:* pótlás (4+… =6) és bontás (5-…=2) feladatok eredményének megnevezése (6db).
7. *Inverziós algoritmusok*: A+B-B típusú inverziós, illetve A+A-B típusú számolásos feladatok eredményének megnevezése (8db) az inverzió elvének alkalmazása, illetve számolás segítségével.
8. *Párossági ítélet:* egyjegyű számok párosságáról döntéshozás (1-10), válaszadás gombnyomással.

19 Jelen tanulmányban csak a számítógépes feladatok eredményeit mutatjuk be, további papír-ceruza feladatok: Számok írása, Számkeresés, Számokkal kapcsolatos mindennapi tények, Törtek informális megértése, Szöveges feladatok.

20 A 260 képi ingerből olyanokat választottunk, amelyek komplexitása az egyjegyű számokéhoz hasonló, továbbá amelyek (Snodgrass–Vanderwart 1980) eredményei szerint egyértelműen felismerhetőek, megnevezhetőek.

21 A feladatok bemutatási sorrendjét és az instrukciók pontos leírását lásd a függelékben.

II. 4. Eredmények

A számolási feladatokban a tipikusan fejlődő gyermekek várakozásunknak megfelelően kevés hibát ejtettek. Az inverziós algoritmusok, különösen az A+A-B típusú számolásos feladatok jelentették a legnagyobb kihívást mindkét korosztály számára, ami a magasabb hibaszámban (14%, ill. 17%) is megmutatkozott. A többi feladat összesen 90 próbájában a 3. osztályosok 59 hibát ejtettek, az 5. osztályosok pedig 66 alkalommal válaszoltak rosszul, ami mindkét csoportnál 0.39%-os hibaarányt jelent.

A két csoport hibaszámát feladatonként *Mann-Whitney U-próbával* hasonlítottuk össze. Ez alapján a három- illetve négyjegyű számok (*147, 479, 1834* számok) kiolvasása volt jelentősen nehezebb a fiatalabb korosztálynak (U=112.5;p<0.05). Fontos megjegyezni, hogy a hibázó gyermekek azonnal kijavították válaszukat ebben a feladatban. Tendenciaszerű eltérést találtunk még a kivonás helyességében, de fordított irányban, vagyis a harmadikosok ejtettek kevesebb hibát (U=113.5;p<0.1), és az esetek felében nem is helyesbítettek a gyermekek.

A továbbiakban a reakcióidő-adatok elemzését mutatjuk be, amely során (az alacsony hibaszám ellenére) csak a helyes válaszok reakcióidejére szorítkozunk. Az adatok eloszlásának normalitását *Kolmogorov-Smirnov teszttel* ellenőriztük, amit a legtöbb esetben egy-egy szélsőséges adat elhagyásával biztosítani lehetett[22]. Abban a két részfeladatban, ahol a normalitás feltétele sérült (*Kivonás – könnyű kis számkörben* [Z=1.72;p<0.05], *Inverziós algoritmusok – inverzió* [Z=1.257;p<0.1]), a csoportok összehasonlítására a *Mann-Whitney U-próbát*, a többi esetben a *Welch-féle d-próba* alkalmaztuk. Az egyes feladatokban mért reakcióidő-mintázatot *vegyes varianciaanalízisekkel* vizsgáltuk, ahol az egyik független változónk az osztályfok volt, a másik pedig a feladat próbái/részfeladatai, így a mintázatokban mutatkozó esetleges csoportkülönbségeket is azonosítani tudtuk.

A nem-numerikus kontrollfeladatban *(Tárgymegnevezés)* nem találtunk különbséget a két életkori csoport átlagos reakcióideje tekintetében (F=0.611;n.s.), a számolási feladatokban tehát a mért reakcióidő adatokkal dolgozhattunk[23]. A 3. osztályosok átlaga 694ms (szórás 131.1), az 5. osztályosoké 671ms (szórás 119.5) volt.

Számmegnevezés: Az egyjegyű számok megnevezése még a tárgyak megnevezésénél is gyorsabban megy a gyermekeknek (átlagosan 492ms az ötödikeseknek, ill. 530ms a harmadikosoknak), függetlenül a számok nagyságától (F=0.994;n.s.). A varianciaanalízis ugyan tendenciaszerű eltérést jelez a két csoport reakcióidő-mintázatában (F=3.102;p<0.1), az összevont mutatók (a tíz próba átlaga) összehasonlítása során ez teljesen eltűnik (d=1.35;n.s.).

Számok kiolvasása: A többjegyű számok kiolvasása a 3. osztályosoknak lassabban megy (F=10.904;p<0.01), és a számok nehezedésével egyre nő a két csoport között a különbség (interakció F=4.884;p<0.05). A hibázások gyakoribbá válásával párhuzamosan a három- és a négyjegyű számok kiolvasásának ideje 3. osztályban jelentősen nagyobb (d=2.93; p<0.01 és d=3.19;p<0.01).

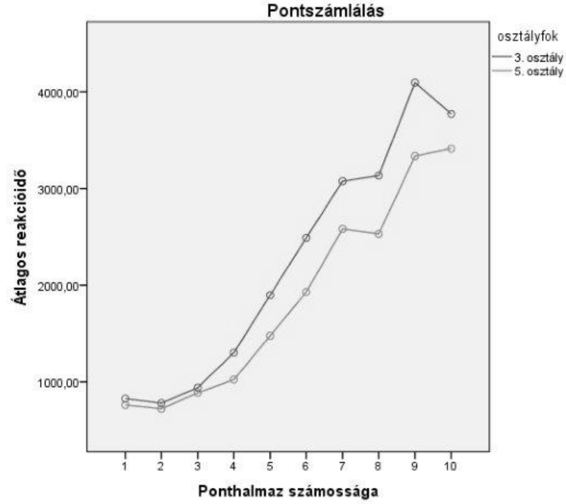
Pontszámlálás: A gyermekek reakcióidő-mintázata[24] alapvetően várakozásainknak megfelelően alakult. A szubitizációs tartományban (1-3 ponthalmazok) a gyermekek

22 A *stem and leaf diagramok* és a v.sz.-ek tesztmagatartásáról további információkkal szolgáló adminisztrációs lapok áttekintése alapján a pontszámlálásnál 7 adatot, a kivonásnál 3 esetet, a pótlás/bontás feladatban 4, a párossági ítéletnél pedig 1 adatot távolítottunk el.

