

**CERTAIN PROBLEMS OF SEISMIC AND ULTRASONIC  
WAVE PROPAGATION IN A MEDIUM WITH  
INHOMOGENETIES OF RANDOM DISTRIBUTION**

G. KORVIN\*

**Introduction**

Inhomogeneity is a basic property of almost every real medium. If vibrated, inhomogeneities cause scattering of waves. The scattered waves are superimposed on the primary waves and lead to amplitude and phase fluctuations in the observed wave pattern. It is reasonable to assume that the best part of the noise structure of, say, a seismic record can be attributed to velocity inhomogeneities of the medium of propagation. If we could find the statistical laws which govern the cause-and-effect relation between the inhomogeneous medium and the incoherent seismic wave field there would be a slight hope to solve also the inverse problem in which theory and seismic observation must be combined to ascertain certain basic properties of the medium.

In this paper it is intended to present, at the first place, a simplified treatment of the theory of random fields. We shall review the theory of stochastic processes and then introduce random fields as natural generalizations of random functions. This will give us a convenient framework to construct, in the next section, a mathematically clear and also physically suggestive model of the local inhomogeneities of velocity distributions in real media.

It will be assumed throughout these pages that the characteristic dimension of inhomogeneities is less than the wavelength applied. Although our principal interest will be in seismic applications, the above assumption will give us an excuse to transform most of our conclusions into terms of ultrasonic waves. (As a matter of fact, the author's interest in a statistical treatment began with a desire to explain SHUMWAY'S (1960) fascinating bell-shaped curve describing absorption vs. porosity dependence in marine sediments, for ultrasonic frequencies.)

After the introductory discussions we shall turn in the next sections to a systematic use of the mathematical techniques. We shall first proceed to a treatment of the fluctuation of transit times in a randomly inhomogeneous medium. This fluctuation will be found to depend, besides the length of the path travelled, on the correlation properties of the medium. As a particular case of the general relation we shall re-derive WYLLIE'S (1956) famous time-average equation and we shall propose an explanation for an interesting discrepancy reported in connection with the analysis of deviations between conventional and continuous velocity loggings in wells. Next we shall turn our attention to the problem of reflection coefficients. Here, we shall show that while the usual assumption made in deconvolution routines—that the series of reflection coefficients is a white-noise—could be seriously

\* ELGI, Budapest  
Manuscript received: 22. 5. 1972

objected, the more realistic empirical autocorrelation function of reflection coefficients found by O'DOHERTY and ANSTEY (1971) can be very well explained within the scope of our theory.

Reflection coefficients naturally lead us to the field of synthetic seismograms where the point seems to be how to use them and not how to compute them. We shall propose a novel approach to acoustic logs in seismic prospecting: if they were considered as a piece of information on the statistics of a stack of layers of random acoustic impedances it will be shown what kind of *statistical inferences* could be made as regards waves reflected by and transmitted through this stack of layers. Reformulating these results in terms of ultrasonic measurements we shall find that the interesting absorption vs. porosity relation reported by SHUMWAY (*op. cit.*) and also some recent experimental findings of DATTA (1968) fit very well in our probabilistic pattern.

The applications, we are going to deal with, should serve to illustrate that the statistical approach to seismic wave propagation problems is as powerful a technique as it has already proved to be in radiophysics and hydroacoustics.

In the present paper we shall concentrate on the one-dimensional model of wave propagation, even though we realize that problems of real seismic interest begin in the three-dimensional domain. We hope at a later time to extend these investigations to the three-dimensional case and tackle the intriguing problems of diffuse reflection, of the spatial- and temporal correlation of seismic ambient noise, etc., along these lines. The important case when the characteristic dimension of inhomogeneities is comparable to or greater than the wavelength will be also postponed for a subsequent paper.

It should finally be noted that there has been no effort to give an account of the historical development of the ideas on random wave propagation. References will be made only to books and papers which have a direct bearing on the text. The interested reader is referred to CHERNOV'S (1960) or TATARSKI'S (1961) monographs and to KELLER'S (1964) expository paper. Those interested in the motivation of some of the problems dealt with along these pages should consult O'DOHERTY and ANSTEY (1971).

### Stochastic processes

To make the paper as self-contained as possible we begin with a brief sketch of some basic notions and definitions concerning stochastic processes.

A *stochastic process*, say,  $\{x(t)\}_\alpha$  is defined as a family of real- (or complex-) valued functions depending on a random parameter  $\alpha$ , where the independent variable  $t$  usually plays the role of time and ranges in some interval  $[a, b]$ . A given function  $x(t)$  picked out at random from among all  $\{x(t)\}_\alpha$ -s will be termed a *realization* of the process. For some fixed value of  $t$ ,  $t_1$ , say,  $x(t_1)$  is a *random variable*, i.e. it can attain different values with the probabilities

$$F(t_1, x_1) = P[x(t_1) < x_1]. \quad (1)$$

In order to completely characterize a random function we shall need, of course, the multi-point probability functions

$$F_N(t_1, t_2, \dots, t_N; x_1, x_2, \dots, x_N) = P[x(t_1) < x_1, \dots, x(t_N) < x_N]. \quad (2)$$

If  $f$  is some arbitrary function of  $N$  variables then the *average* of the expression  $f[x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_N)]$  over the ensemble of realizations is given by

$$Mf \equiv Mf[x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_N)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_N) dF_N(t_1, \dots, t_N; x_1, \dots, x_N) \quad (3)$$

where  $x_1, x_2, \dots, x_N$  are the variables of integration, i.e. for a fixed function  $f$ ,  $Mf$  depends on  $t_1, t_2, \dots, t_N$ .

For practical purposes the following average values are often enough to characterize a random function:

$$Mx(t_1); \quad Mx^2(t_1); \quad M\{x(t_1)x(t_2)\}.$$

These quantities are termed, in turn, *mean*, *mean square value* and *autocorrelation function*. In case of complex-valued functions the autocorrelation function is defined as

$$R_{xx}(t_1, t_2) = M\{x(t_1)\overline{x(t_2)}\}$$

where the bar denotes complex conjugates.

For an arbitrary realization of a stochastic process we can take the *time-average* of a given expression defined by

$$\langle f[x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_N)] \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f[x(t+t_1), \dots, x(t+t_N)] dt. \quad (4)$$

A stochastic process  $\{x(t)\}_x$  is *stationary* if its statistical properties do not change in course of time, i.e. if

$$F_N(t_1+\tau, t_2+\tau, \dots, t_N+\tau; x_1, x_2, \dots, x_N) \equiv F_N(t_1, t_2, \dots, t_N; x_1, x_2, \dots, x_N), \quad (5)$$

This implies that for any function  $f$

$$Mf[x(t+\tau_1), \dots, x(t+\tau_N)] \equiv Mf[x(\tau_1), \dots, x(\tau_N)].$$

In particular, setting  $\tau = -t_1$ , we have

$$Mx(t_1) = Mx(0) = Mx, \\ Mx^2(t_1) = Mx^2(0) = Mx^2$$

and

$$R_{xx}(t_1, t_2) = M\{x(t_1)\overline{x(t_2)}\} = M\{x(0)\overline{x(t_2-t_1)}\} = R(|t_2-t_1|)$$

that is the mean and the mean square of a stationary process are constant throughout time while the autocorrelation function depends on the difference of its arguments alone.

A stationary process is *ergodic* if for every (measurable) function  $f$

$$P\{\langle f \rangle = Mf\} = 1 \quad (6)$$



i.e. the time-average taken for any realization agrees with the ensemble-average with probability one. In less technical terms this goes to saying that any realization picked out at random from an ergodic process passes, in course of its time-history, arbitrarily near every possible value attainable by the process. If we observe a sufficiently long, let alone infinite, period of some given outcome of an ergodic process we shall gain information on the process itself as a whole.

Let us consider the case when the Fourier-Stieltjes integral, defined by

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\varphi(\omega) \quad (7)$$

exists for every realization of a stochastic process  $\{x(t)\}_x$  where  $\varphi(\omega)$  is a complex-valued random function. If the process is stationary:

$$R(t_1, t_2) = Mx(t_1)\overline{x(t_2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp [i(\omega_1 t_1 - \omega_2 t_2)] \cdot M d\varphi(\omega_1) d\overline{\varphi(\omega_2)}.$$

Since we know that in case of stationarity  $R$  depends on  $(t_1 - t_2)$  alone, we have

$$M d\varphi(\omega_1) d\overline{\varphi(\omega_2)} = \delta(\omega_1 - \omega_2) W(\omega_1) d\omega_1 d\omega_2 \quad (8)$$

where  $\delta$  is Dirac's delta function and  $W(\omega_1) \geq 0$ . It may thus be shown that for stationary processes

$$R(t_1 - t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp [i(\omega t_1 - \omega t_2)] W(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega \tau \cdot W(\omega) d\omega = 2 \int_0^{\infty} \cos \omega \tau \cdot W(\omega) d\omega$$

the last equation being valid since  $R(\tau) = R(-\tau)$ , i.e.  $W(\omega) = W(-\omega)$ , where  $W(\omega)$  is the *power spectrum* of the given process. This means that the power spectrum of a stationary random process is always positive. We shall only cite here, without dwelling upon it, the very important Wiener-Hinchin theorem which asserts that the reversal of the above statement also holds viz.: if  $R(\tau)$  is some symmetric function whose Fourier transform is non-negative then there exist stationary processes whose autocorrelation function is  $R(\tau)$ .

Let us consider, as an important example, the function  $R(\tau) = a^2 \exp(-|\tau/\tau_0|)$ .  $R(\tau)$  is obviously symmetric and its Fourier transform is given by

$$W(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} a^2 \exp(-|\tau/\tau_0|) d\tau = \frac{a^2 \tau_0}{\pi(1 + \omega^2 \tau_0^2)}.$$

Here,  $W(\omega) \geq 0$  i.e.  $R(\tau)$  is the autocorrelation function of some stationary stochastic process. We shall show two examples for stochastic processes having this type of autocorrelation function.

a) "Random telegraph wave" (Fig. 1):  $x(t)$  assumes the values  $\pm a$  with alternating signs, alternations take place with an average frequency  $\alpha$  according to a Poisson distribution. The process is stationary, ergodic,  $Mx(t) = 0$ ,

$$R_{xx}(\tau) = a^2 \exp[-2\alpha|\tau|], \quad (9)$$

$$W(\omega) = \frac{a^2}{\pi} \frac{2\alpha}{\omega^2 + (2\alpha)^2}. \quad (10)$$

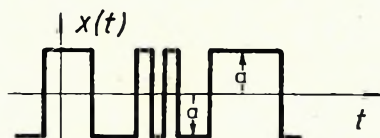


Fig. 1. Random telegraph wave after KORN and KORN

1. ábra. Véletlen táviróhullám

Рис. 1. Случайная телеграфная волна (по KORN и KORN)

b) As a second example we refer to the *Brownian motion* (Fig. 2). In the Brownian motion a particle is moving so that any component of its velocity, say the  $x$  component, changes its value at random time instants, according to a Poisson distribution of mean frequency  $\alpha$ , and assumes some new value of zero mean and  $\sigma^2$  variance independently of its previous value. In this case we have  $Mx(t) = 0$ ,

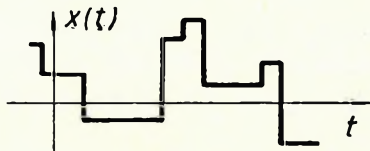


Fig. 2. The change of a velocity component of a particle making Brownian motion after KORN AND KORN

2. ábra. Brown-mozgást végző részecske egyik sebességkomponensének változása

Рис. 2. Изменение скоростной составляющей частицы, выполняющей броуновское движение (по KORN и KORN)

$$R_{xx}(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha|\tau|) \quad (11)$$

$$W(\omega) = \frac{\sigma^2}{\pi} \frac{\alpha}{\omega^2 + \alpha^2}. \quad (12)$$

Next we define the *correlation distance* as being that value of  $\tau$  for which the autocorrelation function decreases to  $\frac{1}{e}$  times its value at  $\tau = 0$ . Upon inspection of Eqs. (9) and (11) the correlation distance for the telegraph wave is  $1/2\alpha$  while for the Brownian motion it is  $1/\alpha$ .

There is an interesting inverse relation between the correlation distance and the width of the power spectrum. Taking the Brownian motion, for example, its power spectrum

formally agrees with the amplitude spectrum of the low-pass filter  $\frac{\omega_0}{\omega_0 + i\omega}$ , if we set  $\omega_0 = \alpha$ . Since this filter cuts off frequencies higher than  $\omega_0$ , the spectral content of the process is limited to the range  $[0, \omega_0]$ , i.e. the *spectral-width* is  $\Delta\omega = \omega_0 = \alpha$ . We know, on the other hand, that two consecutive values of the process become totally independent of each other after a time greater than the correlation-distance  $\frac{1}{\alpha}$ . Setting  $\Delta t = \frac{1}{\alpha}$ , we have

$$\Delta\omega \cdot \Delta t = 1.$$

This, of course, is only a special case of the *uncertainty principle* of information theory (BRILLOUIN, 1956).

A characteristic property of the autocorrelation function  $\exp[-\alpha|\tau|]$  which must be noted, is that its derivative does not exist at  $\tau = 0$ . This is due to the fact

that the random functions belonging to this autocorrelation function consist of broken lines i.e. their derivatives do not exist at certain points. The point is that, as we shall proceed to show, *if  $x(t)$  is a continuously differentiable, stationary and ergodic function, then*

$$\left. \frac{d}{d\tau} R(\tau) \right|_{\tau=0} = 0. \quad (13)$$

Indeed (cf. e.g. CHERNOV, 1960):

$$\frac{\partial}{\partial \tau} [x(t)x(t+\tau)]_{\tau=0} = x(t) \left. \frac{\partial}{\partial \tau} x(t+\tau) \right|_{\tau=0} = x(t) \left. \frac{\partial}{\partial t} x(t+\tau) \right|_{\tau=0} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} x^2(t).$$

Taking average values and making use of ergodicity,

$$\left. \frac{d}{d\tau} R(\tau) \right|_{\tau=0} = \frac{d}{d\tau} M[x(t)x(t+\tau)]_{\tau=0} = \frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \frac{d}{dt} x^2(t) dt = \frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} [x^2(t)]_{-T}^T = 0,$$

since  $x(t)$  is necessarily bounded on strength of its stationarity.

It is easy to construct exponentially decreasing autocorrelation functions which do satisfy Eq. (13). Perhaps the most simple among them is

$$R(\tau) = a^2 \exp[-(\tau/\tau_0)^2] \quad (14)$$

which is frequently used in the theory of random media. The power spectrum corresponding to Eq. (14) is

$$W(\omega) = \frac{a^2 \tau_0}{2\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{\omega^2}{4} \tau_0^2\right]. \quad (15)$$

(See Figs. 3a, 3b.)

### Homogeneous isotropic random fields\*

Let  $R$  denote the three-dimensional Euclidean space and let  $x(\mathbf{r}) = x(x, y, z)$  be a random function defined over the whole space. *Ad analogiam* to stochastic processes the totality of such random functions will be termed a *random field* while a given function picked out at random from this totality will be considered a *realization* of the field. The concepts of *homogeneity* and *isotropy* of a random field will play a key role in what follows. For reasons of space we shall define these notions only in terms of means, mean square values, and of the autocorrelation function.

A random field is *homogeneous* if its statistical properties are invariant with respect to a shift of the system of coordinates, i.e. if  $Mx(\mathbf{r}) = \text{const.}$  and for an arbitrary vector  $\mathbf{r}_0$

$$R_{xx}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = R_{xx}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_0).$$

\* For a more detailed treatment of homogeneous random fields we refer to Tatarski's (1960) monograph. For mathematically oriented readers Obukhov (1954) gives many fine details, including also a general theory of vector- and tensor-valued fields.