23 A számolási feladatban mutatkozó reakcióidő-eltérés számolás-specifikusan értelmezhető.

24 Az elemzés első lépéseként a két sorozat eredményét összevontuk, így minden ponthalmaz-méretnél (1-10) egy átlagos reakcióidő került további feldolgozásra. Ha helytelen válasz, vagy mérési hiba miatt az egyik adat hiányzott, az összevont mutató valójában csak egy válasz eredménye.

átlagos reakcióideje nem éri el az egy másodpercet (795ms, ill. 824ms), míg ezen kívül (4-10 ponthalmazok) jelentősen lassabb a válaszadás (2362ms, ill. 2849ms; t=19,338;p<0.01).



1. ábra. Pontszámlálás feladatban mért reakcióidő-mintázatok

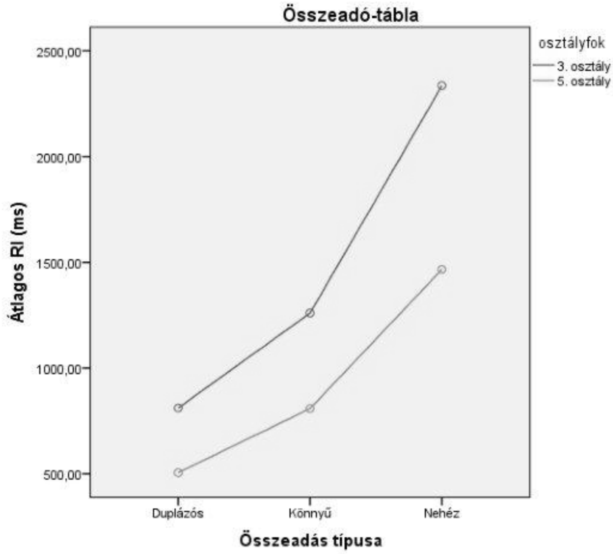
Pontonként vizsgálva a reakcióidő-növekedést, a következő eredményeket kapjuk:

– 1-2 pont között nincs emelkedés (F=1.79;n.s.), de 2-3 között már szignifikáns a kb. 160ms eltérés (F=18.32;p<0.01).
– 3-4 pont között az emelkedés jelentős (F=35.71;p<0.01), de mértéke eltér a két osztályfokon (ezt a szignifikáns interakció jelzi: F=7.218;p<0.01): míg az ötödikeseknél ez 140ms, a harmadikosoknál 360ms.
– 4-5, 5-6, 6-7 pontok között az emelkedés lineáris, minden hozzáadott elem 500ms reakcióidő-növekedést eredményez (F=73.53, 50.15, 23.01;p<0.01).
– 7-8, 8-9, 9-10 pontok között csak a 8-9 között van eltérés (F=15.95;p<0.01, és F=0.01, 0.27;n.s.).

Bár a gyermekek ritkán hibáznak (összesen 30 esetben, ami 4% hibaaránynak felel meg), ennek eloszlása nem egyenletes: 1-4 elemnél egyetlen hiba sem fordul elő, a legtöbb téves válasz pedig 7-10 elemnél figyelhető meg.

A pontszámlálás feladatban az 5. osztályosok gyorsabbak, mint a 3. osztályosok (F=7,330;p<0.01), ami elsősorban a 4-6, illetve tendenciaszerűen a 7-8 ponthalmazok gyorsabb számlálásából fakad. A szubitizációs tartományban nincs különbség a csoportok válaszidejében (d=0,631; n.s.).

Összeadási tábla: Mindkét korosztálynak hasonlóan nehezedik a feladat (interakció F=2.323;n.s.): a *duplázós* összeadások a legegyszerűbbek (505ms, ill. 811ms), ezután következnek a tízes átlépést nem igénylő *könnyű* példák (808ms, ill. 1260ms), a tízes átlépést igénylő *nehéz* feladatokban pedig mindenki jelentősen lassabban válaszol (1466ms vs. 2335ms). A 3. osztályosok minden összeadás-típusnál jelentősen lassabbak (F=8.285;p<0.01), nekik több mint másfélszer annyi időre van szükségük a válaszadáshoz, mint az 5. osztályosoknak.

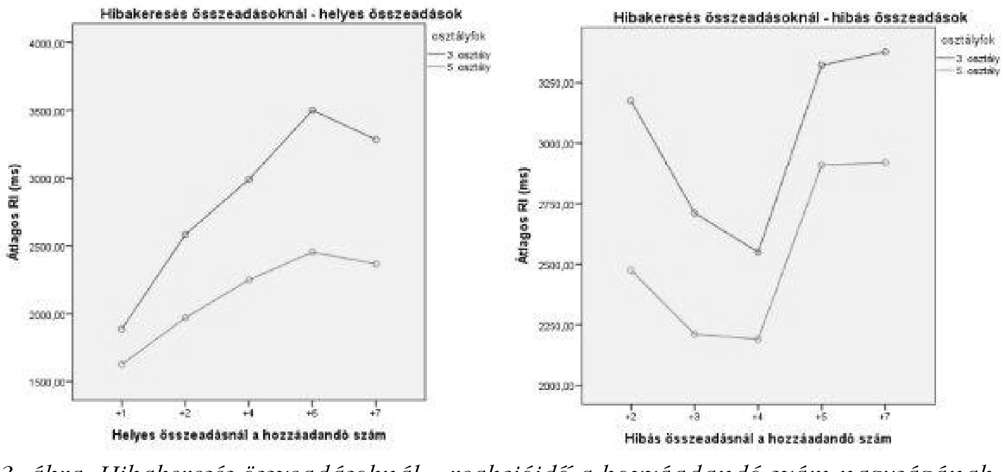


2. ábra. Összeadási tábla feladatban mért reakcióidő-mintázatok

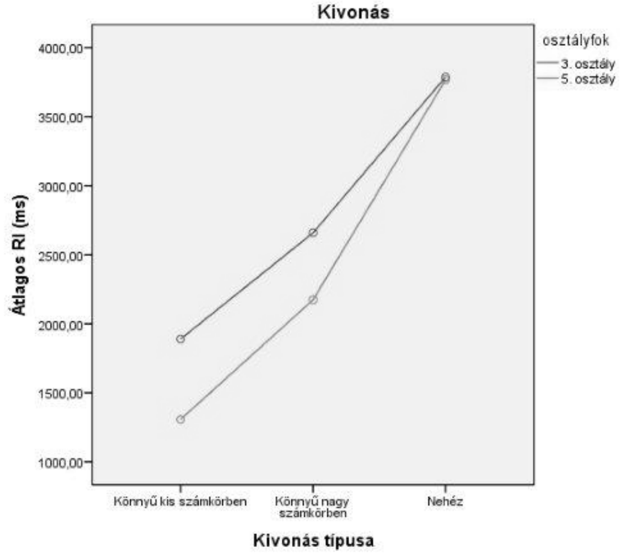
Hibakeresés összeadásoknál: bár mindkét csoportnál igen szoros korrelációt mutat a helyes és a hibás összeadások azonosításához szükséges reakcióidő (r=0.85-0.93; p<0.01), a válaszadás gyorsasága jelentősen eltér a két feladatban.

A *helyes összeadások* felismerése jelentősen könnyebb mind a 3. osztályosoknak (2911ms, ill. 3180ms; t=2.46;p<0.05), mind az 5. osztályosoknak (2140ms, ill. 2528ms; t=3.925;p<0.01). A helyes összeadásoknál a megoldási idő a *hozzáadandó nagyságával* együtt nő mindkét csoportnál (F=12,843;p<0.01). 3. osztályban a feladat megoldása általában lassabb (F=4,967;p<0.05), a +1 próba jelent csak kivételt (d=1.433;n.s.).

A *hibás összeadások* azonosítása során a hozzáadandó nagysága ugyan összefüggésben áll a reakcióidővel (F=4.99;p<0.01), de ez a kapcsolat nem lineáris, a +3 és a +4 próbák könnyebbségéből fakad (F=9.97 és F=14.35;p<0.01).



3. ábra. Hibakeresés összeadásoknál – reakcióidő a hozzáadandó szám nagyságának függvényében



4. ábra. Kivonás feladatban mért reakcióidő-mintázatok

A megadott eredmény távolsága a helyes választól nem befolyásolja a hiba felismeréséhez szükséges időt (F=1.571;n.s.). A gyermekek ugyanolyan gyorsan válaszoltak a +/-2 próbákban, mint amikor végeredmény kisebb volt a kiindulási számnál (F=2.33;n.s.), és gyorsabban, mint nagy távolság (+/-6) esetén (F=4.51;p<0.05), illetve mint amikor a +/-1 feltételnél a párossági szabály megszegése segítette a válaszadást (F=3.69;p<0.1).

A 3. és az 5. osztályosok reakcióidő-mintázatában nincs eltérés (interakció F=0.204;n.s.), az ötödikesek 700ms körüli előnye a +/-1 próba kivételével jelentősnek mondható, vagyis a két csoport között van különbség (F=8.55;p<0.01).

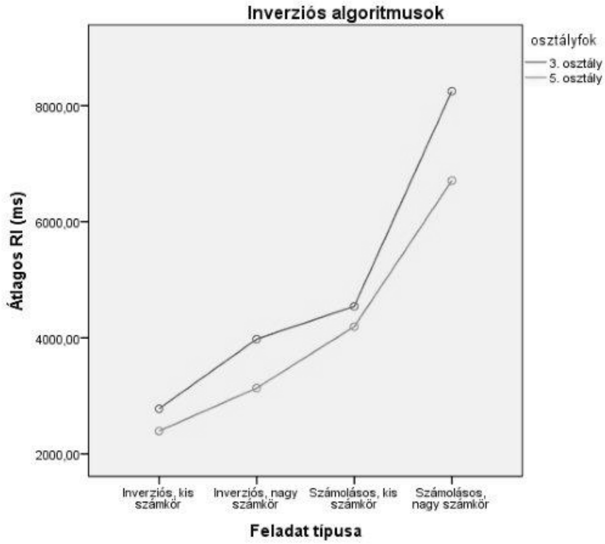
Kivonás: Az 5. osztályosok előnye az *egyjegyű számokkal végzett könnyű* kivonásokra korlátozódik, de ez is csak tendenciaszerű eredmény (1306ms, ill. 1888ms; U=107;p<0.1). *Nagyobb számkörben* jelentősen lassabban számolnak a gyermekek mindkét korosztályban (2173ms, ill. 2658ms), ennek eltérése nem szignifikáns (d=1,479;n.s.). A tízes átlépés a *nehéz* kivonások megoldása során tovább nehezíti a feladatot és 3780ms körüli reakcióidőt eredményez a gyermekeknél (3766ms, ill. 3786ms; d=0,370;n.s.). Érdemes itt újra megjegyezni, hogy az ötödikesek ebben több hibát vétettek, mint a harmadikosok *(lásd 4. ábra).*

Pótlás és bontás: Első lépésben összevontuk a tízes átlépést nem *igénylő könnyű* feladatokat a *pótlás/bontás tízre* példákkal, mert ezek megoldási ideje teljesen azonos volt. A *tízes átlépés* azonban jelentősen megnehezíti a feladatot, lelassítja a válaszadást (F=90,689;p<0.01), különösen a 3. osztályosok számára (interakció F=7,194;p<0.01).

A könnyű próbákban megegyezik a két csoport teljesítménye (1447ms, ill. 1653ms; d=1.454; n.s.), míg a nehéz pótlás/bontás terén szignifikáns eltérés mutatkozik az ötödikesek javára (2384ms, ill. 3294ms; d=2.561; p<0.05).

Inverziós algoritmusok: A gyermekek többsége (70–80%) felismerte, és alkalmazta az *inverzió elvét* a feladat megoldása során[25], ebben nincs különbség a két korosztály között (Khi^2=0.473;n.s.).

25 A feladat befejezése után erre direkt rákérdeztünk: *Volt olyan, ahol nem számoltál? Mi volt a szabály?*



5. ábra. Inverziós algoritmusok feladatban mért reakcióidő-mintázatok

Összehasonlítottuk az inverzió elvét felismerő (26 fő) és nem felismerő gyermekek (9 fő) hibaszámát mindkét feladattípusban, és ugyan ebben nem mutatkozott szignifikáns eltérés (az inverziós feladatokban 0.11, ill. 0.67; U=75.5;n.s., a számolásos feladatokban 0.81, ill. 1.33; U=81.5;n.s.), de csak az inverzió elvét nem felismerők között fordult elő A+A-B=A típusú hiba.

A reakcióidő-elemzések egyértelműen azt mutatják, hogy az inverzió elvét felismerő gyermekek a szabályt alkalmazzák az inverziós példákban, ami jelentősen lerövidíti válaszadási idejüket (2837ms, ill. 5943ms; Z=3.888;p<0.01), főleg nagyobb számkörben (3375ms, ill. 7500ms; Z=3.458;p<0.01). A másik csoportnál nincs különbség az inverziós és a számolásos feladatok reakcióidejében egyik számkörben sem (4102ms, ill. 5260ms; Z=1.481;n.s.), vagyis mindig számolással oldották meg a feladatot.