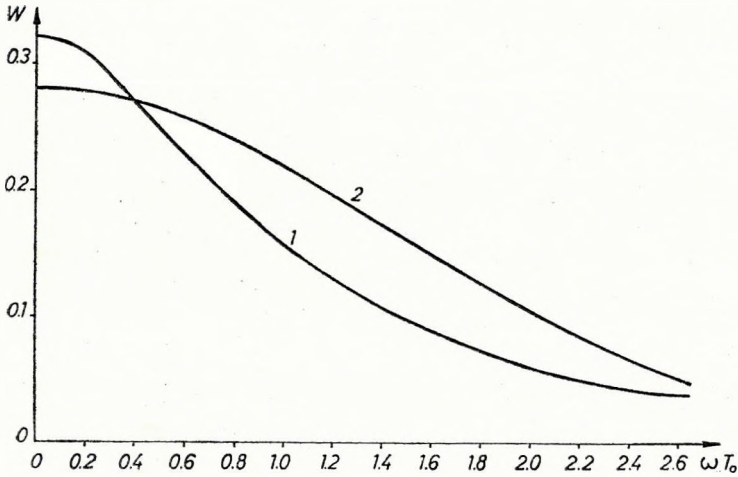
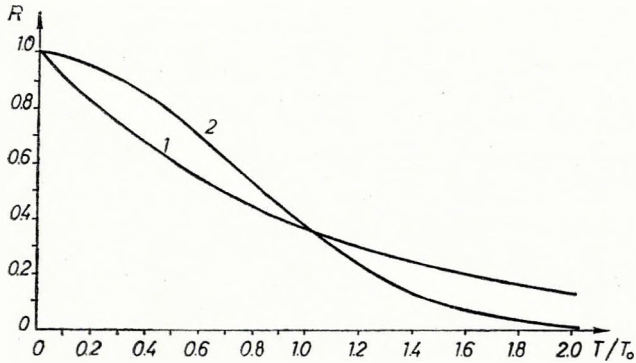


Fig. 3. Autocorrelation functions and their spectra

- a) 1. the autocorrelation function  $e^{-T/T_0}$ ;
- 2. the autocorrelation function  $e^{-(T/T_0)^2}$
- b) The corresponding power spectra after Tatarski

3. ábra. Autokorrelációs függvények és spektrumaik

- a) 1. az  $e^{-T/T_0}$  autokorrelációs függvény
- 2. az  $e^{-(T/T_0)^2}$  autokorrelációs függvény
- b) A megfelelő teljesítményspektrumok (Tatarski nyomán)

Рис. 3. Автокорреляционные функции и их спектры

- a) 1 — автокорреляционная функция  $e^{-T/T_0}$
- 2 — автокорреляционная функция  $e^{-(T/T_0)^2}$
- б) Соответствующие спектры мощности (по Татарскому)



In a homogeneous field the autocorrelation function depends on the differences  $x_1 - x_2$ ,  $y_1 - y_2$ ,  $z_1 - z_2$  alone. If, besides this, the statistical properties of the field are also invariant with respect to rotations and reflections we shall speak about a *homogeneous and isotropic* random field. In such a field the autocorrelation is a function of the magnitude of  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ , i.e.

$$R_{xx}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = R_{xx}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = R_{xx}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) = R_{xx}(r). \quad (16)$$

For example, the field with the autocorrelation function

$$R_{xx} = a^2 \exp \left\{ -[\alpha(x_1 - x_2)^2 + \beta(y_1 - y_2)^2 + \gamma(z_1 - z_2)^2]/r_0 \right\}$$

is homogeneous but not isotropic unless  $\alpha = \beta = \gamma$ .

If we observe a homogeneous isotropic field along a straight line, picked at random, of the three-dimensional space we get a one-dimensional stationary random function. (This is just what FARA and SCHEIDEGGER (1961) proposed for the statistical description of porous media. Alas, their ideas have apparently never been followed up, in ultrasonic absorption studies.)

The Fourier-Stieltjes representation of a three-dimensional homogeneous field is

$$x(r) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp [i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}] d\varphi(\boldsymbol{\kappa}_1, \boldsymbol{\kappa}_2, \boldsymbol{\kappa}_3)$$

where the multiplication sign in the exponent denotes scalar product. Because of homogeneity,

$$M d\varphi(\boldsymbol{\kappa}_1) d\overline{\varphi(\boldsymbol{\kappa}_2)} = \delta(\boldsymbol{\kappa}_1 - \boldsymbol{\kappa}_2) \Phi(\boldsymbol{\kappa}_1) d\boldsymbol{\kappa}_1 d\boldsymbol{\kappa}_2; \quad \Phi(\boldsymbol{\kappa}) \geq 0 \quad (17)$$

and the autocorrelation function becomes

$$R_{xx}(\mathbf{r}) = R_{xx}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp [i\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)] \Phi(\boldsymbol{\kappa}) d\boldsymbol{\kappa} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\boldsymbol{\kappa}\mathbf{r}) \Phi(\boldsymbol{\kappa}) d\boldsymbol{\kappa}. \quad (18)$$

Conversely, the power spectrum can be expressed as

$$\Phi(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\boldsymbol{\kappa}\mathbf{r}) R(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (19)$$

If  $x(\mathbf{r})$  is an isotropic field, its autocorrelation function depends on  $|\mathbf{r}| = r$  alone. Introducing spherical coordinates and performing integrations we are left with

$$\Phi(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{1}{(2\pi)^3 \boldsymbol{\kappa}} \int_0^{\infty} r R(r) \sin(\boldsymbol{\kappa}r) dr, \quad \text{where} \quad \boldsymbol{\kappa} = |\boldsymbol{\kappa}|. \quad (20)$$

The autocorrelation function is given, in this particular case, by

$$R(r) = \frac{4\pi}{r} \int_0^{\infty} \boldsymbol{\kappa} \Phi(\boldsymbol{\kappa}) \sin(\boldsymbol{\kappa}r) d\boldsymbol{\kappa}. \quad (21)$$



We finally note a useful relationship between the three-dimensional power spectrum  $\Phi(\kappa)$  and the one-dimensional power spectrum  $W(\kappa)$ , measured along a straight line:

$$\Phi(\kappa) = \frac{1}{2\pi\kappa} \frac{dW(\kappa)}{d\kappa}. \tag{22}$$

For example, if we find the autocorrelation function

$$R(r) = a^2 \exp \left[ -\frac{r}{r_0} \right]$$

along a line then, as we have seen, the corresponding power spectrum is

$$W(\kappa) = \frac{a^2 r_0}{\pi(1 + \kappa^2 r_0^2)}$$

which already determines the three-dimensional power spectrum as

$$\Phi(\kappa) = \frac{a^2 r}{\pi^2(1 + \kappa^2 r_0^2)^2}.$$

Before turning to the more physical aspects of the theory we have to prove a simple mathematical theorem to be used later. This theorem asserts that *for any (non-random) function  $f(t)$  and a stationary and ergodic stochastic process  $x(t)$  we have*

$$M \int_{T_1}^{T_1+T} f(\tau)x(\tau) d\tau = (Mx) \cdot \int_{T_1}^{T_1+T} f(\tau) d\tau. \tag{23}$$

Before proceeding to the proof we observe that for the particular case  $f \equiv 1$  Eq. (23) tells us, that

$$M \int_{T_1}^{T_1+T} x(\tau) d\tau = Mx \cdot T'$$

i.e.

$$M \left\{ \frac{1}{T'} \int_{T_1}^{T_1+T} x(\tau) d\tau \right\} = Mx$$

which, of course, seems evident without any special proof.

Now, in order to prove Eq. (23) we introduce an auxiliary function  $\eta(t)$  by

$$\eta(t) = \int_{T_1}^{T_1+T} f(\tau)x(t+\tau) d\tau.$$

Assuming, for the time being, that  $\eta(t)$  is stationary and ergodic, we may write, letting  $M$  denote the right-hand side of Eq. (23), that

$$M = M\eta(0) = M\eta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta} \int_0^{\Delta} \int_{T_1}^{T_1+T} f(\tau)x(t+\tau) d\tau dt =$$

$$= \int_{T_1}^{T_1+T} \left[ \lim_{\Delta \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta} \int_0^{\Delta} x(t+\tau) dt \right] f(\tau) d\tau = Mx \cdot \int_{T_1}^{T_1+T} f(\tau) d\tau.$$

We still have to show that  $\eta(t)$  is stationary. This will be done by checking that  $M\{\eta(t_1) \cdot \eta(t_2)\}$  is independent of the special choice of  $t_1, t_2$ :

$$\begin{aligned} M\{\eta(t_1)\eta(t_2)\} &= M \int_{T_1}^{T_1+T} \int_{T_1}^{T_1+T} f(\tau_1)f(\tau_2)x(t_1+\tau_1)x(t_2+\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = \\ &= \int_{T_1}^{T_1+T} \int_{T_1}^{T_1+T} f(\tau_2)f(\tau_2)k_{xx}[(t_1-t_2) + (\tau_1-\tau_2)] d\tau_1 d\tau_2, \end{aligned}$$

i.e.  $M\{\eta(t_1)\eta(t_2)\}$  is a function of the difference  $t_1 - t_2$  alone, which proves our assertion.

### Mathematical description of a medium possessing random velocity inhomogeneities

We shall be concerned with media where the local velocity of propagation shows random inhomogeneities depending on the spatial coordinates  $(x, y, z)$ . Being more explicit, it will be assumed that the local velocity  $c$  at some given point  $\mathbf{r}$  depends besides the coordinates of  $\mathbf{r}$  on a small random parameter  $\varepsilon(\mathbf{r})$  as well. Developing the velocity function in series according to ascending powers of  $\varepsilon$  it can be written as

$$c(\mathbf{r}, \varepsilon) = c_0(\mathbf{r}) + a(\mathbf{r})\varepsilon(\mathbf{r}) + b(\mathbf{r})\varepsilon^2(\mathbf{r}) + O(|\varepsilon|^3) \quad (24)$$

where  $c_0(\mathbf{r})$ ,  $a(\mathbf{r})$ ,  $b(\mathbf{r})$  are given, non-random, functions and  $\varepsilon(\mathbf{r})$  is a homogeneous random field of zero mean. The  $c_0$ ,  $a$ ,  $b$ , and  $\varepsilon$  which figure on the right-hand side of Eq. (24) are scalars, independent of the frequency of the propagating wave, that is no anisotropy resp. dispersion of velocity will be assumed.

It may appear that the general form of velocity distributions Eq. (24) is rather abstruse and difficult to grasp physically. Before proceeding further we shall cite three particular examples for velocity distributions of this type, to make the point clear.

The following three special cases of Eq. (24) seem to be the most important from the geophysical point of view:

$$c(\mathbf{r}) = c_0(\mathbf{r}) + \varepsilon(\mathbf{r}) \quad (25a)$$

$$c(\mathbf{r}) = c_0(\mathbf{r})[1 + \varepsilon(\mathbf{r})] = c_0(\mathbf{r}) + c_0(\mathbf{r})\varepsilon(\mathbf{r}) \quad (25b)$$

$$c(\mathbf{r}) = \frac{c_0(\mathbf{r})}{1 + \varepsilon(\mathbf{r})} = c_0(\mathbf{r}) - c_0(\mathbf{r})\varepsilon(\mathbf{r}) + c_0(\mathbf{r})\varepsilon^2(\mathbf{r}) + O(|\varepsilon|^3). \quad (25c)$$

Matching the coefficients of the powers of  $\varepsilon$  with the general formula (24) we have, in turn,

$$a(\mathbf{r}) = 1, \quad b(\mathbf{r}) = 0, \quad (26a)$$

$$a(\mathbf{r}) = c_0(\mathbf{r}), \quad b(\mathbf{r}) = 0, \quad (26b)$$

$$a(\mathbf{r}) = -c_0(\mathbf{r}) \quad b(\mathbf{r}) = c_0(\mathbf{r}). \quad (26c)$$

Throughout the equations (24)–(25) it has been assumed that the inhomogeneous part of the velocity,  $\varepsilon$ , is independent of the mean velocity  $c_0$ .

The literature dealing with wave propagation in random media almost unanimously accepts the velocity distribution (25c). This, of course, is due to the fact that under this assumption the wave-number  $k = \omega/c$  occurring in the wave equation assumes the form

$$k(\mathbf{r}) = k_0(\mathbf{r})[1 + \varepsilon(\mathbf{r})]$$

and the usual perturbation method can be relatively easily carried out (KELLER, 1964, KARAL and KELLER, 1964).

The velocity function (25b) arises in atmospheric physics in the description of waves in a turbulent atmosphere (TATARSKI, 1961). For, as it is well known from theoretical physics (see e.g. RAYLEIGH, 1877) the velocity of propagation in an ideal gas is proportional to the square root of absolute temperature. In case of small-scale temperature fluctuations

$$T(\mathbf{r}) = T_0 + \tau(\mathbf{r})$$

where  $\tau(\mathbf{r})$  is a random field, the local velocity is:

$$c(\mathbf{r}) = \text{const} \sqrt{T_0 + \tau} = \text{const} c_0 \left( 1 + \frac{\tau}{2T_0} \right) + O \left( \left| \frac{\tau}{2T_0} \right|^3 \right),$$

i.e. it is of the form (25b).

In seismic practice however, as we hope to illustrate below, the assumption of a velocity inhomogeneity of type (25a) seems most appropriate. KATS *et al.* (1969) refer, as to the prototype of a random stack of layers, to a sandstone interbedding in a homogeneous shaly medium from the southern margin of the Kuban basin (Fig. 4). Figure 5 presents histograms for the distribution of velocities and Fig. 6 shows the autocorrelation function of the change of velocities for this profile. The autocorrelation function is, to a fair approximation, given by

$$R(r) = \varepsilon^2 e^{-r/r_0} \quad (27)$$

where, according to the measurements of KATS *et al.* (*op. cit.*) the correlation distance is  $r_0 \approx 2\text{m}$ , the mean velocity  $c_0 = 3100 \text{ m/sec}$  and the mean deviation of inhomogeneities:

$$\varepsilon = \pm 365 \text{ m/sec.}$$

To give these empirical findings a proper interpretation and, partly, to stress the philosophy of the present paper once again we have to take recourse to the idea

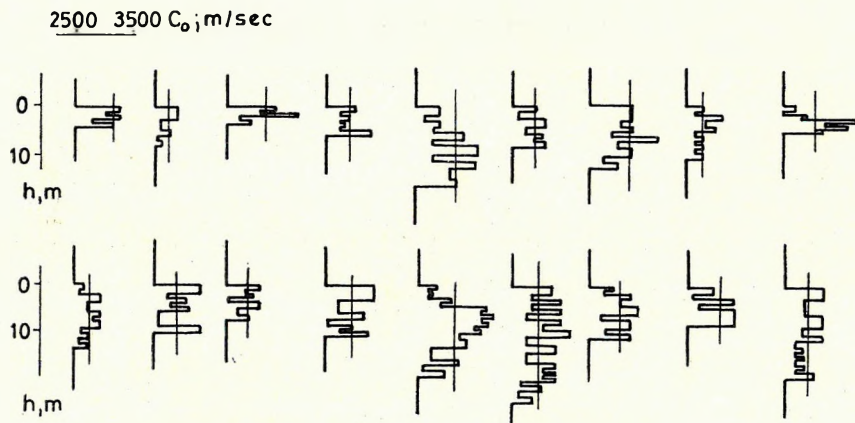


Fig. 4. Velocity distribution for a sandstone interbedding after KATS *et al.*

4. ábra. Homokkőszint sebességeloszlása (KATS *et al.* nyomán)

Рис. 4. Распределение скоростей в песчаниковом слое (по КАТС и др.)

of random fields sketched above. The functions  $c_0(\mathbf{r})$ ,  $a(\mathbf{r})$ ,  $b(\mathbf{r})$  figuring in the general formula (24) of velocity distributions depend, in seismic practice, on the single coordinate  $z$  (i.e. the depth) alone—or, more exactly, we shall limit ourselves in

what follows to that part of the space where this is the case anyway. The isotropy of the random field  $\varepsilon(\mathbf{r})$ , or course, cannot be claimed since the change of inhomogeneities is necessarily slower in the horizontal direction than in the vertical one.