Mindezzel egybecseng, hogy az inverziós példákban azonos a két évfolyam reakcióideje (2995ms, ill. 3266ms; U=154;n.s.), míg a számolásos feladatokban tendenciaszerűen gyorsabbak az 5. osztályosok (5350ms, ill. 6528ms; d=1,938;p<0.1). Fontos kiemelni, hogy csak a nagyobb számkörben könnyebb a műveletvégzés az ötödikeseknek (6704ms, ill. 8246ms; d=2,353;p<0.05), az egyjegyű számoknál nincs eltérés a csoportok között (4190ms, ill. 4540ms; d=0,711;n.s.).

Párossági ítélet: Az egyjegyű számok párosságának megítélése könnyű feladatnak számít a reakcióidő adatok alapján, átlagosan még 1 másodpercre sincs szüksége a gyermekeknek a döntés meghozatalához, kevés hibát ejtenek (próbák 2,8%-a hibás), és a számok nagyságának nincs kimutatható hatása a reakcióidőre (F=1.045;n.s.).

Az ötödikesek teljesítménye jobb, gyorsabban adnak választ ebben a feladatban (813ms, ill. 973ms; F=4.407;p<0.05).

Az egyes feladatokban mért átlagos reakcióidők összehasonlítása alapján elmondhatjuk, hogy a vizsgálatba beválogatott elemi matematikai feladatok reakcióidő-mutatója alkalmas a 3. és az 5. osztályosok matematikai készségeiben feltételezett különbségek azonosítására (F=7.12;p<0.01; Interakció F=0.84;n.s.).

Érdemes feladattípusonként is elvégezni az elemzést, hiszen az egyes részfeladatokban eltérő stratégiát alkalmaznak a gyermekek, így ezek nehézsége nagyon különböző lehet. Az évfolyamok közötti különbség természetesen itt is megmutatkozik ($F=7.78; p<0.01$), és bár a két csoport reakcióidő-mintázata alapvetően azonosnak mondható (Interakció $F=1.49$;n.s.), néhány részfeladat nehézségi szintjében van eltérés.

RI[26] (ms)	Számolási feladat	Feltételezett stratégia
500	Egyjegyű számok megnevezése	felidézés, aszemantikus út
650	Duplázós összeadás	felidézés
750	Többjegyű számok kiolvasása	helyérték, szemantikus út
800	Pontszámlálás 1-3 elem	szubitizáció
900	Párossági információ	felidézés
1000	Könnyű összeadás	felidézés
1550	Könnyű pótlás/bontás	felidézés átfordítással?
1600	Kis számkörben könnyű kivonás	felidézés átfordítással?
1900	Nehéz összeadás	felidézés?
2400	Nagy számkörben könnyű kivonás	számolás
2550	Pontszámlálás 4-10 elem egyesével?	számlálás
2550	Hibakeresés összeadásoknál (helyes)	számolás-összevetés
2800	Hibakeresés összeadásoknál (hibás)	számolás-összevetés
2850	Nehéz pótlás/bontás	számolás (kiegészítés)
3150	Inverziós algoritmus	inverzió alkalmazása
3800	Nehéz kivonás	számolás
4400	Kis számkörben többlépéses művelet	számolás
7500	Nagy számkörben többlépéses művelet	számolás, helyérték

A szürke kiemelés jelzi, mely feladatokban mutatkozik eltérés a két csoport között.

III. Megvitatás

A megvitatásban kísérletet teszünk a reakcióidő adatokban kimutatott életkorfüggő változások értelmezésére, ami kiegészítő információk híján (pl. a viselkedés megfigyelése, utólagos beszámoló a megoldás módjáról) néhol spekulatív, de koherens keretbe foglalja szerteágazó eredményeinket.

III. 1. Számmegnevezés, számkiolvasás

Az egyjegyű számok megnevezési ideje a vizsgált gyermekeknél kb. 520 ezredmásodperc. Ez a gyorsaság megközelíti a felnőttek 455 ezredmásodperces eredményét (CHOCHON et al. 1999), amit a kutatók az fMRI adatok alapján a számok aszemantikus úton történő megnevezésével magyaráztak. Ezt itt pusztán a reakcióidő ismeretében nem állíthatjuk, de nem is cáfolhatjuk.

Hipotézisünknek megfelelően már harmadikosoknál sem mutatható ki nagysághatás, vagyis a megnevezési idő független a számok nagyságától[27], és nincs eltérés a két

26 A követhetőség kedvéért a teljes minta átlagos reakcióidejét (kerekítve) tüntettük fel a táblázatban.
27 Ellenőriztük azt is, hogy van-e olyan szám, amelynek megnevezési ideje kiugrik a többi közül (pl. a szám fokozott fonológiai nehézsége miatt, vagy mert a voice-key eltérően érzékeny a számnevek kezdőhangjaira), de nem találtunk ilyen eltérést.

életkori csoport reakcióidejében sem. Mindezek alapján azt mondhatjuk, hogy az egyjegyű számok megnevezése harmadik osztályra teljesen automatizálódott.

A többjegyű számok kiolvasásának ideje mindkét csoportnál jelentősen meghaladja az egyjegyű számok megnevezését, ami nem meglepő annak tükrében, hogy a többjegyű számok kiolvasása nem képzelhető el aszemantikus úton, hiszen nem egyszerűen egy aritmetikai tény felidézése történik. A feladat fokozatosan nehezedik, de úgy tűnik, hogy a harmadikosoknál a 3-4 jegyű számok esetében ez kifejezettebb, jobban lelassulnak és többet hibáznak, mint az ötödikesek. A tízes számrendszer megértése, a számok nyelvtanának elsajátítása még zajlik a vizsgált időszakban, csak százas számkörben beszélhetünk a számkiolvasás automatizálódásáról.

III. 3. Pontszámlálás

A pontszámlálás reakcióideje a szubitizációs (1-3) és a számlálási tartományban (4-10) blokkonként összehasonlítva jelentősen eltér, továbbá a reakcióidő görbe meredekségében és a hibák eloszlásában is mutatkozik diszkontinuitás, ami szubitizációra utal. Felmerül azonban a szubitizációs tartomány határának kérdése: a gyermekek hibátlan teljesítményének határa négynél van, és az ötödikeseknél a reakcióidő-görbe is négyig laposabb. Utóbbi életkori különbség könnyen magyarázható Gallistel–Gelman (1992) elképzelésének megfelelően: egyéni eltérések vannak abban, mikor történik váltás a preverbális számolásról a verbális számlálás stratégiájára. Lehetséges, hogy a fiatalabbak bizonytalanabbak, ezért hajlamosak már kisebb elemszámnál váltani.