Since, as mentioned, we shall limit ourselves to one-dimensional problems in the present paper, the following particular model of velocity distributions will be used (Fig. 7):

— it will be assumed that below some region A of the  $(x, y)$  plane the coefficients  $a(\mathbf{r})$ ,  $b(\mathbf{r})$ ,  $c(\mathbf{r})$  of Eq. (24) depend on the coordinate  $z$  alone, i.e. they are constant along planes parallel to  $(x, y)$ . We draw through randomly picked points  $P_1, P_2, \dots$  of region A vertical lines pointing downwards the half-space and we shall be concerned with the variation of velocities along these straight lines. The totality of velocity values obtained this way is a *stationary random process* where realizations are velocity-curves observed along the particular lines. The curves  $c_1(z)$ ,  $c_2(z)$ , etc. in Fig. 7 are exactly what a geophysicist would call acoustic logs for boreholes  $P_1, P_2, \dots$ ! The

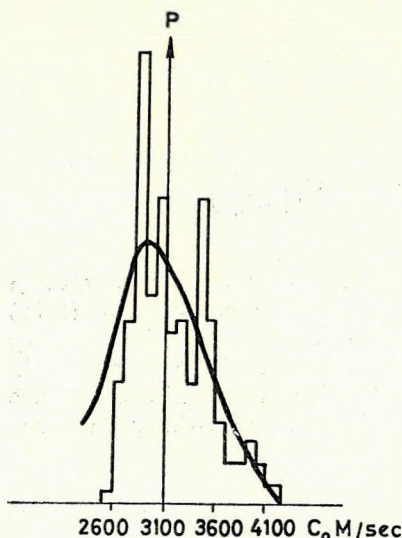


Fig. 5. Histogram of the velocity distribution of Fig. 4 after KATS *et al.*  
5. ábra. A 4. ábrán látható sebességeloszlások hisztogramja (KATS *et al.* nyomán)

Рис. 5. Гистограмма распределения скоростей, представленного на рис. 4 (по Кац и др.)



meaning of averaging a given observation  $c_1(z)$  with respect to depth or the concept of mean values over the whole process must be clear without comments.

Now, returning again to the example of KATS *et al.* (*op. cit.*): the curves presented on Fig. 4 are *different representatives* of the stochastic process describing the random variation of the velocity with depth in that particular region. The mean values,  $c_0$  and  $|\varepsilon|$ , are averages taken with respect to the totality of realizations while the autocorrelation function (27), even though it has been computed for a single realization, is characteristic to the whole area if ergodicity holds.

We finally note that this statistical concept of velocity distributions occupies a basic role in the "discriminant analysis" method of MATHIEU and RICE (1969); see also the interesting paper of DOWDS (1969).

### Statistical properties of the fluctuations of transit times

In accordance with KATS *et al.* (*op. cit.*) we shall assume a correlation distance of the order  $r_0 \approx 2 \div 5$  m. For usual seismic velocities and wavelets of 40 cps dominant frequency the wavelength applied is of the order of 50–80 metres, i.e. substantially greater than the characteristic dimension of inhomogeneities.

We shall see that there is a significant difference between the various forms of velocity distributions (25a), (25b), (25c). To show this, we compute the *mean transit time* of the wave between two given points  $P$  and  $Q$ . Because of the assumptions concerning wavelengths we may assume that the wave makes its way from  $P$  to  $Q$  along the straight line  $\overline{PQ}$ . We shall set  $P = (h_1, 0, 0)$ ,  $Q = (h_2, 0, 0)$ , where say  $h_1 < h_2$ , and assume for the time being that  $c_0(h) = c_0 = \text{const.}$  in the depth interval

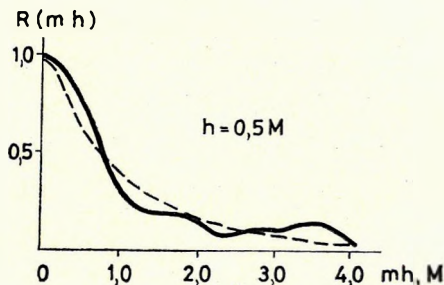


Fig. 6. Autocorrelation function of the velocity distributions shown in Fig. 4 (after KATS *et al.*)

6. ábra. A 4. ábrán látható sebességeloszlások autokorrelációs függvénye (KATS *et al.* nyomán)

Рис. 6. Автокорреляционная функция распределения скоростей, представленного на рис. 4. (по Кац и др.)

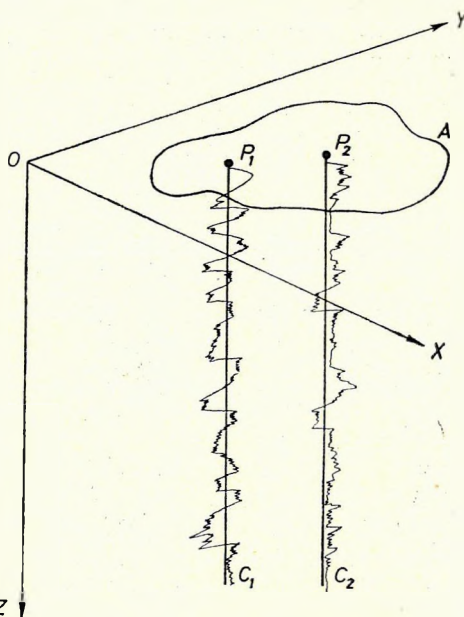


Fig. 7. The velocity model employed in this paper

7. ábra. A dolgozatban használt sebességmodell

Рис. 7. Скоростная модель, принятая в настоящей работе

$[h_1, h_2]$ . Then, by Eq. (21), letting  $T$  denote the transit time

$$T = \int_P^Q \frac{dh}{c(\mathbf{r})} = \int_{h_1}^{h_2} \frac{dh}{c_0 + a\varepsilon(h) + b\varepsilon^2(h)} = \\ = \frac{1}{c_0} \int_{h_1}^{h_2} \left\{ 1 - \frac{a\varepsilon(h) + b\varepsilon^2(h)}{c_0} + \frac{a^2\varepsilon^2(h)}{c_0^2} + O\left(\left|\frac{\varepsilon}{c_0}\right|^3\right) \right\} dh.$$

Taking average values

$$MT = T_0 \left\{ 1 + \frac{\varepsilon^2}{\Delta h} \int_{h_1}^{h_2} \left[ \frac{a^2(h)}{c_0^2} - \frac{b(h)}{c_0} \right] dh + O\left(\left|\frac{\varepsilon}{c_0}\right|^3\right) \right\} \quad (28)$$

where  $\Delta h = h_2 - h_1$  and  $T_0$  is the transit time in a space without inhomogeneities, i.e.

$$T_0 = \int_{h_1}^{h_2} \frac{dh}{c_0} = \frac{\Delta h}{c_0}.$$

For the velocity functions (25a, b, c), Eq. (28) gives, in turn, by making use of Eq. (26):

$$MT = T_0 \left[ 1 + \frac{\varepsilon^2}{\Delta h} \frac{\Delta h}{c_0^2} + O\left(\left|\frac{\varepsilon}{c_0}\right|^3\right) \right] \approx T_0 \left[ 1 + \frac{\varepsilon^2}{c_0^2} \right] \quad (29a)$$

$$MT = T_0 \left[ 1 + \frac{\varepsilon^2}{\Delta h} \cdot \Delta h \cdot \frac{c_0^2}{c_0^2} + O(|\varepsilon|^3) \right] \approx T_0 [1 + \varepsilon^2] \quad (29b)$$

$$MT = T_0 [1 + \varepsilon^2 (1 - 1) + O(|\varepsilon|^3)] \approx T_0. \quad (29c)$$

In the derivation of Eq. (28) we have utilized the fact that  $M\varepsilon = M\varepsilon^3 = 0$ , and the mathematical theorem stated as Eq. (23). The above relations are easily transformed into terms of average velocities, as:

$$Mc \approx c_0 \left( 1 - \frac{\varepsilon^2}{c_0^2} \right) \quad (30a)$$

$$Mc \approx c_0 (1 - \varepsilon^2) \quad (30b)$$

$$Mc \approx c_0. \quad (30c)$$

So, according to Eqs. (29), (30) the essential difference between the various assumptions (25a, b, c) on the distribution of velocities is, that in case (25a) and (25b) inhomogeneities slow the wave down, i.e. decrease its velocity.

If we take again, from KATS *et al.* (*op. cit.*),  $|\varepsilon| = 365$  m/sec;  $c_0 = 3100$  m/sec and assume the velocity pattern of (25a) then  $\varepsilon^2/c_0^2$  figuring in (29a) is approximately 0.01, i.e. an increase of 1% of the transit time is to be expected.

It will be instructive to see that the famous Wyllie formula (WYLLIE *et al.*, 1956) which describes the travel-time of ultrasonic waves in a porous formation can be derived as a special case of Eq. (29a).

Well, according to this formula the average time required to make a unit distance is

$$\frac{1}{c} = MT = \frac{\Phi}{c_1} + \frac{1 - \Phi}{c_2} \tag{31}$$

where  $c_1, c_2$  are fluid- and matrix-velocities, respectively, and  $\Phi$  denotes porosity. Setting  $p = \Phi, q = 1 - \Phi$ , we can write

$$MT = \frac{p}{c_1} + \frac{q}{c_2} = \frac{p}{pc_1 + qc_2 + q(c_1 - c_2)} + \frac{q}{pc_1 + qc_2 + p(c_2 - c_1)}$$

since, e.g.,

$$c_1 = pc_1 + qc_2 + c_1 - pc_1 - qc_2 = pc_1 + qc_2 + (1 - p)c_1 - qc_2 = pc_1 + qc_2 + q(c_1 - c_2).$$

Developing  $\frac{1}{c_1}$ , resp.  $\frac{1}{c_2}$  into series:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_1} &= \frac{1}{pc_1 + qc_2} \left[ 1 - \frac{q(c_1 - c_2)}{pc_1 + qc_2} + \frac{q^2(c_1 - c_2)^2}{(pc_1 + qc_2)^2} - \dots \right] \\ \frac{1}{c_2} &= \frac{1}{pc_1 + qc_2} \left[ 1 - \frac{p(c_2 - c_1)}{pc_1 + qc_2} + \frac{p^2(c_2 - c_1)^2}{(pc_1 + qc_2)^2} - \dots \right], \end{aligned}$$

i.e. the formula (31) can be re-written as

$$\begin{aligned} MT = \frac{p}{c_1} + \frac{q}{c_2} &= \frac{1}{pc_1 + qc_2} \left[ 1 + \frac{pq^2 + qp^2}{(pc_1 + qc_2)^2} (c_1 - c_2)^2 + \dots \right] = \\ &= \frac{1}{pc_1 + qc_2} \left[ 1 + \frac{pq(c_1 - c_2)^2}{(pc_1 + qc_2)^2} + \dots \right]. \end{aligned} \tag{32}$$

Let us observe, on the other hand, that for a porosity  $\Phi = p$  the mean value of the local velocity in a given point of the formation is

$$c_0 = pc_1 + qc_2; \tag{33}$$

the deviation from this value (i.e. the inhomogeneity) being:

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_1 = c_1 - c_0 = c_1 - pc_1 - qc_2 = q(c_1 - c_2) & \text{with probability } p \\ \varepsilon_2 = c_2 - c_0 = c_2 - pc_1 - qc_2 = p(c_2 - c_1) & \text{with probability } q \end{cases}$$

and, further,

$$M\varepsilon = p\varepsilon_1 + q\varepsilon_2 = 0$$

and

$$M\varepsilon^2 = p\varepsilon_1^2 + q\varepsilon_2^2 = pq(c_1 - c_2)^2. \tag{34}$$

That is to say, by Eqs. (32), (33), (34) Wyllie's formula becomes:

$$MT = \frac{p}{c_1} + \frac{q}{c_2} = \frac{1}{c_0} \left[ 1 + \frac{\varepsilon^2}{c_0^2} + O \left( \left| \frac{\varepsilon}{c_0} \right|^3 \right) \right]$$

in accordance with our general relation (29a). It should be noted that the postulations made on wavelengths are obeyed in the ultrasonic case since the wavelength applied in acoustic logging is of the order of several centimetres while the size of inhomogeneities due to the porous structure is less than one millimetre.

We shall next determine the mean square fluctuation of transit time. Dropping the terms  $O(|\varepsilon|^3)$  freely and assuming again that  $a(h)$ ,  $b(h)$ ,  $c_0(h) = \text{const.}$ , we have

$$\begin{aligned} T - MT &= \frac{1}{c_0} \int_{h_1}^{h_2} \left\{ 1 - \frac{a\varepsilon(h) + b\varepsilon^2(h)}{c_0} + \frac{a^2\varepsilon^2(h)}{c_0^2} - 1 + \frac{b}{c_0} \varepsilon^2 - \frac{a^2}{c_0^2} \varepsilon^2 \right\} dh = \\ &= - \frac{1}{c_0} \int_{h_1}^{h_2} \left\{ \frac{a}{c_0} \varepsilon(h) - [\varepsilon^2(h) - \varepsilon^2] \left[ \frac{b}{c_0} + \frac{a^2}{c_0^2} \right] \right\} dh. \end{aligned}$$

If we denote the fluctuation of transit time by  $T - MT = \Delta T_0$  and set, on strength of stationarity,  $h_1 = 0$ ,  $h_2 = \Delta h$ , we obtain

$$\begin{aligned} M(\Delta T_0^2) &= M \frac{1}{c_0^2} \int_0^{\Delta h} \int_0^{\Delta h} \frac{a^2}{c_0^2} \varepsilon(h') \varepsilon(h'') dh' dh'' + O \left( \left| \frac{\varepsilon}{c_0} \right|^3 \right) \approx \\ &\approx \frac{a^2}{c_0^4} \int_0^{\Delta h} \int_0^{\Delta h} R_{\varepsilon\varepsilon}(h' - h'') dh' dh'' \approx \frac{a^2}{c_0^4} \int_0^{\Delta h} dh' \int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx = \\ &= \frac{\Delta h \cdot a^2}{c_0^4} \int_{-\infty}^{\infty} R_{\varepsilon\varepsilon}(x) dx. \end{aligned} \quad (35)$$

We note that, at the final step of the derivation of Eq. (35) we are justified in integrating between the limits from  $-\infty$  to  $+\infty$  if the path travelled,  $\Delta h$ , is much greater than the correlation distance.

For the correlation function

$$R_{\varepsilon\varepsilon}(x) = \varepsilon^2 \exp [-(x/x_0)^2]$$

we have

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_{\varepsilon\varepsilon}(x) dx = \varepsilon^2 x_0 \sqrt{\pi},$$



i.e. for the three particular cases of velocity distribution the mean square transit time fluctuations are:

$$M(\Delta T_0^2) = \frac{\Delta h}{c_0^4} \varepsilon^2 x_0 \sqrt{\pi} \tag{36a}$$

$$M(\Delta T_0^2) = \frac{\Delta h}{c_0^2} \varepsilon^2 x_0 \sqrt{\pi} \tag{36b}$$

$$M(\Delta T_0^2) = \frac{\Delta h}{c_0} \varepsilon^2 x_0 \sqrt{\pi}. \tag{36c}$$

In case of the autocorrelation function  $R_{\varepsilon\varepsilon} = \varepsilon^2 \exp[-|x/x_0|]$  we have to insert a factor 2 instead of  $\sqrt{\pi}$  in the last formulae.

If we use again the data of KATS *et al.* (*op. cit.*)—i.e. model a,  $|\varepsilon| = 365$  m/sec,  $c_0 = 3100$  m/sec and, say,  $\Delta h = 1000$  m—and apply the autocorrelation function (27) we shall find that the mean fluctuation of transit times for a distance of 1000 metres is  $\pm 2$  msec.

The derivation of Eq. (36c) corresponding to the velocity distribution (25c) was already given by CHERNOV (1960).

In words, the essence of formulae (36) is that the mean square fluctuation of transit times in an inhomogeneous medium is proportional to the square-root of the distance travelled. This relationship seems to explain an interesting finding of GRE-TENER (1961) who analyzed the deviations between the integrated travel times computed from conventional and continuous velocity loggings in wells. The deviations found by him consisted of a systematic and a random part. The systematic deviations are likely to be ascribed to velocity dispersion (STRICK, 1971) while the random scattering was found to increase with the square root of the distance travelled by the seismic wave, in accordance with our theoretical results, Eqs. (36) (see Fig. 8).

From Eqs. (36) we immediately find the phase fluctuations  $\Delta S$ , since  $\Delta S = \omega \cdot \Delta T_0$ . This suggests that in an inhomogeneous medium seismic arrivals of higher frequencies

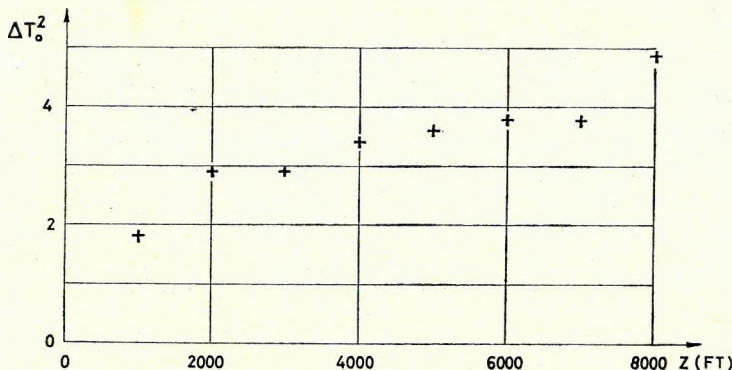


Fig. 8. The scattering of arrival times after GRE-TENER

8. ábra. Beérkezési idők szórása (GRE-TENER nyomán)

Рис. 8. Разброс времен вступления волн (по GRE-TENER)

are subject to phase fluctuations in an increased degree. This is, perhaps, the physical explanation for the success of low-frequency filters in improving the correlation of deeper horizons in seismic sections.

Let us now apply the above results for an ultrasonic wave propagating in a porous medium. For the velocity distribution (25a) and an autocorrelation function  $\varepsilon^2 \exp[-|x/x_0|]$  we have

$$M(\Delta T_0^2) = \frac{2\Delta h}{c_0^4} \varepsilon^2 x_0,$$

i.e., by Eq. (34)

$$M(\Delta T_0^2) = \frac{2\Delta h \varepsilon x_0}{\Phi c_1 + (1 - \Phi)c_2} \Phi(1 - \Phi)(c_1 - c_2)^2. \quad (37)$$

For the realistic values  $c_{\text{matrix}} = 4500$  m/sec,  $c_{\text{fluid}} = 1500$  m/sec,  $\Phi = 0.2$ ,  $x_0 = 0.001$  m,  $\Delta h = 0.85$  m, Wyllie's formula gives  $c_0 = 3900$  m/sec,  $MT = 264$   $\mu$ sec and, by Eq. (37), the fluctuation will be  $\Delta T_0 = \pm 3$   $\mu$ sec. This seems to imply that—in acoustic logging—the fluctuation of transit times is too small as to be applicable for an estimation of porosity.

Finally, we have to show how our formulae should be modified if  $c_0(\mathbf{r})$ ,  $a(\mathbf{r})$ ,  $b(\mathbf{r})$  are not constant but they do change with depth. The homogeneity of the random perturbation,  $\varepsilon(\mathbf{r})$ , will be further assumed.

In this case the mean transit time will be given by

$$\begin{aligned} MT &= M \int_{h_1}^{h_2} \frac{1}{c_0(h)} \left\{ 1 - \frac{a(h)\varepsilon(h) + b(h)\varepsilon^2(h)}{c_0(h)} + \frac{a^2(h)\varepsilon^2(h)}{c_0^2(h)} + O\left(\left|\frac{\varepsilon}{c_0}\right|^3\right) \right\} dh \approx \\ &\approx \int_{h_1}^{h_2} \frac{dh}{c_0(h)} - \varepsilon^2 \int_{h_1}^{h_2} \frac{b(h) dh}{c_0^2(h)} + \varepsilon^2 \int_{h_1}^{h_2} \frac{a^2(h) dh}{c_0^3(h)} = T_0 + \varepsilon^2 \int_{h_1}^{h_2} \left[ \frac{a^2(h)}{c_0^3(h)} - \frac{b(h)}{c_0^2(h)} \right] dh. \end{aligned}$$

For the particular velocity distributions (25a—c) this gives:

$$\text{a) } MT = T_0 + \varepsilon^2 \int_{h_1}^{h_2} \frac{d\bar{h}}{c_0^3(\bar{h})} = T_0 + \frac{\varepsilon^2}{c_0^2(\chi)} \cdot T_0 = T_0 \left( 1 + \frac{\varepsilon^2}{c_0^2(\chi)} \right) \quad (38a)$$

where  $\chi$  is some intermediate value between  $h_1$  and  $h_2$  according to the second mean-value theorem of integral calculus.

In case *b* and *c* we have

$$MT = T_0 + \varepsilon^2 \int_{h_1}^{h_2} \frac{dh}{c_0(h)} = T_0(1 + \varepsilon^2) \quad (38b)$$

$$MT = T_0 + \varepsilon^2 \int_{h_1}^{h_2} \left[ \frac{1}{c_0(h)} - \frac{1}{c_0(h)} \right] dh = T_0, \quad (38c)$$

respectively.

The mean square fluctuation of transit times, in case of non-constant mean velocities, is similarly obtained:

$$\Delta T_0 = T_0 - MT_0 = - \int_{h_1}^{h_2} \frac{1}{c_0(h)} \left\{ \frac{a(h)\varepsilon(h)}{c_0(h)} - [\varepsilon^2(h) - \varepsilon^2] \cdot \left[ \frac{b(h)}{c_0(h)} + \frac{a^2(h)}{c_0^2(h)} \right] \right\} dh.$$

So, omitting terms of  $O(|\varepsilon|^3)$ ,

$$M(\Delta T_0^2) = \int_{h_1}^{h_2} \int_{h_1}^{h_2} \frac{a(h')a(h'')}{c_0^2(h')c_0^2(h'')} R_{\varepsilon\varepsilon}(h' - h'') dh' dh'' \tag{39}$$

### The behaviour of the series of reflection coefficients in a random medium

In case of normal incidence the reflection coefficient for the interface between two layers is defined as

$$r = \frac{\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1} \tag{40}$$

As already shown by PETERSON *et al.* (1955) the right-hand side of Eq. (40) is well approximated by

$$\frac{\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1} \approx \frac{\Delta(\rho c)}{2\rho c} = \frac{1}{2} \Delta \log (\Delta \rho c), \tag{41}$$

i.e., according to the Peterson approximation the series of reflection coefficients is the logarithmic derivative of the acoustic impedance  $\log$ .

In the theory of synthetic seismograms the role of density is usually neglected. In Peterson's approximation this is equivalent to assuming that  $\rho = \text{const.}$ , or  $\rho = \text{const. } c^n$  since in this latter case  $\rho c = \text{const. } c^{n+1}$  and the single effect of density upon the logarithmic derivative is a factor of proportionality,  $(n + 1)$ .

We shall not dwell upon the role of density any more but neglect density in what follows. (Some critical comments on this question can be found in WEST, 1941).

From Eq. (41) we obtain, neglecting density, for infinitesimally thin layers:

$$\frac{c_2 - c_1}{c_2 + c_1} = \frac{c_2 - c_1}{2} \frac{\Delta h}{c_2 + c_1} \cdot \Delta h \rightarrow \frac{c'(h)}{2c(h)} dh = \frac{1}{2} \frac{d \log c(h)}{dh} \cdot dh.$$

In what follows under the term *series of reflection coefficients* we shall mean the expression

$$r(h) = \frac{1}{2} \frac{d \log c(h)}{dh} \tag{42}$$

There are many publications dealing with the statistical aspects of the distribution of reflection coefficients; see e.g. AGARD and GRAU (1961) or GOGONENKOV and ASSRYANZ (1969). It seems, however, that the vital question of their correlation properties in real media has never been systematically attacked, although this were of basic importance in deconvolution routines where it is unanimously accepted that

$$R_{rr}(k) = r^2 \delta_{k0} \quad (43)$$

(where  $\delta_{k0}$  is the Kronecker's delta function, i.e.  $\delta_{k0} = 1$  for  $k = 0$ , and zero otherwise).

As a matter of fact such a basic assumption cannot be accepted on faith, especially not if we learn from O'DOHERTY and ANSTEY (1971) that the autocorrelation function of reflection coefficients computed from *real acoustic logs* is far from satisfying Eq. (43). The theory of random media developed in the preceding sections will enable us to derive the autocorrelation function of reflection coefficients and it will completely explain the peculiar shape of this function found by O'DOHERTY and ANSTEY (*op. cit.*).

Setting, as in Eq. (42)

$$r(h) = \frac{1}{2} \frac{d \log c(h)}{dh} = \frac{1}{2} \frac{c'(h)}{c(h)} \quad (44)$$

and assuming the velocity model (25a), we have

$$\begin{aligned} r(h) &= \frac{1}{2} \frac{(c_0 + \varepsilon)'}{c_0 + \varepsilon} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon'}{c_0 + \varepsilon} = \frac{1}{2c_0} \varepsilon' \left( 1 - \frac{\varepsilon}{c_0} + O\left(\left|\frac{\varepsilon}{c_0}\right|^2\right) \right) = \\ &= \frac{\varepsilon'}{2c_0} - \frac{\varepsilon\varepsilon'}{2c_0^2} = \frac{\varepsilon'}{2c_0} - \frac{(\varepsilon^2)'}{4c_0^2} = \left[ \frac{\varepsilon}{2c_0} - \left(\frac{\varepsilon}{2c_0}\right)^2 \right]' \end{aligned} \quad (45)$$

We observe at once that the mean of the reflection coefficients is zero, for, by the boundedness of  $\varepsilon(h)$

$$\begin{aligned} Mr &= \lim_{\Delta H \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta H} \int_H^{H+\Delta H} \left[ \frac{\varepsilon(h)}{2c_0} - \left(\frac{\varepsilon(h)}{2c_0}\right)^2 \right]' dh = \\ &= \lim_{\Delta H \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta H} \left[ \frac{\varepsilon(h)}{2c_0} - \left(\frac{\varepsilon(h)}{2c_0}\right)^2 \right]_H^{H+\Delta H} = 0. \end{aligned}$$

In order to determine the autocorrelation function of reflection coefficients we introduce an auxiliary function  $\delta(h)$  by the expression

$$\delta(h) = \frac{\varepsilon(h)}{2c_0} - \left[ \frac{\varepsilon(h)}{2c_0} \right]^2 \quad (46)$$

To proceed further, we shall need the following simple mathematical theorem:

*If  $x(t)$  is a stationary and differentiable stochastic process then its autocorrelation function satisfies*

$$R_{xx'}(\tau) \equiv -R''_{xx}(\tau) \quad (47)$$



(i.e. the autocorrelation function of the derivative of a given process is  $(-1)$ -times the second derivative of the original autocorrelation function).

To prove Eq. (47) let us develop the process  $x(t)$  into a complex Fourier-series:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{i\omega_k t}. \tag{48}$$

Then we know (cf. Wiener [1950] p. 6) that

$$R_{xx}(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 e^{i\omega_k \tau}$$

whence

$$R'_{xx}(\tau) = - \sum |c_k|^2 e^{i\omega_k \tau} \cdot \omega_k^2. \tag{49}$$

If, on the other hand, we take the derivative of Eq. (48), we can write

$$\begin{aligned} R_{x'x'}(\tau) &= M \left\{ \sum_k c_k i\omega_k e^{i\omega_k t} \cdot \sum_l \bar{c}_l e^{-i\omega_l(t-\tau)} \right\} = \\ &= \sum_k \sum_l [c_k \bar{c}_l \omega_k \omega_l e^{i(\omega_k - \omega_l)\tau} \cdot M e^{i(\omega_k - \omega_l)t}]. \end{aligned}$$

Keeping in mind that

$$M e^{i(\omega_k - \omega_l)t} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{it(\omega_k - \omega_l)} dt = \begin{cases} 1 & \text{if } k = l \\ 0 & \text{if } k \neq l \end{cases}$$

we obtain

$$R_{x'x'}(\tau) = \sum_k |c_k|^2 \omega_k^2 e^{i\omega_k \tau} \tag{50}$$

which, if compared with Eq. (49) proves the validity of Eq. (47).

Returning to the autocorrelation function of reflection coefficients, it becomes, by the notation introduced in Eq. (46) and making use of (47):

$$R_{rr}(\tau) = R_{\delta'\delta'}(\tau) = -R'_{\delta\delta}(\tau) = -\frac{R'_{\epsilon\epsilon}(\tau)}{4c_0^2} + O\left(\left(\frac{\epsilon}{c_0}\right)^3\right). \tag{51}$$

Assuming again a correlation function  $R_{\epsilon\epsilon} \Rightarrow \epsilon^2 e^{-(a\tau)^2}$  (where  $\frac{1}{a} = h_0$  is the correlation distance) Eq. (51) yields

$$R'_{\epsilon\epsilon}(\tau) = 2a^2 \epsilon^2 e^{-a^2 \tau^2} [2a^2 \tau^2 - 1]$$

i.e.

$$R_{rr}(\tau) = \frac{\epsilon^2 a^2}{2c_0^2} e^{-a^2 \tau^2} [1 - 2a^2 \tau^2]. \tag{52}$$

Substituting  $\tau = 0$  we obtain the variance of reflection coefficients:

$$R_{rr}(0) = M r^2 = \frac{a^2 \epsilon^2}{2c_0^2} = \frac{\epsilon^2}{2h_0^2 a^2}, \tag{53}$$

i.e.

$$M(|r|) = \frac{|\varepsilon|}{\sqrt{2}h_0c_0} \quad (53a)$$

The theoretical expression Eq. (52) reveals the behaviour of the autocorrelation function: it becomes zero at

$$\tau^* = \frac{1}{\sqrt{2}} h_0 \quad (54)$$

and remains negative, with an exponentially decreasing envelope, afterwards. This, of course, is in a complete agreement with the empirical autocorrelation function given by O'DOHERTY and ANSTEY (*op. cit.*), (see Fig. 9). In their paper the first zero occurs for 0.0002 sec i.e., since  $c_0 \approx 4000$  m/sec, for  $\tau^* = 0.8$  m which corresponds, according to Eq. (54) to a correlation distance  $h_0 = 1.13$  m.

It has been assumed that the velocity function is differentiable. Were this not the case, let us divide the medium into layers of thickness  $\Delta h$ , and assume that on the two sides of some point of division we find velocities

$$c_1 = c_0 + \varepsilon(h - \Delta h)$$

and

$$c_2 = c_0 + \varepsilon(h + \Delta h),$$

respectively. This gives a reflection coefficient

$$r(h) = \frac{c_2 - c_1}{c_2 + c_1} = \frac{\varepsilon(h + \Delta h) - \varepsilon(h - \Delta h)}{2c_0 + \varepsilon(h - \Delta h) + \varepsilon(h + \Delta h)} =$$

$$= \frac{1}{2c_0} \left\{ [\varepsilon(h + \Delta h) - \varepsilon(h - \Delta h)] - \frac{1}{2c_0} [\varepsilon^2(h + \Delta h) - \varepsilon^2(h - \Delta h)] + O\left(\left|\frac{\varepsilon}{c_0}\right|^3\right) \right\}.$$

From this we immediately find that

$$Mr = 0$$

$$Mr^2 = \frac{1}{4c_0^2} \left\{ M[\varepsilon(h + \Delta h) - \varepsilon(h - \Delta h)]^2 + O\left(\left|\frac{\varepsilon}{c_0}\right|^3\right) \right\} \approx$$

$$\approx \frac{1}{4c_0^2} [2\varepsilon^2 - 2R_{\varepsilon\varepsilon}(2\Delta h)]. \quad (55)$$



Fig. 9. Autocorrelation function of the series of reflection coefficients after O'DOHERTY AND ANSTEY

9. ábra. Reflexiók együtthatók sorozatának autokorrelációs függvénye (O'DOHERTY és ANSTEY nyomán)

Рис. 9. Автокорреляционная функция серии коэффициентов отражения (по O'DOHERTY и ANSTEY)

0 1 2 3 ms

If  $2\Delta h \ll 1$  and, say,  $R_\varepsilon = \varepsilon^2 e^{-(h\alpha)}$  (which, according to Eq. (13) is an autocorrelation function of nondifferentiable velocity inhomogeneities!) then we have, with an accuracy of  $O(\Delta h^2)$ ,

$$M\tau^2 = \frac{\varepsilon^2 a}{c_0^2} \Delta h. \tag{56}$$

We shall finally determine the autocorrelation function of reflection coefficients in the previous approximation:

$$\begin{aligned} R_{rr}(\tau) &= M \frac{1}{4c_0^2} \left\{ [\varepsilon(h + \Delta h) - \varepsilon(h - \Delta h)][\varepsilon(h + \Delta h + \tau) - \varepsilon(h - \Delta h + \tau)] + O\left(\left(\frac{\varepsilon}{c_0}\right)^3\right) \right\} \approx \\ &\approx \frac{1}{4c_0^2} [2R_{\varepsilon\varepsilon}(\tau) - R_{\varepsilon\varepsilon}(2\Delta h + \tau) - R_{\varepsilon\varepsilon}(-2\Delta h + \tau)]. \end{aligned}$$

Writing this as

$$R_{rr}(\tau) = -\frac{1}{4c_0^2} (2\Delta h)^2 \frac{R_{\varepsilon\varepsilon}(-2\Delta h + \tau) - 2R_{\varepsilon\varepsilon}(\tau) + R_{\varepsilon\varepsilon}(2\Delta h + \tau)}{(2\Delta h)^2} \tag{57}$$

the similarity to the corresponding equation (51) becomes apparent if we recall that the right-hand side of Eq. (57) is just the usual digital approximation of the second derivative.