A számlálási tartományban egy-egy elem hozzáadása mindkét osztályfokon kb. 500 ezredmásodperccel növeli a reakcióidőt, ami megegyezik Landerl et al. (2004) 8-9 évesekkel végzett vizsgálatának eredményével. A lineáris emelkedés megszűnik azonban hét elem után, ami valószínűleg a nyolc és a tíz elemszámú ponthalmaz elrendezéséből fakadhat: a gyermekek (részben) kettesével számlálhattak, ami gyorsítja a válaszadást.

A szubitizációs tartományban nincs életkori eltérés, 4-8 pont között azonban van[28], ami megfelel azon hipotézisünknek, mely szerint a számlálás hatékonysága kisiskoláskorban is jelentősen javul. A legnagyobb elemszámoknál a gyermekek többet hibáznak, a hibátlanul számlálók között viszont már nincs kimutatható életkori különbség.

III.4. Számtani műveletek: összeadás

Egyjegyű számok összegének megnevezése könnyű feladat mindkét vizsgált életkorban. A duplázós összeadások a legkönnyebbek, jelentősen gyorsabban (egy másodpercen belül) születnek meg a válaszok, mint ami a problémanagyság alapján várható lenne (McCloskey 1992). A tízes átlépést nem igénylő összeadások megoldási ideje is egy másodperc körüli, ami egyértelműen a válaszok direkt felidézését jelzi.

A tízes átlépést igénylő példák megoldása az előzőeknél sokkal lassabb. Ezt magyarázhatjuk problémanagyság-hatással, vagyis az összeadási tábla tényeinek nagyság mentén történő szerveződésével, a nagyobb számokkal kapcsolatos adatok hosszabb emlékezeti keresési idejével, a kevésbé gyakorolt példák rosszabb hozzáférhetőségével. A másik lehetőség, hogy fentiek miatt a gyermekek egy része bizonytalan az előhívott válasz helyességét illetően, ezért inkább kiszámolja az eredményt, vagyis a lassabb algoritmusos stratégiára vált (Siegler 1988).

28 A két csoport reakcióidő-görbéjének meredeksége megegyezik.

A két osztályfokon mért reakcióidők között jelentős eltérés van, a felidézés hatékonysága tehát javul a vizsgált időszakban. A két csoport reakcióidejének mintázata az egyes részfeladatokban teljesen azonos, amiből arra következtethetünk, hogy mindhárom feladattípusnál azonos stratégiát, vagyis felidézést alkalmaznak (a tízes átlépésnél is).

A verifikációs feladat jelentősen nehezebb, több időt vesz igénybe, mint az egyjegyű számok összeadása. A helyes eredmény felismerése gyorsabb, mint a helytelenek elutasítása, ami megfelel a korábbi kutatások tapasztalatainak (Ashcraft–Stazyk 1981; Campbell–Fugelsang 2001). A válaszadáshoz a gyermekek valószínűleg a számolás-összevetés stratégiát alkalmazzák, erre utal, hogy a reakcióidő a hozzáadandó szám nagyságával arányosan nő. Az ötödikesek jobb teljesítményének magyarázata, hogy feltehetően gyorsabban számolnak (kivéve a +1 példát).

A helytelen összeadások terén kapott reakcióidő-mintázat első pillantásra nehezen értelmezhető. A számolás-összevetés stratégia alkalmazása ellen szól, hogy a reakcióidő nem nő a hozzáadandó szám nagyságával. A plauzibilitási stratégia használata sem nyert azonban megerősítést, hiszen közelítő becslés esetén a helyes eredménytől való nagyobb távolságnál gyorsabban kellett volna válaszolni, mint közeli rossz válasz esetén. Az összeadás párossági szabályát megszegő rossz választ sem azonosítják gyorsabban a gyermekek.

Ez a zavaros kép fakadhat a két stratégia 'vegyes' alkalmazásából, de ezzel nehezen összeegyeztethető, hogy a két életkori csoport reakcióidő-mintázata teljesen azonos. Megvizsgáljuk azonban a +3 és a +4 példákat – melyekben jelentősen gyorsabban válaszolnak a gyermekek – azt látjuk, hogy ezek között szerepel egy-egy duplázós jellegű feladat (13+3, 14+4), amiben számolás helyett felidézés alapú stratégia használata segíthette a gyors megoldást.

Összességében úgy tűnik, hogy a harmadikos és az ötödikes gyermekek egyaránt a számolás/felidézés-összevetés stratégiát alkalmazzák mindkét részfeladatban, aminek hatékonysága jobb a magasabb osztályfokon. Párhuzamos becslésre, illetve a párossági információ figyelembe vételére nem utalnak az adatok. Ennek egyik lehetséges magyarázata, hogy nem elég nehéz a húszas számkörön belüli összeadás a gyermekeknek.

III.5. Számtani műveletek: kivonás, pótlás, bontás

Az egyjegyű számokkal végzett fenti műveletek megoldása során úgy tűnik, hogy a gyermekek az algoritmusos stratégia helyett inkább az összeadási tábla tényeire támaszkodnak. Első lépésként le kell fordítani a bemutatott példát az összeadási tábla adatainak megfelelő formátumra, ezután kerül felidézésre az eredmény. A gyermekek reakcióideje ezért lehet nagyobb, mint az egyszerű összeadásoknál. Az ötödikesek előnye itt már nem mutatkozik meg, vagyis az összeadástól eltérően ezekben a feladatokban a két életkori csoport teljesítménye azonos.

Nagyobb számkörben – akkor is, ha nem szükséges tízes átlépés a megoldáshoz – a kivonás mindkét csoportnak jelentős nehézséget okoz: a fejben történő kivonás algoritmusának alkalmazása lassú, az ötödikeseknél különösen bizonytalan, talán mert ők inkább az írásbeli kivonás eljárásában gyakorlottak.[29]

A két csoport teljesítménye a kis számkörben végzett, tízes átlépést igénylő pótlás/bontás terén tér el jelentősen, az ötödikesek közel egy másodperccel gyorsabban

29 Több ötödik osztályos jelezte is a v.v.-nek, hogy csak papíron tudja kiszámolni az eredményt.

számolnak. Valószínűleg ez abból fakad, hogy a példákat kiegészítéssel oldják meg (nem kivonással), és ennek kivitelezésében hatékonyabbak.