### Reflection and transmission of waves by a layer of random acoustic impedance

Now let us turn to the problem of determining the statistical properties of waves reflected by and transmitted through a layer with random velocity inhomogeneities.

We shall treat the case in which the layer is situated parallel to the  $(x, y)$  plane, between  $z=0$  and  $z=L$ , it contains velocity inhomogeneities

$$c = c_0 + \varepsilon(z)$$

of the type (25a), and a wave coming from the half-space  $z < 0$  is incident upon this layer. It will be also assumed that  $L$ , the thickness of the layer, is much greater than the correlation distance of inhomogeneities.

We start out from the wave equation

$$c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

where  $\varphi$  is the potential of the incident wave. Setting  $\varphi = e^{i\omega t} \cdot u(z)$  the time-independent part of the potential satisfies the reduced wave equation

$$u''(z) + \frac{\omega^2}{c^2} u(z) = 0. \tag{58}$$

If we write  $c = c_0 + \varepsilon = c_0 \left( 1 + \frac{\varepsilon}{c_0} \right) = c_0(1 + \mu)$  where we have put

$$\mu(z) = \frac{\varepsilon(z)}{c_0} \quad (59)$$

and we introduce the "average" wave-number

$$k_0 = \frac{\omega}{c_0} \quad (60)$$

the  $\frac{\omega^2}{c^2}$  factor figuring in Eq. (58) can be written as

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k_0^2 \frac{1}{(1 + \mu)^2} = k_0^2 [1 - 2\mu + 3\mu^2 + O(|\mu|^3)].$$

Inserting this into Eq. (58) the wave equation becomes

$$\left[ \frac{d^2}{dz^2} + k_0^2 \right] u(z) = -k_0^2 \delta(z) u(z) \quad (61)$$

where  $\delta(z)$  is defined, in this context, by the expression

$$\delta(z) = -2\mu(z) + 3\mu^2(z) + O(|\mu|^3). \quad (62)$$

Instead of directly solving Eq. (61) we turn to the corresponding integral equation of the Fredholm type (KAY and SILVERMAN, 1958) which reads as

$$u(z) = \exp [ik_0 z] - k_0^2 \int_0^L G(z|z') \delta(z') u(z') dz' \quad (63)$$

where the detailed form of the Green function  $G(z|z')$  is

$$G(z|z') = \frac{1}{2ik_0} \exp[ik|z - z'|]. \quad (64)$$

The solution of the integral equation (63) is given by the Neumann series

$$\begin{aligned} u(z) &= \exp [ik_0 z] + \frac{ik_0}{2} \int_0^L \exp [ik|z - z_1|] \exp [ikz_1] \delta(z_1) dz_1 - \\ &- \frac{k_0^2}{4} \int_0^L \int_0^L \exp [ik_0|z - z_1|] \exp [ik_0|z_1 - z_2|] \exp [ik_0 z_2] \delta(z_1) \delta(z_2) dz_1 dz_2 + \dots \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{ik_0}{2} \right)^n \int_0^L \int_0^L \dots \int_0^L \exp [ik_0|z - z_1|] \exp [ik_0|z_1 - z_2|] \dots \\ &\dots \exp [ik_0|z_{n-1} - z_n|] \exp [ik_0 z_n] \delta(z_1) \dots \delta(z_n) dz_1 dz_2 \dots dz_n. \end{aligned} \quad (65)$$



Following KAY and SILVERMAN (*op. cit.*) we define a *transmission function*  $T$  and *reflection function*  $R$  by the relation

$$\begin{aligned} u(z) &= T \exp [ik_0 z] && \text{if } z \geq L \\ u(z) &= \exp [ik_0 z] + R \exp [-ik_0 z] && \text{if } z < 0 \end{aligned} \quad (66)$$

A direct comparison of Eqs. (65) and (66) gives, that

$$\begin{aligned} T &= 1 + \frac{ik_0}{2} \int_0^L \delta(z_1) dz_1 - \frac{k_0^2}{4} \int_0^L \int_0^L \exp [-ik_0 z_1] \exp [ik_0 |z_1 - z_2|] \exp [ik_0 z_2] \cdot \\ &\quad \cdot \delta(z_1) \delta(z_2) dz_1 dz_2 + \dots = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{ik_0}{2}\right)^n \int_0^L \int_0^L \dots \int_0^L \exp [-ik_0 z_1] \exp [ik_0 |z_1 - z_2|] \dots \exp [ik_0 |z_{n-1} - z_n|] \cdot \\ &\quad \cdot \exp [ik_0 z_n] \delta(z_1) \delta(z_2) \dots \delta(z_n) dz_1 dz_2 \dots dz_n \end{aligned} \quad (67)$$

and, similarly,

$$\begin{aligned} R &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{ik_0}{2}\right)^n \int_0^L \int_0^L \dots \int_0^L \exp [ik_0 z_1] \exp [ik_0 |z_1 - z_2|] \dots \exp [ik_0 |z_{n-1} - z_n|] \cdot \\ &\quad \cdot \exp [ik_0 z_n] \delta(z_1) \delta(z_2) \dots \delta(z_n) dz_1 dz_2 \dots dz_n. \end{aligned} \quad (68)$$

Since we are interested in the expected value of  $|R|^2$  we multiply Eq. (68) by its complex conjugate which gives, omitting  $O(|\delta|^3)$  terms:

$$\begin{aligned} M(|R|^2) &= M(R \bar{R}) \approx \frac{k_0^2}{4} M \int_0^L \int_0^L \exp [2ik_0 z_1] \exp [-2ik_0 z_2] \delta(z_1) \delta(z_2) dz_1 dz_2 = \\ &= \frac{k_0^2}{4} \int_0^L \int_0^L \exp [-2ik_0(z_2 - z_1)] R_{\delta\delta}(z_2 - z_1) dz_1 dz_2 \approx \\ &\approx \frac{k_0^2}{4} \int_0^L dz \int_{-\infty}^{\infty} \exp [-2ik_0 x] R_{\delta\delta}(x) dx = \\ &= \frac{k_0^2 L}{4} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp [-2ik_0 x] R_{\delta\delta}(x) dx. \end{aligned} \quad (69)$$

Let us observe that the last equation in (69) is, up to a constant factor, the value of the power spectrum of the random field  $\delta(z)$  corresponding to the wave number  $2k_0$ , i.e.

$$M(|R|^2) = \frac{k_0^2 \tau L}{2} W_{\delta\delta}(2k_0). \quad (70)$$

Making use of definitions (62) and (59)

$$R_{\delta\delta} = 4R_{\mu\mu} + O(|\mu|^3) = \frac{4R_{\epsilon\epsilon}}{c_0^2} + O\left(\left|\frac{\epsilon}{c_0}\right|^3\right),$$

i.e., omitting terms of  $O\left(\left|\frac{\epsilon}{c_0}\right|^3\right)$ :

$$M(|R|^2) = \frac{2L\pi k_0^2}{c_0^2} W_{\epsilon\epsilon}(2k_0) = \frac{2L\pi\omega^2}{c_0^4} W_{\epsilon\epsilon}\left(\frac{2\omega}{c_0}\right). \quad (71)$$

For the particular form of correlation function,  $R_{\epsilon\epsilon} = \epsilon^2 \exp[-2\alpha|\tau|]$ , we have, by Eqs. (9–10)

$$W_{\epsilon\epsilon} = \frac{\epsilon^2}{\pi} \frac{2\alpha}{\omega^2 + (2\alpha)^2} \quad (72)$$

and Eq. (71) gives

$$M(|R|^2) = \frac{2L\pi\omega^2}{c_0^4} W_{\epsilon\epsilon}(2k_0) = \frac{\alpha L \epsilon^2}{c_0^2} \frac{k_0^2}{k_0^2 + \alpha^2} \quad (73)$$

where  $\alpha$  is related to the correlation distance  $h_0$  by  $\frac{1}{2\alpha} = h_0$ .

The physical meaning of the above expression of the reflection function is that waves whose frequencies are as high as to satisfy the condition

$$kh_0 \gg 1 \quad (74)$$

are almost totally reflected by the inhomogeneous layer. Recalling the "more up, less down" principle of O'DOHERTY and ANSTEY (*op. cit.*) it is natural to expect that these frequencies get seriously attenuated during propagation. Under seismic conditions, i.e. an average velocity of  $c_0 = 3000$  m/sec and correlation distance  $h_0 = 3$  m, say, this would imply a practically total absorption of waves of frequencies greater than 160 cps for a large enough path travelled.

Before making these remarks more specific we wish to point out that the estimation of the reflection operator given by Eq. (73) offers an explanation for the empirically found power spectrum of the series of reflection coefficients (see Fig. 10, after O'DOHERTY and ANSTEY, *op. cit.*) since a substantial part of reflected energy—*viz.* the primary energy—is due to the convolution of the incident wavelet by the series of reflection coefficients (PETERSON *et al.*, 1955).

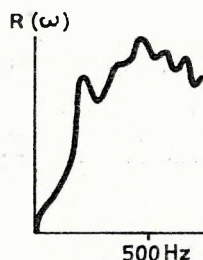
After these largely heuristic considerations we turn to the rigorous treatment of the transmission properties of random media. From Eq. (73)

$$M(|T|^2) \approx 1 - M(|R|^2) = 1 - \frac{2L\pi\omega^2}{c_0^4} W_{\epsilon\epsilon}(2k_0). \quad (75)$$

Fig. 10. Power spectrum of the series of reflection coefficients after O'DONERTY AND ANSTEY

10. ábra. Reflexiók együtthatók sorozatának teljesítményspektruma (O'DONERTY és ANSTEY nyomán)

Рис. 10. Спектр мощности коэффициентов отражения (O'DONERTY и ANSTEY)



For moderate distances this can be written as

$$M(|T|^2) \approx \exp[-M(|R|^2)] = \exp\left[-\frac{2L\pi}{c_0^4} \omega^2 W_{\epsilon\epsilon}(2k_0)\right]. \quad (76)$$

Assuming a power spectrum (72),

$$M(|T|^2) \approx \exp\left[-\frac{\alpha L \epsilon^2}{c_0^2} \frac{k_0^2}{k_0^2 + \alpha^2}\right] \quad (77)$$

The expression  $\frac{\alpha \epsilon^2}{c_0^2} \frac{k_0^2}{k_0^2 + \alpha^2}$  is the *frequency-dependent coefficient of absorption for the energy of transmitted wave*. This absorption coefficient is 0 for zero frequency, increases with  $\omega^2$  for small frequencies and becomes practically independent of frequencies in the high-frequency limit. For a fixed frequency, the following important conclusions can be drawn as regards the dependence of absorption coefficient on the parameters of the inhomogeneous medium:

The absorption coefficient is:

— proportional to  $\epsilon^2$ , i.e. to the mean square of inhomogeneities; (78a)

— inversely proportional to the square of the average velocity; (78b)

— for high enough frequencies, it is inversely proportional to the correlation distance. (78c)

Equation (76) can be easily expressed in terms of the power spectrum of the series of reflection coefficients. Indeed, as we have seen,

$$R_{rr}(\tau) = -\frac{R''_{\epsilon\epsilon}(\tau)}{4c_0^2}. \quad (51)$$

Taking the Fourier transform of this relation,

$$W_{rr}(\omega) = \frac{\omega^2 W_{\epsilon\epsilon}(\omega)}{4c_0^2}. \quad (79)$$

Inserting  $2k_0$  instead of  $\omega$  in the above relation and substituting it into Eq. (76) we obtain the basic relation

$$M(|T|^2) = \exp[-2\pi L W_{rr}(2k_0)] \quad (80)$$

which shows that *the transmission operator of an inhomogeneous layer is in a simple interrelation with the power spectrum of reflection coefficients.*

An important feature of equation (80) (or its equivalent form, Eq. (76)) is that it suggests a novel, statistical approach to the use of acoustic logs in seismic prospecting. It should be noted that expression (80) for the operator of transmission shows analogy with the formula

$$|T(\omega)| = \exp[-R(\omega)t] \quad (81)$$

derived by O'DOHERTY and ANSTEY (*op. cit.*) by means of synthetic seismogram techniques. (Following the notations of these authors, in Eq. (81)  $|T(\omega)|$  denotes the amplitude spectrum of the transmitted pulse,  $R(\omega)$  is the power spectrum of the *time-series* of reflection coefficients, and  $t$  is time).

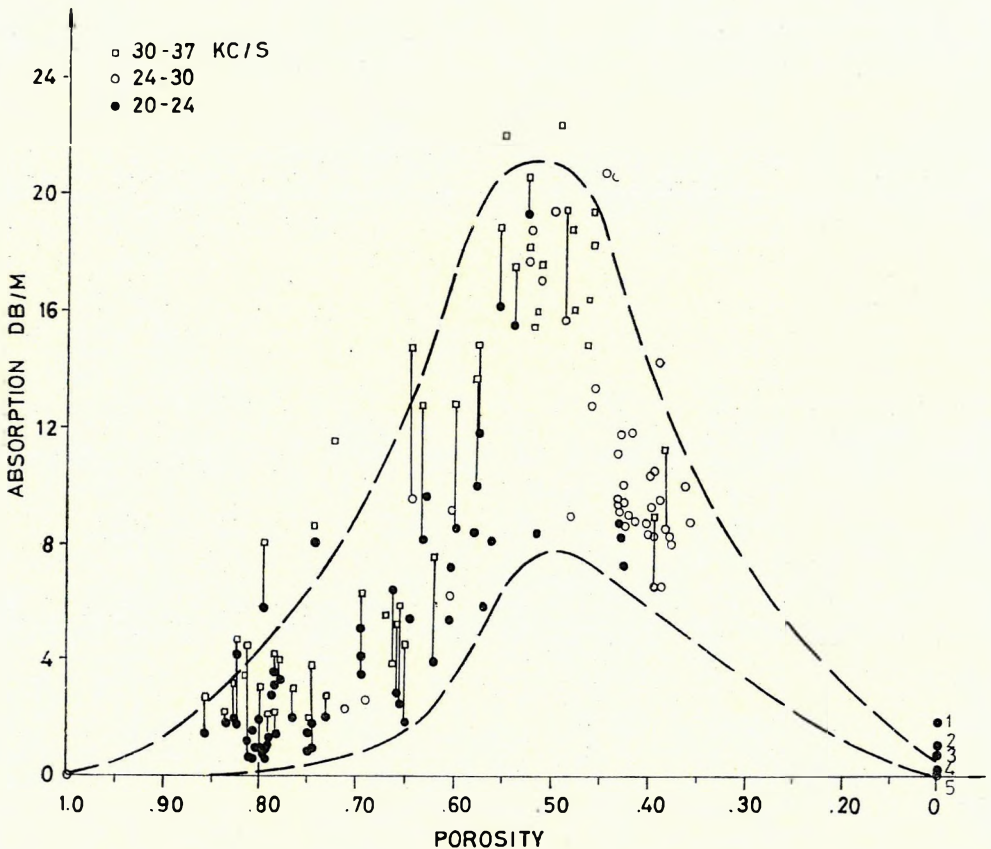


Fig. 11. Absorption coefficient vs. porosity dependence for marine sediments after SHUMWAY

11. ábra. Az abszorpciós együtthatók függése a porozitástól tengeri üledékekben (SHUMWAY nyomán)

Рис. 11. Зависимость коэффициентов поглощения от пористости в морских отложениях (по SHUMWAY)



We know from Eq. (34) that in a porous medium the variance of inhomogeneities is given by

$$\varepsilon^2 = \text{const. } \Phi(1 - \Phi),$$

and by Eq. (33), the average velocity is a monotone decreasing function of  $\Phi$ , i.e., for a porous medium Conclusions (78a, b) assert that for a fixed ultrasonic frequency the absorption coefficient is nearly proportional to  $\Phi(1 - \Phi)$  where  $\Phi$  denotes porosity. The function  $\Phi(1 - \Phi)$  is zero for  $\Phi = 0$  and  $\Phi = 1$ , and attains its maximal value at  $\Phi = 0.50$ . This is in complete agreement with SHUMWAY'S (1960) experimental findings (Fig. 11) so we can expect that at least a part of the total attenuation of ultrasonic frequencies experienced in porous media is due to the absorption mechanism sketched in this paper.