Az összeadás és a kivonás műveletének fogalmi megértését tükrözi az inverzió elvének alkalmazása az A+B-B típusú feladatokban, ami – mindkét vizsgált korosztályban – a gyermekek 70–80%-ára jellemző. Rákérdezésre ők részben vagy egészben explicitté tudták tenni az alkalmazott szabályt (pl. *„ott nem kell számolni, ahol a plusz és a mínusz kiüti egymást"*), de a magyarázatokból nem mindig derül ki, hogy az alacsonyabb színvonalú *identitás alapú inverzió* (ha hozzáadunk, majd elveszünk belőle *ugyanaz* marad), vagy az absztraktabb *kvantitatív inverzió* (ha hozzáadunk, majd elveszünk belőle *ugyanannyi* marad) elvének a felismerése áll a teljesítmény mögött (Bryant et al. 1999).

Sem az inverziót alkalmazók arányában, sem az inverziós példák megoldási sebességében nincs különbség a két életkor között, vagyis az inverzió szabályát ugyanolyan hatékonyan alkalmazzák.

A kétlépéses műveletvégzés a legnehezebb, leghosszabb időt igénybe vevő feladat már egyjegyű számokkal is (az átlagos reakcióidő a 4 másodpercet is meghaladta). Hipotézisünkkel ellentétben sem a reakcióidő, sem a hibázás terén nem találtunk életkori eltérést a kisebb számkörben. Kétjegyű számokkal viszont a harmadikosok jelentősen lassabban végzik a műveleteket, ebben a számkörben kevésbé járatosan mozognak. A többjegyű számok összeadása és kivonása (főleg több lépésben) a számok automatikus kiolvasását és a helyérték biztos ismeretét is feltételezi a műveletek végrehajtása mellett, ami a harmadikosoknál – a számok kiolvasása feladat tanulsága alapján – még nem alakult ki.

III.6. Párossági ítélet

Az egyjegyű számok párosságának megítélése már a harmadikosoknál is gyors (egy másodpercet sem vesz igénybe), pontos, és a reakcióidő nem nő a számok nagyságával. Mindebből arra következethetünk, hogy a vizsgált gyermekek direkt felidézéssel dolgoztak, a párosság megítélése harmadik osztályra már automatizálódott. Ennek ellenére van különbség a harmadikosok és az ötödikesek reakcióideje között, vagyis az összeadási tábla tényeihez hasonlóan a párossági információ előhívása is hatékonyabbá válik a fejlődés ezen időszakában. Ezt elsősorban a gyakorlással, és ezen keresztül az asszociációs kapcsolatok erősebbé válásával, az aritmetikai tények jobb hozzáférhetőségével – mind a verbális, mind az arab számok rendszerében – magyarázhatjuk.

III. 7. Összegezés

Keresztmetszeti vizsgálatunk eredményei szerint a munkacsoportunk által kidolgozott feladatok alkalmasak lehetnek a számolási képességek differenciált mérésére kisiskolás korban. A teljesítmény legfontosabb mutatója ezekben a bázisképességeket mérő feladatokban a reakcióidő, melyet ezredmásodperces pontossággal szükséges rögzíteni. A vizsgált életkorban fejlődés figyelhető meg 1) a számlálás hatékonyságában, 2) a tízes számrendszer megértésében, ami lehetővé teszi a százas számkörön túl a többjegyű számok kiolvasásának automatizálódását, illetve a többjegyű számokkal való műveletvégzést, 3) az aritmetikai tények (összeadási tábla, párosság) felidézésének hatékonyságában, és 4) a húszas számkörön belül az összeadás, illetve a pótlás/bontás (kiegészítéssel) műveletének kivitelezésében.

Nem mutatkozott életkorfüggő változás a legalapvetőbb bázisképességek terén: a szubitizáció, és az egyjegyű számok megnevezése (illetve kisebb mértékben a kétjegyű számok kiolvasása) harmadik osztályra már teljesen automatizálódott. Másrészt két olyan feladatot azonosítottunk, melyek még az ötödikeseket is komoly kihívás elé állítják: a fejben történő kivonás, illetve az inverzió elvének alkalmazása. Mindkettő jelentős szemantikai elaborációt igényel.

A kutatás OTKA-támogatással (T-049345) valósult meg.

Irodalomjegyzék

ALLISTON, T.–MCCARTHY, G.–NOBRE, A.–PUCE, A.–BELGER, A. (1994): Human extrastriate visual cortex and the perception of faces, words, numbers, and colors. *Cerebral Cortex*, 4, 544–554.

ASHCRAFT, M.H. (1995): Cognitive psychology and simple arithmetic: A review and summary of new directions. *Mathematical Cognition*, 1, 3–34

ASHCRAFT, M.H.–STAZYK, E.H. (1981): Mental addition: A test of three verification models. *Memory and Cognition*, 9, 185–196.

BALAKRISHNAN, J.D.–ASHBY, F.G. (1991): Is subitizing a unique numerical ability? *Perception Psychophys*, 50, 555–564.

BERCH, D.B.–FOLEY, E.J.–HILL, R.J. (1999): Extracting parity and magnitude from arabic numerals: Developmental changes in number processing and mental representation. *Journal of Experimental Child Psychology,* 74, 286–308.

BRYANT, P.–CHRISTIE, C.–RENDU, A. (1999): Children's understanding of the relation between addition and subtraction: Inversion, identity, and decomposition. *Journal of Experimental Child Psychology*, 74, 194–212.

BUTTERWORTH, B. (1999): *The mathematical brain.* Macmillan, London.

BUTTERWORTH, B.–ZORZI, M.–GIRELLI, L.–JONCKHEERE, A.R. (2001): Storage and retrieval of addition facts: The role of number comparison. *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 54A, 1005–1029.

CAMOS, V. (2003): Counting strategies from 5 years to adulthood: adaptation to structural features. *European Journal of Psychology of Education,* 18(3), 251–265.

CAMPBELL, J.I.D.–FUGELSANG, J. (2001): Strategy choice for arithmetic verification: effects of numerical surface form. *Cognition*, 80, 21–30.

CHOCHON, F.–COHEN, L.–VAN DE MOORTELE, P.F.–DEHAENE, S. (1999): Differential contributions of the left and right inferior parietal lobules to number processing. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 11, 617–630.

DEHAENE, S. (1992): Varieties of numerical abilities. *Cognition*, 44, 1–42.

DEHAENE, S. (1995): Electrophysiological evidence for category-specific word processing in the normal human brain. *NeuroReport*, 6, 2153–2157.

DEHAENE, S. (2003): *A számérzék: miként alkotja meg az elme a matematikát?* Osiris Kiadó, Budapest.

DEHAENE, S. (2004): The neural bases of subliminal priming. In KANWISHER, N.–DUNCAN, J. (eds): *Functional neuroimaging of visual cognition: Attention and performance XX.* Oxford University Press, Oxford. 205–224.