#### REFERENCES

- AGARD, J.-GRAU, G., 1961: Etude statistiques de sismogrammes. Geophysical Prospecting, IX, 4, pp. 503-525.
- BRILLOUIN, L., 1956: Science and Information Theory. Academic Press, Inc. New York.
- CHERNOV, L. A., 1960: Wave propagation in a random medium. McGraw Hill, New York-Toronto-London.
- DATTA, S., 1968: Absorption of dilatational waves in rocks. Geoprospection, VI, 3, pp. 127-139.
- O'DOHERTY, R. F.-ANSTEY, N. A., 1971: Reflections on amplitudes. Geophysical Prospecting, XIX, 3, pp. 430-458.
- DOWDS, J. P., 1969: Oil rocks: information theory: Markov chains: entropy. Quart. Colorado Sch. of Mines, LXIV, 3, pp. 275-293.
- FARA, H. D.-SCHEIDEGGER, A. E., 1961: Statistical geometry of porous media. Journal of Geoph. Research, LXVI, 10, pp. 3279-3284.
- Гогоненков, Г. Н., Асриянц, Л. Я., 1969: Статистические характеристики распределения коэффициента отражения упругих волн в реальной среде. Изв. АН СССР, Физика Земли. № 12, стр. 57-61. (Statistical characteristics of distribution of elastic waves' reflection factor in a real medium).
- GREENER, P. E. F., 1961: An analysis of the observed time discrepancies between continuous and conventional well velocity surveys. Geophysics, XXVI, 1, pp. 1-11.
- Кач, С. А.-Кондратович, Ю. В.-Исаев, В. С.-Вилкова, Э. С., 1969: Влияние случайной структуры пачки слоев на динамические характеристики отраженной волны. Прикладная геофизика, вып. 57, стр. 70-80. (Effect of a random structure of a bed member upon dynamic characteristics of the reflected wave).
- KARAL, F. C. JR.-KELLER, J. B., 1964: Elastic, electromagnetic, and other waves in a random medium. Journal of Math. Phys. V, 4, pp. 537-549.
- KAY, I.-SILVERMAN, R. A., 1958: Multiple scattering by a random number of dielectric slabs. Nuovo Cimento, IX, Serie X, Suppl. No 2, pp. 626-645.
- KELLER, J. B., 1964: Stochastic equations and wave propagation in random media. Proc. Symp. Appl. Math. XVI, pp. 145-170.
- KORN, G. A.-KORN, T. M., 1961: Mathematical Handbook for Scientists and Engineers. McGraw Hill, New York-Toronto-London.
- MATHIEU, P. G.-RICE, G. W., 1969: Multivariate analysis used in the detection of stratigraphic anomalies from seismic data. Geophysics, XXXIV, 4, pp. 507-515.
- Обухов, А. М., 1954: Статистическое описание непрерывных полей. (Statistical description of continuous fields). Труды Геоф. Инст. АН ССР, № 24 (151), стр. 3-42.
- PETERSON, R. A.-FILIPPONE, W. R.-СОКЕР, F. B., 1955: The synthesis of seismograms from well log data. Geophysics, XX, 3, pp. 516-538.
- RAYLEIGH, J. W. S., 1877: The Theory of Sound. Macmillan, London. 2nd reprint Edition: Dover, New York, 1945.

- SHUMWAY, G., 1960: Sound speed and absorption studies of marine sediments by a resonance method—Part II. *Geophysics*, XXV. 3, pp. 659–682.
- STRICK, E., 1971: An explanation of observed time discrepancies between continuous and conventional well velocity surveys. *Geophysics*, XXXVI. 2, pp. 285–295.
- TATARSKI, V. I., 1961: Wave propagation in a turbulent medium. McGraw Hill, New York–Toronto–London.
- SZÉNÁS G.–ÁDÁM O., 1953: Szeizmogeológiai viszonyok Délnyugat-Magyarországon (Seismogeological conditions in SW Hungary). *Geofizikai Közlemények* II. 9, 73–89.
- WEST, S. S., 1941: The effect of density on seismic reflections. *Geophysics*, VI. 1, pp. 45–52.
- WIENER, N., 1950: Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series. The MIT Press and John Wiley and Sons, Inc. New York.
- WYLLIE, M. R. J.–GREGORY, A. R.–GARDNER, L. W., 1956: Elastic wave velocities in heterogeneous and porous media. *Geophysics*, XXI. 1, pp. 41–70.

### THE EDITOR'S NOTE

The endeavours to improve signal-to-noise ratio are as old as the seismic reflection method itself. In platform areas the main components of noise are the ground-roll and the multiples. Our research, with no other support than the literature from platform areas, duly—sometimes even overduly—has turned its attention toward these components but it has, at the same time, rather neglected the ambient noise, partly because the problem of the former noise type has, in fact, never been completely solved either.

The present author, commendably enough, keeps the second problem in mind with a final aspect to trace the peculiar, fractured floor of the Hungarian basin, with digital seismic reflection measurements.

Twenty years have elapsed since the problem of *diffuse reflection* arising from the peculiar build of the Hungarian basin-floor was first recognized (Szénás–Ádám, 1953). In the meantime, no matter how digital heights have been reached by the seismic method, the original problem, has actually, remained as unsolved as ever. The chances, however, have improved a great deal, for the old intuitive, qualitative and primitively analog approach now can and must be replaced by a modern digital approach promising some hope of success.

The present paper—as hinted by the author himself—is the first part of a series of three, and the final aim is to obtain, having solved the three-dimensional problem, an exact, mathematical, computerizable treatment of the random objects of the basin-floor comparable in size with wave-length, in order to trace them.

The Editor

# A VÉLETLEN KÖZEGEK ELMÉLETE ÉS A SZEIZMIKUS, VALAMINT ULTRASZONIKUS HULLÁMTERJEDÉS NÉHÁNY PROBLÉMÁJA

KORVIN GÁBOR

A dolgozatban a stacionárius folyamatok fogalmának általánosításaként a homogén izotróp véletlen terek elméletét ismertetjük. A Föld belsejében a hullám terjedési sebességének lokális változásait véletlen térnek lehet tekinteni. Megvizsgáljuk, hogy a sebesség inhomogeneitások statisztikus tulajdonságaiból a közegben terjedő hullám paramétereinek fluktuációjára milyen következtetések vonhatók le. Mivel feltételezzük, hogy az inhomogeneitások karakterisztikus mérete a hullámhossznál jóval kisebb, tárgyalásunk a porózus közegben történő ultraszonikus hullámterjedésre, valamint a szeizmikus módszer néhány problémájának tárgyalására egyaránt alkalmazható lesz.

Az általános tételek alkalmazásaként speciális esetként kapjuk WYLLIE (1956) időátlag-egyenletét, magyarázatot nyeriünk egy — a szeizmikus karotázs és az akusztikus karotázs eredményeinek analizisénél talált — érdekes eltérésre, levezetjük a reflexiók együtthatók sorozatának empirikusan ismert autokorrelációs függvényét és meghatározzuk a véletlen rétegsorok reflexiók és transzmissziós tulajdonságait. Az utóbbi eredmény útmutatást ad az akusztikus szelvényeknek a szeizmikában való újfajta felhasználására. A véletlen rétegsorok transzmissziós tulajdonságainak porózus közegre való alkalmazásával, a tengeri üledékek abszorpciós együtthatójának SHUMWAY (1960) által talált porozitásfüggésére magyarázatot nyeriünk.

A dolgozatban a hullámterjedés egydimenziós modelljét használjuk. A többdimenziós problémák tárgyalását (pl. a szabálytalan alakú felületekről való reflexió problematikáját, a diffúz reflexióval kapcsolatos kérdéseket és a szeizmikus zaj térben és időben mutatott korrelációs tulajdonságainak vizsgálatát) később tervezzük. Egy további dolgozat tárgya lesz az az eset, amikor az inhomogeneitások karakterisztikus mérete a hullámhosszal összemérhető, illetve annál nagyobb.

## A sztochasztikus függvények elméletének alapjai

A véletlen terek a véletlen (sztochasztikus) függvények általánosításai.

Legyen  $x(t)$  egy  $[a, b]$  intervallumon értelmezett függvény, pontosabban  $\{x(t)\}_\alpha$  legyen ilyen függvényeknek egy halmaza, ahol az  $\alpha$  paraméter valószínűségi változó. A halmazból kiragadott  $x(t)$  függvény a *sztochasztikus folyamat egy realizációja*. Rögzített  $t_0$  értékekre  $x(t_0)$  véletlen mennyiség, adott

$$F(t_1, x_1) = P[x(t_1) < x_1] \quad (1)$$

valószínűséggel különböző értékeket vehet fel. Ahhoz, hogy a véletlen függvény viselkedését teljesen jellemezni tudjunk, az összes

$$F_N(t_1, t_2, \dots, t_N; x_1, x_2, \dots, x_N) = P[x(t_1) < x_1, \dots, x(t_N) < x_N] \quad (2)$$

valószínűségek ismerete szükséges.



Legyen  $f$  tetszőleges  $N$  változós függvény. Az  $f[x(t_1), \dots, x(t_N)]$  kifejezésnek az összes realizációra vett várható értéke

$$Mf \equiv Mf[x(t_1), \dots, x(t_N)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_N) dF_N(t_1, t_2, \dots, t_N; x_1, \dots, x_N) \quad (3)$$

ahol  $x_1, x_2, \dots, x_N$  az integrációs változók, az  $Mf$  rögzített  $f$ -re  $t_1, t_2, \dots, t_N$  függvénye.

A véletlen függvények jellemzéséhez leggyakrabban a következő átlagértékeket használjuk:

$$Mx(t_1); \quad Mx^2(t_1); \quad M\{x(t_1)x(t_2)\},$$

vagyis valamely adott pontban felvett függvényértékek várható értékét, szórásnégyzetét és két adott pontban felvett függvényérték korrelációs együtthatóját, az autokorrelációs függvényt. Komplex véletlen függvényekre az autokorrelációs függvény definíciója:

$$R_{xx}(t_1, t_2) = M[x(t_1)x^*(t_2)],$$

ahol a csillag a komplex konjugáltat jelöli. A véletlen folyamat egy tetszőleges realizációjára képezhetjük egy adott kifejezés időben vett átlagát:

$$\langle f[x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_N)] \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f[x(t+t_1), \dots, x(t+t_N)] dt. \quad (4)$$

A sztochasztikus folyamat *stacionárius*, ha statisztikus tulajdonságai időben nem változnak, vagyis ha

$$F_N(t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_N + \tau; x_1, x_2, \dots, x_N) \equiv F_N(t_1, \dots, t_N; x_1, \dots, x_N). \quad (5)$$

Másképpen fogalmazva ez azt jelenti, hogy tetszőleges  $f$  függvényre:

$$Mf[x(t_1 + \tau), \dots, x(t_N + \tau)] \equiv Mf[x(t_1), \dots, x(t_N)].$$

Speciálisan,  $\tau = -t_1$  választással

$$Mx(t_1) = Mx(0) = Mx,$$

$$Mx^2(t_1) = Mx^2(0) = Mx^2,$$

$$R_{xx}(t_1, t_2) = M\{x(t_1)x^*(t_2)\} = M\{x(0)x^*(t_2 - t_1)\} = R(|t_2 - t_1|),$$

vagyis a várható érték és a szórásnégyzet minden időpontban állandó, az autokorrelációs függvény pedig csakis az argumentumok különbségétől függ.

Egy stacionárius folyamat *ergodikus*, ha minden (mérhető)  $f$  függvényre

$$P\{\langle f \rangle = Mf\} = 1, \quad (6)$$

vagyis az időben vett átlag majdnem minden realizáción az összes realizációra vett várható értékkel megegyezik. Ez gyakorlatilag azt jelenti, hogy ergodikus folyamatnál tetszőleges realizáció statisztikai vizsgálatából a folyamatra, mint egészre következtethetünk.



Könnyű példát mutatni egy stacionárius, de nem ergodikus folyamatra. A realizációk legyenek az  $x(t) = x$  azonosan konstans függvények, ahol az  $x$  várható értéke pl. legyen 0. Ekkor  $Mx(t_1) = Mx = 0$ , míg  $\langle x(t_1) \rangle = x$ , tehát a folyamat stacionárius, de nem ergodikus és így egy adott realizációból a folyamat egészére nézve semmilyen következtetést nem vonhatunk le.

Tételezzük fel, hogy egy sztochasztikus folyamat valamennyi  $x(t)$  realizációjának Fourier—Stieltjes integrálja létezik:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\varphi(\omega), \tag{7}$$

ahol a  $\varphi(\omega)$  komplex, véletlen jellegű függvény. Ha a folyamat stacionárius

$$R(t_1 - t_2) = Mx(t_1)x^*(t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp [i(\omega_1 t_1 - \omega_2 t_2)] M d\varphi(\omega_1) d\varphi^*(\omega_2).$$

Mivel stacionárius esetben  $R$  csak  $(t_1 - t_2)$ -től függhet,

$$M d\varphi(\omega_1) d\varphi^*(\omega_2) = \delta(\omega_1 - \omega_2) W(\omega_1) d\omega_1 d\omega_2, \tag{8}$$

ahol  $\delta$  a Dirac-delta függvény és természetesen  $W(\omega_1) \geq 0$ . Tehát

$$R(t_1 - t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp [i(\omega_1 t_1 - \omega_2 t_2)] W(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega \tau \cdot W(\omega) d\omega = 2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega \tau \cdot W(\omega) d\omega.$$

Az utóbbi összefüggésben kihasználtuk, hogy  $R(\tau) = R(-\tau)$  és így  $W(\omega) = W(-\omega)$ , ahol  $W(\omega)$  a stacionárius folyamat teljesítmény-spektruma. Stacionárius folyamat teljesítmény-spektruma mindig pozitív és a Wiener—Hincsin-tétel szerint ennek a fordítottja is igaz: azaz, ha egy szimmetrikus függvény Fourier-transzformáltja nem negatív, akkor létezik olyan stacionárius folyamat, amelynek autokorrelációs függvénye  $R(\tau)$ . Így például az  $R(\tau) = a^2 \exp [-|\tau/\tau_0|]$  alakú autokorrelációs függvény Fourier-transzformáltja

$$W(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a^2 \exp [-i\omega\tau] \exp [-|\tau/\tau_0|] d\tau = \frac{a^2\tau_0}{\pi(1 + \omega^2\tau_0^2)}.$$

Itt  $W(\omega) \geq 0$ , így  $R(\tau)$  stacionárius folyamatok autokorrelációs függvénye lehet.

A továbbiakban két olyan, a gyakorlatban fontos sztochasztikus folyamatra mutatunk példát, amelyeknek éppen ez az autokorrelációs függvénye (KORN és KORN, 1961).

a) A „véletlen táviróhullám”-nál (1. ábra)  $x(t)$  a  $\pm a$  értékeket veszi fel váltakozó előjellel, a változások időpontjai  $\alpha$  közepes gyakoriságú Poisson-folyamatot követnek. A folyamat stacionárius és ergodikus,  $Mx(t) = 0$ ,

$$R_{xx}(\tau) = a^2 e^{-2\alpha|\tau|}, \tag{9}$$

$$W(\omega) = \frac{a^2}{\pi} \frac{2\alpha}{\omega^2 + (2\alpha)^2}. \tag{10}$$

b) A Brown-mozgást végző részecske egyik sebességkomponensének változásánál (2. ábra) az  $x(t)$  függvény egy  $\alpha$  közepes gyakoriságú Poisson-folyamat szerinti időpontokban változtatja meg értékét és előző értékétől függetlenül egy 0 várható értékű  $\sigma$  szórású új értéket vesz fel. A változási időpontok között a függvény értéke állandó. Ebben az esetben:  $Mx(t) = 0$ ,

$$R_{xx}(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha|\tau|), \quad (11)$$

$$W(\omega) = \frac{\sigma^2}{\pi} \frac{\alpha}{\omega^2 + \alpha^2}. \quad (12)$$

Definiáljuk a *korrelációs távolságot*: a korrelációs távolság  $\tau$  azon értéke, ahol a korreláció értéke  $\tau = 0$ -hoz képest  $1/e$  részére csökken. Távírójelnél a korrelációs távolság  $1/2\alpha$ , Brown-mozgásnál pedig  $1/\alpha$ . Érdekes összefüggés van a korrelációs távolság és a teljesítményspektrum sávzélessége között. A Brown-mozgás esetében például  $W(\omega)$  éppen az ismert,  $\frac{\omega_0}{\omega_0 + i\omega}$  átviteli függvényű,  $\omega_0$ -nál vágó, aluláteresztőszűrő amplitúdó karakterisztikája. Így a folyamat sávzélessége, frekvenciatartományban  $\Delta\omega = \alpha = \omega_0$ ; a folyamat korrelálhatósága időben pedig a  $\Delta t = a = \frac{1}{\alpha}$  intervallum, tehát ebben az esetben  $\Delta\omega \cdot \Delta t = 1$ .

A  $\Delta\omega \cdot \Delta t \approx 1$  összefüggés általánosabban is fennáll, ez az általános érvényű, ún. információelméleti határozatlansági reláció (BRILLOUIN, 1956).

Az  $\exp[-\alpha|\tau|]$  alakú korrelációs függvény sajátossága, hogy deriváltja a  $\tau = 0$  pontban nem létezik. Ez abból következik, hogy a korrelációs függvénynek megfelelő véletlen függvények folytonosan nem deriválhatók. Fennáll ugyanis, hogy ha  $x(t)$  folytonosan deriválható, stacionárius és ergodikusság függvény, akkor

$$\left. \frac{d}{d\tau} R(\tau) \right|_{\tau=0} = 0. \quad (13)$$

Valóban (CERNOV, 1960)

$$\frac{\partial}{\partial \tau} [x(t)x(t+\tau)]_{\tau=0} = x(t) \left. \frac{\partial}{\partial \tau} x(t+\tau) \right|_{\tau=0} = x(t) \left. \frac{\partial}{\partial t} x(t+\tau) \right|_{\tau=0} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} x^2(t).$$

Az ergodicitás miatt, várható értékre térve

$$\left. \frac{d}{d\tau} R(\tau) \right|_{\tau=0} = \frac{d}{d\tau} M[x(t)x(t+\tau)]_{\tau=0} = \frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \frac{d}{dt} x^2(t) dt = \frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} [x^2(t)]_{-T}^T = 0,$$

mivel  $x(t)$  stacionaritásánál fogva korlátos.

A legegyszerűbb, exponenciális lecsengésű autokorrelációs függvény, amely az  $R'(0) = 0$  feltételnek már eleget tesz, a véletlen közegek elméletében gyakran alkalmazott

$$R(\tau) = a^2 \exp[-(\tau/\tau_0)^2] \quad (14)$$

függvény.

A megfelelő teljesítményspektrum (3. ábra)

$$W(\omega) = \frac{a^2 \tau_0}{2\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{\omega^2}{4} \tau_0^2\right]. \quad (15)$$

### Homogén izotróp véletlen terek\*

Legyen  $R$  a háromdimenziós euklidesi tér. Legyen  $x(\mathbf{r}) = x(x, y, z)$  az egész térben értelmezett véletlen függvény. Az egyváltozós esethez hasonlóan, az ilyen véletlen függvények összességét *véletlen térnek*, egy kiragadott függvényt pedig a véletlen tér egy *realizációjának* tekintjük. A realizációk összességére vett várható értéket és az  $R$  térre képzett átlagot az egydimenziós esethez analóg módon definiáljuk.

A véletlen tér autokorrelációs függvénye

$$R_{xx}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = M\{[x(\mathbf{r}_1) - Mx(\mathbf{r}_1)][x(\mathbf{r}_2) - Mx(\mathbf{r}_2)]\}, \quad (16)$$

ahol  $M$  újra az összes lehetséges realizációkra képzett várható érték.

Fontos szerepet fog betölteni a véletlen terek homogeneitásának és izotrópiájának fogalma. Céljainkra elegendő lesz ezen fogalmakat csak a várható érték, szórásnégyzet és az autokorrelációs függvény szempontjából definiálni.

A véletlen tér *homogén*, ha statisztikus tulajdonságai az eltolással szemben invariánsak, azaz  $Mx(\mathbf{r}) = \text{const.}$ , és tetszőleges  $\mathbf{r}_0$  vektorra  $R_{xx}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = R_{xx}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_0)$ . Ekkor a korrelációs függvény csak az  $x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2$  különbségek függvénye. Ha ezen kívül még az is fennáll, hogy a tér statisztikus tulajdonságai forgatás és tükrözés esetén sem változnak, akkor a tér *homogén és izotróp*. Ez esetben az autokorrelációs függvény értéke csak az  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  vektor abszolút értékétől függ, vagyis

$$R_{xx}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = R_{xx}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = R_{xx}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) = R_{xx}(r).$$

Az

$$R_{xx} = a^2 \exp \{ -[\alpha(x_1 - x_2)^2 + \beta(y_1 - y_2)^2 + \gamma(z_1 - z_2)^2] / r_0 \}$$

autokorrelációs függvénnyel jellemezhető tér pl. homogén, de nem izotróp, ha  $\alpha \neq \beta \neq \gamma$ .

Ha homogén, izotróp térben egy tetszőleges egyenes mentén vizsgáljuk a tér változását, egyváltozós stacionárius véletlen függvényt kapunk (ilyen módon javasolja pl. FARA és SCHEIDEGGER [1961] a porózus közegek statisztikai leírását).

A háromdimenziós homogén tér Fourier—Stieltjes ábrázolásban

$$x(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp [i\boldsymbol{\kappa}\mathbf{r}] d\varphi(\boldsymbol{\kappa}_1, \boldsymbol{\kappa}_2, \boldsymbol{\kappa}_3),$$

ahol az exponenciális függvény argumentumában a szorzás a skalárszorzatot jelöli. A homogeneitás miatt újra

$$M d\varphi(\boldsymbol{\kappa}_1) d\varphi^*(\boldsymbol{\kappa}_2) = \delta(\boldsymbol{\kappa}_1 - \boldsymbol{\kappa}_2) \Phi(\boldsymbol{\kappa}_1) d\boldsymbol{\kappa}_1 d\boldsymbol{\kappa}_2, \quad \Phi(\boldsymbol{\kappa}) \geq 0, \quad (17)$$

így az autokorrelációs függvény:

$$R_{xx}(\mathbf{r}) = R_{xx}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp [i\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)] \Phi(\boldsymbol{\kappa}) d\boldsymbol{\kappa} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cos (\boldsymbol{\kappa}\mathbf{r}) \Phi(\boldsymbol{\kappa}) d\boldsymbol{\kappa} \quad (18)$$

\* A homogén, izotróp véletlen terek elméletére nézve többek között utalunk Tatarski (1961) monográfiájára. Az elmélet általánosabb — vektor és tenzorcrtékű tereket is felölelő — kifejtése Obukhov (1954) dolgozatában található.

és megfordítva, a teljesítményspektrum:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\mathbf{x}\mathbf{r}) R(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (19)$$

Ha az  $x(\mathbf{r})$  tér izotróp, az  $R$  korrelációs függvény csak  $|\mathbf{r}| = r$ -től függ. Gömbkoordinátákra áttérve és elvégezve az integrálásokat

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3 \kappa} \int_0^{\infty} r R(r) \sin(\kappa r) dr, \quad \text{ahol} \quad \kappa = |\mathbf{x}|. \quad (20)$$

A tér autokorrelációs függvénye ekkor

$$R(r) = \frac{4\pi}{r} \int_0^{\infty} \kappa \Phi(\kappa) \sin \kappa r d\kappa. \quad (21)$$

A  $\Phi(\kappa)$  háromdimenziós teljesítményspektrum, és egy tetszőleges egyenes mentén tekintett folyamatra vonatkozó  $W(\omega)$  teljesítményspektrum között a

$$\Phi(\kappa) = -\frac{1}{2\pi\kappa} \frac{dW(\kappa)}{d\kappa} \quad (22)$$

egyszerű összefüggés van.

Ha például egy egyenes mentén az autokorrelációs függvény

$$R(r) = a^2 \exp\left[-\left|\frac{r}{r_0}\right|\right],$$

akkor a megfelelő teljesítményspektrum, amint láttuk,

$$W(\kappa) = \frac{a^2 r_0}{\pi(1 + \kappa^2 r_0^2)},$$

a háromdimenziós teljesítményspektrum pedig

$$\Phi(\kappa) = \frac{a^2 r_0^3}{\pi^2(1 + \kappa^2 r_0^2)^2}.$$

A tárgyalás folyamán szükségünk lesz még az

$$M \int_{T_1}^{T_1+T} f(\tau) x(\tau) d\tau = (Mx) \cdot \int_{T_1}^{T_1+T} f(\tau) d\tau \quad (23)$$

egyszerű segédteételre, amely — feltételezve, hogy az  $x(t)$  sztochasztikus folyamat stacionárius és ergodikus — tetszőleges  $f(t)$  (nem véletlen) függvénynél érvényes.



A tétel bizonyításához vezessük be az

$$\eta(t) = \int_{T_1}^{T_1+T} f(\tau)x(t+\tau) d\tau$$

függvényt.

Feltételezve, hogy az  $\eta(t)$  stacionárius és ergodikus, és a (23) jobb oldalát  $M$ -mel jelölve,

$$M = M\eta(0) = M\eta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow \infty} \int_0^{\Delta} \int_{T_1}^{T_1+T} f(\tau)x(t+\tau) d\tau dt =$$

$$= \int_{T_1}^{T_1+T} \left\{ \lim_{\Delta \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta} \int_0^{\Delta} x(t+\tau) dt \right\} f(\tau) d\tau = Mx \cdot \int_{T_1}^{T_1+T} f(\tau) d\tau.$$

Az  $f \equiv 1$  speciális esetben  $M \int_{T_1}^{T_1+T} x(\tau) d\tau = Mx \cdot T$ , vagyis az

$$M \left( \frac{1}{T} \int_{T_1}^{T_1+T} x(\tau) d\tau \right) = Mx$$

jól ismert eredményt kapjuk.

Be kell még bizonyítanunk, hogy  $\eta(t)$  valóban stacionárius. Ez akkor teljesül, ha  $M\{\eta(t_1)\eta(t_2)\}$  független  $t_1, t_2$ -től. Ez valóban így van, mert

$$M\{\eta(t_1)\eta(t_2)\} = M \int_{T_1}^{T_1+T} \int_{T_1}^{T_1+T} f(\tau_1)f(\tau_2)x(t_1+\tau_1)x(t_2+\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 =$$

$$= \int_{T_1}^{T_1+T} \int_{T_1}^{T_1+T} f(\tau_1)f(\tau_2)R_{xx}(t_1-t_2) + (\tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2,$$

tehát  $M\{\eta(t_1)\eta(t_2)\}$  csakis a  $(t_1 - t_2)$  különbségtől függ.

### Véletlen sebesség-inhomogeneitásokkal rendelkező közegek matematikai leírása

Tételezzük fel, hogy a vizsgált térrészben a lokális sebesség véletlen inhomogeneitást mutat. Egy adott  $\mathbf{r}$  pontban a lokális sebességfüggvényt az inhomogeneitások növekvő hatványai szerint sorba fejtve

$$c(\mathbf{r}) = c_0(\mathbf{r}) + a(\mathbf{r})\varepsilon(\mathbf{r}) + b(\mathbf{r})\varepsilon^2(\mathbf{r}) + O(|\varepsilon|^3) \tag{24}$$

alakú kifejezést kapunk, ahol  $c_0(\mathbf{r})$ ,  $a(\mathbf{r})$ ,  $b(\mathbf{r})$  adott, nem véletlen függvények,  $\varepsilon(\mathbf{r})$  pedig homogén, zérus várható értékű tér. A fenti képletben szereplő  $c_0$ ,  $a$ ,  $b$ , a hullám frekvenciájától független skalármennyiségek, tehát a sebesség diszperzió, illetve anizotropia jelenségét modellünk nem tételezi fel.

Geofizikai szempontból a következő speciális sebességeloszlások lehetnek fontosak:

$$c(\mathbf{r}) = c_0(\mathbf{r}) + \varepsilon(\mathbf{r}); \quad (25a)$$

$$c(\mathbf{r}) = c_0(\mathbf{r})[1 + \varepsilon(\mathbf{r})] = c_0(\mathbf{r}) + c_0(\mathbf{r})\varepsilon(\mathbf{r}); \quad (25b)$$

$$c(\mathbf{r}) = \frac{c_0(\mathbf{r})}{1 + \varepsilon(\mathbf{r})} = c_0(\mathbf{r}) - c_0(\mathbf{r})\varepsilon(\mathbf{r}) + c_0(\mathbf{r})\varepsilon^2(\mathbf{r}) + O(|\varepsilon|^3). \quad (25c)$$

A három modellt a (24) általános képlettel rendre összevetve, az együtthatók:

$$a(\mathbf{r}) = 1 \quad b(\mathbf{r}) = 0; \quad (26a)$$

$$a(\mathbf{r}) = c_0(\mathbf{r}) \quad b(\mathbf{r}) = 0; \quad (26b)$$

$$a(\mathbf{r}) = -c_0(\mathbf{r}) \quad b(\mathbf{r}) = c_0(\mathbf{r}). \quad (26c)$$

A (24–25) képletekben feltételezzük, hogy az inhomogenitásokat adó  $\varepsilon(\mathbf{r})$  véletlen tér a  $c_0(\mathbf{r})$  várható lokális sebességtől független.

A véletlen közegekben való hullámterjedés elmélete a (25c) sebességeloszlást tételezi fel, mert ekkor a hullámegyenletben fellépő  $k = \omega/c$  hullámszám alakja

$$k(\mathbf{r}) = k_0(\mathbf{r})[1 + \varepsilon(\mathbf{r})]$$

lesz és a perturbációs módszer könnyebben alkalmazható (KELLER 1964, KARAL és KELLER 1964).

A (25b) típusú sebességfüggvény használata a turbulens atmoszférában terjedő hullámok vizsgálatánál szokásos (TATARSKI, 1961). Az elméleti fizikából ismeretes ti. (például RAYLEIGH, 1877), hogy ideális gázokban a hang terjedési sebessége az abszolút hőmérséklet négyzetgyökével arányos. Ha tehát a lokális hőmérséklet

$$T(r) = T_0 + \tau(r)$$

ingadozást mutat, ahol  $\tau(\mathbf{r})$  véletlen tér, akkor a lokális sebesség

$$c = \text{konst} \sqrt{T_0 + \tau} = \text{konst} c_0 \cdot \left(1 + \frac{\tau}{2T_0}\right) + O\left(\left|\frac{\tau}{2T_0}\right|^3\right),$$

vagyis a (25b) alakú.