DEHAENE, S.–BOSSINI, S.–GIRAUX, P. (1993): The mental representation of parity and number magnitude. *Journal of Experimental Psychology: General*, 122, 371–396.

DEHAENE, S.–COHEN, L. (1991): Two mental calculation systems: A case study of severe acalculia with preserved approximation. *Neuropsychologia*, 29, 1045–1074.

Dehaene, S.–Cohen, L. (1994): Dissociable mechanisms of subitizing and counting: neuropsychological evidence from simultanagnosic patients. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance,* 20, 958–975.

Dehaene, S.–Cohen, L. (1997): Cerebral pathways for calculation: Double dissociation between rote verbal and quantitative knowledge of arithmetic. *Cortex*, 33, 219–250.

Dehaene, S.–Mehler, J. (1992): Cross-linguistic regularities in the frequency of number words. *Cognition*, 43, 1-29.

De Rammelaere, S.–Stuyven, E.–Vandierendonck, A. (2001): Verifying simple arithmetic sums and products: Are the phonological loop and the central executive involved? *Memory and Cognition*, 29, 267–273.

Fuson, K.C. (1992): Research on whole number addition and subtraction. In Grouws, D. (ed.): *Handbook of research on mathematics teaching and learning.* Macmillan, New York. 243–275.

Fuson, K.C.–Burghardt, B.H. (2003): Multi-digit addition and subtraction methods invented in small groups and teacher support of problem solving and reflection. In Baroody, A.J.–Dowker, A. (eds): *The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise.* Erlbaum, Hillsdale NJ. 267–304.

Fuson, K.C.–Kwon, Y. (1992): Learning addition and subtraction: effects of number words and other cultural tools. In Bideaud, J.–Meljac, C.–Fischer, J-P. (eds): *Pathways to number.* Erlbaum, Hillsdale NJ. 283–306.

Gallistel, C.R.–Gelman, R. (1992): Preverbal and verbal counting and computation. *Cognition*, 44, 43–74.

Geary, D.C. (1995): Reflections of evolution and culture in children's cognition: Implications for mathematical development and instruction. *American Psychologist*, 50, 24–37.

Geary, D.C. (2004): Mathematics and learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, 37, 4–15.

Geary, D.C.–Widaman, K.F. (1992): Numerical cognition: On the convergence of componential and psychometric models. *Intelligence*, 16, 47–80.

Gelman, R.–Gallistel, C.R. (1978): *The child's understanding of number.* Harvard University Press, Cambridge, MA.

Gilmore, C.K.–Bryant, P. (2006): Individual differences in children's understanding of inversion and arithmetical skill. *British Journal of Educational Psychology*, 76, 309–331

Jármi Éva (2012): Számolási képességek fejlődése óvodás- és kisiskoláskorban. *Pszichológia,* 32/4, 317–339.

Jensen, E.M.–Reese, E.P.–Reese, T.W. (1950): The subitizing and counting of visually presented fields of dots. *Journal of Psychology*, 30, 363–392.

Józsa Krisztián (2003): A számolási készség fejlesztése. In Dubiczné Mile Katalin és Farkas Istvánné (szerk.): *Az általános iskola alapozó szakaszának megújítása.* Fejér Megyei Pedagógiai Szakmai és Szakszolgáltató Intézet, Székesfehérvár. 27–44.

Kaufman, E.L.–Lord, M.W.–Reese, T.W.–Volkmann, J. (1949): The discrimination of visual number. *American Journal of Psychology,* 62, 498–525.

Kaufmann, L.–Nuerk, H-C. (2005): Numerical development: Current issues and future perspectives. *Psychology Science,* 42, 142–170.

Krajcsi Attila (2010): A numerikus képességek zavarai és diagnózisuk. *Gyógypedagógiai Szemle*, 38, 93–113.

Krueger, L.E. (1986): Why 2x2=5 looks so wrong: On the odd-even rule in product verification. *Memory and Cognition*, 14, 141–149.

Landerl, K.–Bevan, A.–Butterworth, B. (2004): Developmental dyscalculia and basic numerical capacities: A study of 8-9-year-old students. *Cognition*, 93, 99–125

Lemaire, P.–Fayol, M. (1995): When plausibility judgments supersede fact retrieval: The example of the odd-even rule effect in simple arithmetic. *Memory and Cognition*, 23, 34–48

Lemaire, P.–Siegler, R. S. (1995): Four aspects of strategic change: contributions to children's learning of multiplication. *Journal of Experimental Psychology: General,* 124(1), 83–97.

Márkus Attila (2007): *Számok, számolás, számolászavarok.* Pro Die Kiadó, Budapest.

McCloskey, M. (1992): Cognitive mechanisms in numerical processing: Evidence from acquired dyscalculia. *Cognition*, 44, 107–157.
Miller, K.–Gelman, R. (1983): The child's representation of number: A multidimensional scaling analysis. *Child Development*, 54, 1470–1479.
Moyer, R. S.–Landauer, T. K. (1967): Time required for judgments of numerical inequalities. *Nature*, 215, 1519–1520.
Piaget, J. (1952): *The child's conception of number*. Routledge & Kegan Paul, London.
Piazza, M.–Giacomini, E.–Le Bihan, D.–Dehaene, S. (2003): Single-trial classification of parallel pre-attentive and serial attentive processes using functional magnetic resonance imaging. *Proceedings of the Royal Society B Biological Sciences,* 270, 1237–1245.
Piazza, M.–Mechelli, A.–Butterworth, B.–Price, C.J. (2002): Are subitizing and counting implemented as separate or functionally overlapping processes? *Neuroimage*. 15, 435–446.
Power, R.J.D.–Dal Martello, M.F. (1990): The dictation of Italian numerals. *Language and Cognitive Processes*, 5, 237–254.
Rasmussen, C.–Ho, E.–Bisanz, J. (2003): Use of the mathematical principle of inversion in young children. *Journal of Experimental Child Psychology*, 85, 89–102.
Reynvoet, B.–Brysbaert, M.–Fias, W. (2002): Semantic priming in number naming. *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 55A, 1127–1139.
Siegler, R.S. (1988): Strategy choice procedures and the development of multiplication skill. *Journal of Experimental Psychology: General*, 117, 258–275.
Soltész Fruzsina (2010): Typical and atypical development of magnitude processing. *Ph.D. Thesis,* ELTE, Budapest.
Snodgrass, J.G.–Vanderwart, M. (1980): A Standardized Set of 260 Pictures: Norms for Name Agreement, Image Agreement, Familiarity, and Visual Complexity. *Journal of Experimental Psychology: Human Learning and Memory*. 6(2), 174–215.
Stern, E. (1992): Spontaneous use of conceptual mathematical knowledge in elementary school children. *Contemporary Educational Psychology*, 17, 266–277.
Verguts, T.–Fias, W.–Stevens, M. (2005): A model of exact small-number representation. *Psychonomic Bulletin & Review*, 12, 66–80.
Xu, F.–Spelke, E. S.–Goddard, S. (2005): Number sense in human infants. *Developmental Science*, 8, 88–101.

Függelék

A vizsgálatban alkalmazott számolási feladatok

1. Pontszámlálás: *Kis négyzetek fognak megjelenni elszórva a képernyő közepén. Mondd meg, hány kis négyzet van a képernyőn! Ne feledd, legyél minél gyorsabb!*

2 sorozat: 1-10 pont random sorrendben

2.a. Számmegnevezés – egyjegyű számok: *Most számok fognak megjelenni a képernyőn, neked pedig nincs más dolgod, csak kimondani gyorsan a nevüket!*

1-10 számjegyek random sorrendben

2.b. Tárgymegnevezés[1]: *Most tárgyakról készült rajzokat fogsz látni. Mondd meg, milyen tárgy van a képen!*

10 mindennapi tárgy sematikus rajza, random sorrendben

Céltárgy									
alma	banán	körte	citrom	kanál	csillag	olló	zokni	seprű	kulcs

2.c. Számkiolvasás – többjegyű számok: *Figyelj, most is számokat fogsz látni, csak most többjegyűeket. Olvasd ki őket!*

4 kétjegyű, 3-3 három-és négyjegyű szám, blokkonként random sorrendben

Célszám									
23	52	69	80	147	479	595	1386	1834	2600

3. Összeadó-tábla: *Most összeadásokat fogok mondani, te pedig mondd meg gyorsan a végeredményt!*

12 összeadás verbális bemutatása (v.v. olvassa), rögzített sorrendben
3 'duplázás' (pl. 2+2), 5 'könnyű' összeadás, 4 'nehéz' összeadás[2]

A diktált összeadások											
2+6	7+9	2+2	6+3	8+7	9+1	4+2	5+8	6+6	3+4	9+5	8+8

4. Kivonás: *Most kivonások végeredményét kell megmondanod, amit a képernyőn láthatsz majd!*

6 kivonás random sorrendben
2 'könnyű' kivonás kis számkörben, 2 'könnyű' kivonás nagy számkörben, 2 'nehéz' kivonás

A látott kivonás					
6-1	8-5	57-4	78-50	14-6	64-8

5. Pótlás és Bontás: *Most pótlások lesznek, azaz az összeadásból hiányzik az egyik tag. Mondd meg, melyik szám való oda! – Most bontások lesznek, vagyis a kivonásból hiányzik az egyik tag. Mondd meg, melyik szám való oda!*

3-3 pótlás és bontás, a műveletek sorrendje is random, és ezen belül a feladatoké is
2 'könnyű' pótlás/bontás, 2 pótlás/bontás 10-re, 2 'nehéz' pótlás/bontás

A látott pótlás			A látott bontás		
4+ =6	3+ =10	8+ =13	5- =2	15- =10	11- =7

1 Ez természetesen nem számolási, hanem gyorsasági feladat, de ebben a sorrendben mutattuk be a feladatokat.
2 A 'könnyű' feladatok tízes átlépést nem igényelnek, a 'nehéz' feladatok viszont igen. Ezt a további műveletek esetében is így nevezzük.

6. Inverziós algoritmusok: *Figyelj, egy csalafinta feladat következik! Olyan műveleteket fogsz látni, amiben mindig van egy összeadás és egy kivonás. Mondd meg a végeredményt, DE LÉGY RÉSEN, MERT VANNAK OLYAN PÉLDÁK, AHOL NEM KELL ELVÉGEZNED A MŰVELETEKET, AKKOR IS TUDOD A VÉGEREDMÉNYT!* (Próba végén) *Volt olyan, ahol nem számoltál? Mi volt a szabály?*

4-4 inverziós (A+B-B) és a számolást igénylő, az eredmény szerint illesztett (A+A-B) feladat, random sorrendben
2-2 inverziós/számolásos feladat kis számkörben, 2-2 inverziós/számolásos feladat nagy számkörben

GYAKORLÁS	A+B-B típusú műveletek			
6+1-1 5+3-3 9+4-4	8+6-6	3+7-7	22+17-17	27+15-15
	A+A-B típusú műveletek (helyes válasz)			
	5+5-2 (8)	6+6-9 (3)	13+13-4 (22)	16+16-5 (27)

7. Hibakeresés összeadásoknál: *Megint összeadásokat fogsz látni, de a végeredményükkel együtt. Neked csak el kell dönteni, hogy jó-e az eredmény, vagy rossz. Ha helyes, akkor nyomd meg ezt a gombot* (jobbik kezének mutatóujja az 'A/Á' gombon[3]), *ha helytelen/rossz a megoldás, akkor nyomd meg ezt* (másik mutatóujj az ellenkező oldalon).

16 'könnyű' összeadás (összeg 13-19 között), random sorrendben
8-8 hibás és helyes összeadás az eredmény mentén illesztve, a hozzáadandó 1-7 között változik, a helyes választól való eltérés 1/2/6

		Hibás összeadás	Helyes összeadás
+/-1 (párosság)	Páros-páros	14+4=19	15+4=19
	Páratlan-páratlan	13+5=17	12+5=17
	Páros-páratlan	16+3=18	16+2=18
+/-2 (kis távolság)	+2	13+3=18	11+7=18
	-2	14+5=17	13+4=17
+/-6 (nagy távolság)	+6	11+2=19	13+6=19
	-6	12+7=13	11+2=13
végeredmény kisebb		17+2=14	13+1=14

8. Párossági ítélet: *Most az lesz a dolgod, hogy eldöntsd, a szám páros-e, vagy páratlan. Ha páros, akkor nyomd meg ezt a gombot* (mutatóujj az 'A/Á' gombon[4]), *ha páratlan, akkor ezt* (másik mutatóujj az ellenkező oldalon), *tehát a ...kéz a páros, a ...kéz a páratlan. Lesz néhány gyakorlás, hogy megszokd, hogy a ...kéz a páros, a ...kéz a páratlan.*

2 sorozat: 1-10 számjegyek random sorrendben
Csak a 2. sorozat válaszait dolgoztuk fel, az 1. sorozat gyakorlás volt.

3 A v.sz.-ek felénél a *helyes* válasz a bal, a másik felénél a jobb oldalon volt.
4 A v.sz.-ek felénél a *páros* válasz a jobb, a másik felénél a bal oldalon volt.