A szeizmikus gyakorlatban a (25a) alakú sebességeloszlás használatát tartjuk indokoltnak. Szovjet szerzők (KATS *et al.*, 1969) véletlen szerkezetű rétegsorok alapmintájaként egy homokkő közbetelepülést mutatnak be, homogén agyagos közegben, a nyugat Kubányi-medence D-i pereméről (4. ábra). Az 5. és 6. ábrán a rétegsorban mért sebességek eloszlásának hisztogramja és a sebességek változásának vertikális irányban számított autokorrelációs függvénye látható. A kérdéses autokorrelációs függvény alakja jó közelítéssel

$$R(r) = \varepsilon^2 \exp[-r/r_0], \quad (27)$$

ahol az idézett szerzők mérései szerint a korrelációs távolság  $r_0 \approx 2$  m, a sebesség várható értéke  $c_0 = 3100$  m/s, az  $|\varepsilon|$  szórás pedig 365 m/s. Ahhoz, hogy az előbbi adatokat értelmezhetővé tegyük, és a következő fejtegetéseket megalapozzuk, a (27) autokorrelációs függvénynek és az említett  $c_0$ ,  $|\varepsilon|$  várható értékeknek exakt definíciót kell adnunk. A sebességeloszlást leíró (24) képletben a  $c_0(\mathbf{r})$ ,  $a(\mathbf{r})$ ,  $b(\mathbf{r})$  együtthatók a szeizmikus gyakorlatban horizontálisan nem változnak, csakis a  $z$  koordináta, a mélység függvényei (pontosabban: tárgyalásunk érvényességi köre olyan  $(x, y)$  tartományra vonatkozik, ahol ez feltételezhető). Az  $\varepsilon(\mathbf{r})$  véletlen térről természetesen nem állíthatjuk, hogy izotróp, hiszen az inhomogeneitások változása az  $x, y$  síkkal párhuzamosan nyilván kisebb, mint a  $z$  tengely mentén.

Mivel a dolgozatban egydimenziós problémákra szorítkozunk, a sebességeloszlás következő modelljét választjuk (7. ábra).

Feltételezzük, hogy a térnek az  $(x, y)$  síkbeli  $A$  tartomány alatti részén a (24)-ben szereplő  $a(\mathbf{r})$ ,  $b(\mathbf{r})$ ,  $c(\mathbf{r})$  együtthatók csakis a  $z$  koordinátától függenek, vagyis az  $(x, y)$  síkkal párhuzamos vízszintes síkok mentén állandók. A  $c(\mathbf{r})$  véletlen tér változását ezután az  $A$  síkbeli pontokból kiinduló,  $z$ -vel párhuzamos függőleges egyenesek mentén vizsgáljuk. A különböző egyenesek mentén vett értékek stacionárius folyamatot alkotnak, egy-egy görbe a folyamat különböző realizációja. (Geofizikai például a 7. ábrán látható  $c_1(z)$ ,  $c_2(z)$ , . . . a  $P_1, P_2, \dots$  pontokban mélyített fúrásokban mért akusztikus karotázs görbék szolgáljanak!). Adott  $c_1(z)$  függvényre képzett mélységátlag, és az egész folyamatra vett várható érték jelentése világos. KATS *et al.* (*op. cit.*) példájára visszatérve: a 4. ábrán látható 18 görbe a véletlen sebességeloszlások terének  $z$  irányú változását leíró sztochasztikus folyamat különböző reprezentációi,  $c_0$  és  $|\varepsilon|$  az összes reprezentációra vett átlagok, a közölt  $R$  autokorrelációs függvény valamely adott reprezentációra vonatkozik, de az ergodicitás miatt a folyamat egészére is jellemző.

Dolgozatunkban lényeges szerepe lesz a sebesség inhomogeneitások véletlen térként való felfogásának. Szeretnénk rámutatni, hogy ez a modell a gyakorlati szeizmikában is lényeges lehet, hiszen útmutatást ad az akusztikus karotázs szelvények újszerű felhasználására. A dolgozatban közölt eredmények lehetőséget nyújtanak, hogy a szeizmikus vonal mentén mért akusztikus szelvényt a sebesség-inhomogeneitás becslésére használjuk fel, és ebből — a fúróluk környezetében — statisztikus következtetéseket vonjunk le a szeizmikus hullámok terjedésére, fluktuációjára és csillapodására vonatkozóan.

Megjegyezzük, hogy a sebességeloszlás hasonló statisztikus felfogása az alapja MATHIEU és RICE (1969) „diszkriminációs analízis” módszerének (lásd még ezzel kapcsolatban DOWDS (1969) érdekes dolgozatát!).

### A beérkezési idők fluktuációja véletlen sebesség-inhomogeneitásokkal rendelkező közegben

KATS *et al.* (*op. cit.*) eredményével összhangban  $r_0 \approx 2 \div 5$  m korrelációs távolságot tételezünk fel. A szokásos szeizmikus sebességviszonyok és 40 Hz domináns frekvenciájú jelek esetén a hullámhossz 50–80 m nagyságrendű, tehát az inhomogeneitások karakterisztikus méreténél jóval nagyobb.

Bemutatjuk a 25a, 25b, 25c sebességfüggvények közötti egyetlen lényeges eltérést. Számítsuk ki ugyanis két adott  $P, Q$  pont közötti távolság megtételéhez szükséges idő várható értékét. A hullámhosszakra tett megállapítás miatt fel-



tételezhetjük, hogy a hullám a  $\overline{PQ}$  utat egyenes vonal mentén teszi meg. Legyen a két pont pl.  $P = (0, 0, h_1)$ ;  $Q = (0, 0, h_2)$ ,  $h_1 < h_2$ . Tételezzük fel először, hogy a  $(h_1, h_2)$  mélységszakaszon  $c_0(h) = c_0 = \text{const}$ . Ekkor

$$T = \int_P^Q \frac{ds}{c(\mathbf{r})} = \int_{h_1}^{h_2} \frac{dh}{c_0 + a\varepsilon(h) + b\varepsilon^2(h)} = \frac{1}{c_0} \int_{h_1}^{h_2} \left\{ 1 - \frac{a\varepsilon(h) + b\varepsilon^2(h)}{c_0} + \frac{a^2\varepsilon^2(h)}{c_0^2} + O\left(\left|\frac{\varepsilon}{c_0}\right|^3\right) \right\} dh.$$

Várható értékre térve

$$\begin{aligned} MT &= \frac{1}{c_0} \int_{h_1}^{h_2} \left\{ 1 - \frac{b}{c_0} \varepsilon^2 + \frac{a^2}{c_0^2} \varepsilon^2 + O\left(\left|\frac{\varepsilon}{c_0}\right|^3\right) \right\} dh = \\ &= T_0 \left\{ 1 + \frac{\varepsilon^2}{\Delta h} \int_{h_1}^{h_2} \left[ \frac{a^2}{c_0^2} - \frac{b}{c_0} \right] dh + O\left(\left|\frac{\varepsilon}{c_0}\right|^3\right) \right\}, \end{aligned} \quad (28)$$

ahol  $\Delta h = h_2 - h_1$  és  $T_0$  az inhomogeneitások nélküli térben mért terjedési idő:

$$T_0 = \int_{h_1}^{h_2} \frac{dh}{c_0} = \frac{\Delta h}{c_0}.$$

$MT$ , a (25a, b, c) sebességfüggvényeknél, a (26) képletek felhasználásával rendre:

$$MT = T_0 \left[ 1 + \frac{\varepsilon^2}{c_0^2} + O\left(\left|\frac{\varepsilon}{c_0}\right|^3\right) \right] \approx T_0 \left( 1 + \frac{\varepsilon^2}{c_0^2} \right); \quad (29a)$$

$$MT = T_0 [1 + \varepsilon^2 + O(|\varepsilon|^3)] \approx T_0 (1 + \varepsilon^2); \quad (29b)$$

$$MT = T_0 [1 + O(|\varepsilon|^3)] \approx T_0. \quad (29c)$$

Ebben a levezetésben felhasználtuk a (23) tételt és éltünk azzal, hogy  $M\varepsilon = M\varepsilon^3 = 0$ . Az előbbi eredményeket várható sebességekben („átlagsebesség”) a három modellel kifejezve

$$Mc \approx c_0 \left( 1 - \frac{\varepsilon^2}{c_0^2} \right); \quad (30a)$$

$$Mc \approx c_0 (1 - \varepsilon^2); \quad (30b)$$

$$Mc \approx c_0. \quad (30c)$$

A lényeges különbség a (25a, b, c) sebességmodellek között, hogy az a) és b) esetekben az *inhomogeneitások lassítják a hullámot, sebességét csökkentik*. KATS *et al.* adatait alapul véve ( $|\varepsilon| = 365$  m/s;  $c_0 = 3100$  m/s), a (25a) sebességmodell feltételezésével a (29a) képletben  $\varepsilon^2/c_0^2$  értéke kb. 0.01, tehát az inhomogeneitások a beérkezési idő 1%-os növekedését okozhatják.

Kimutatjuk, hogy az akusztikus karotázs gyakorlatban jól ismert Wyllie-féle (WYLLIE *et al.*, 1956) ún. „időátlag” formula, amely az ultrahang porózus közegben megtett útjának várható időtartamát adja meg, a 29a képlet speciális esete.



Wyllie szerint az egységnyi út megtételének időtartama

$$\frac{1}{c} = MT = \frac{\Phi}{c_1} + \frac{1 - \Phi}{c_2}, \quad (31)$$

ahol  $c_1, c_2$  a két fázis terjedési sebessége,  $\Phi$  pedig a porozitás. A  $\Phi = p$ ,  $1 - \Phi = q$  jelöléssel

$$MT = \frac{p}{c_1} + \frac{q}{c_2} = \frac{p}{pc_1 + qc_2 + q(c_1 - c_2)} + \frac{q}{pc_1 + qc_2 + p(c_2 - c_1)},$$

ti.

$$c_1 = pc_1 + qc_2 + c_1 - pc_1 - qc_2 = pc_1 + qc_2 + q(c_1 - c_2),$$

és ugyanígy  $c_2 = pc_1 + qc_2 + p(c_2 - c_1)$ .

Sorba fejtve

$$\frac{1}{c_1} = \frac{1}{pc_1 + qc_2} \left[ 1 - \frac{q(c_1 - c_2)}{pc_1 + qc_2} + \frac{q^2(c_1 - c_2)^2}{(pc_1 + qc_2)^2} + \dots \right],$$

$$\frac{1}{c_2} = \frac{1}{pc_1 + qc_2} \left[ 1 - \frac{p(c_2 - c_1)}{pc_1 + qc_2} + \frac{p^2(c_2 - c_1)^2}{(pc_1 + qc_2)^2} + \dots \right],$$

vagyis (31) a következő alakban is írható:

$$MT = \frac{p}{c_1} + \frac{q}{c_2} = \frac{1}{pc_1 + qc_2} \left[ 1 + \frac{pq^2 + qp^2}{(pc_1 + qc_2)^2} (c_1 - c_2)^2 + \dots \right] =$$

$$= \frac{1}{pc_1 + qc_2} \left[ 1 + \frac{pq(c_1 - c_2)^2}{(pc_1 + qc_2)^2} + \dots \right]. \quad (32)$$

Gondoljuk most meg, hogy ha  $\Phi = p$  porozitás mellett a lokális várható sebesség értéke

$$c_0 = pc_1 + qc_2, \quad (33)$$

az ettől való eltérés (vagyis az inhomogeneitás)

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_1 = c_1 - c_0 = c_1 - pc_1 - qc_2 = q(c_1 - c_2) & p \text{ valószínűséggel,} \\ \varepsilon_2 = c_2 - c_0 = c_2 - pc_1 - qc_2 = p(c_2 - c_1) & q \text{ valószínűséggel,} \end{cases}$$

akkor

$$M\varepsilon = p\varepsilon_1 + q\varepsilon_2 = 0 \quad \text{és} \quad M\varepsilon^2 = p\varepsilon_1^2 + q\varepsilon_2^2 = pq(c_1 - c_2)^2. \quad (34)$$

Wyllie képlete tehát a (32), (33) és (34) szerint

$$MT = \frac{p}{c_1} + \frac{q}{c_2} = \frac{1}{c_0} \left[ 1 + \frac{\varepsilon^2}{c_0^2} + O\left(\left|\frac{\varepsilon}{c_0}\right|^3\right) \right],$$

ez pedig általános eredményeinkkel összhangban van. Megjegyezzük, hogy porózus közegekre a hullámhosszakra vonatkozólag tett kikötéseink alkalmazhatók, hiszen az akusztikus szelvényezésben használt ultrahang hullámhossza több cm nagyságrendű, míg a (porózus szerkezetből következő) inhomogeneitások mérete a milliméternél is kisebb.

Vizsgáljuk most meg két adott pont közötti menetidők szórását. Elhagyva az  $O(|\varepsilon|^3)$  tagokat, és az  $a(h)$ ,  $b(h)$ ,  $c_0(h) = \text{const.}$  feltételezéssel élve:

$$\begin{aligned} T - MT &= \frac{1}{c_0} \int_{h_1}^{h_2} \left\{ 1 - \frac{a\varepsilon(h) + b\varepsilon^2(h)}{c_0} + \frac{a^2\varepsilon^2(h)}{c_0^2} - 1 + \frac{b}{c_0} \varepsilon^2 - \frac{a^2}{c_0^2} \varepsilon^2 \right\} dh = \\ &= -\frac{1}{c_0} \int_{h_1}^{h_2} \left\{ \frac{a}{c_0} \varepsilon(h) - [\varepsilon^2(h) - \varepsilon^2] \left[ \frac{b}{c_0} + \frac{a^2}{c_0^2} \right] \right\} dh. \end{aligned}$$

A beérkezési idők  $T - MT$  fluktuációját  $\Delta T_0$ -al jelölve, e fluktuáció szórásnégyzete

$$\begin{aligned} M(\Delta T_0^2) &= M \frac{1}{c_0^2} \int_{h_1}^{h_2} \int_{h_1}^{h_2} \frac{a^2}{c_0^2} \varepsilon(h') \varepsilon(h'') dh' dh'' + O\left(\left|\frac{\varepsilon}{c_0}\right|^3\right) \approx \frac{a^2}{c_0^4} \int_{h_1}^{h_2} \int_{h_1}^{h_2} R_{\varepsilon\varepsilon}(h' - h'') \\ dh' dh'' &\approx \frac{a^2}{c_0^4} \int_{h_1}^{h_2} \int_{-\infty}^{\infty} R_{\varepsilon\varepsilon}(x) dx = \frac{\Delta h \cdot a^2}{c_0^4} \int_{-\infty}^{\infty} R_{\varepsilon\varepsilon}(x) dx. \end{aligned} \quad (35)$$

(A (35) levezetésnél, az utolsó előtti lépésben végtelen integrálási határookra térünk át. Ez a közelítés akkor indokolt, ha a  $\Delta h$  távolság az  $x_0$  korrelációs távolságnál jóval nagyobb.)

Az  $R_{\varepsilon\varepsilon}(x) = \varepsilon^2 \exp[-(x/x_0)^2]$  autokorrelációs függvényénél

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_{\varepsilon\varepsilon}(x) dx = \varepsilon^2 x_0 \sqrt{\pi}.$$

A három sebességmodellre tehát, rendre

$$M(\Delta T_0^2) = \frac{\Delta h}{c_0^4} \varepsilon^2 x_0 \sqrt{\pi}; \quad (36a)$$

$$M(\Delta T_0^2) = \frac{\Delta h}{c_0^2} \varepsilon^2 x_0 \sqrt{\pi}; \quad (36b)$$

$$M(\Delta T_0^2) = \frac{\Delta h}{c_0^2} \varepsilon^2 x_0 \sqrt{\pi} \quad (36c)$$

képleteket kapjuk. Az  $R_{\varepsilon\varepsilon} = \varepsilon^2 \exp[-|x/x_0|]$  autokorrelációs függvényénél az utóbbi képletekben  $\sqrt{\pi}$  helyett a 2 faktor szerepel.

Vegyük újra KATS *et al.* (*op. cit.*) adatait ( $a$  modell), tehát legyen pl.  $|\varepsilon| = 365$  m/s,  $c_0 = 3100$  m/s és  $\Delta h = 1000$  m. A (27) autokorrelációs függvény felhasználásával a beérkezési idők szórása 1000 méteres úton kb.  $\pm 2$  msec.

Megjegyezzük, hogy a (25c) sebességmodellre vonatkozó (36c) képlet levezetése CSERNOV (1960) monográfiájában megtalálható.

A (36) képletek lényege: a beérkezési idők szórása inhomogén közegben a megtett út négyzetgyökével arányosan növekszik. Ez a törvényszerűség GRETENER (1961) empirikusan nyert érdekes eredményére magyarázatot ad. A szeizmokarotázs és az akusztikus karotázs felvételekből számítható idők közötti eltérések analizésénél ugyanis Gretener egy szisztematikus és egy véletlennek tulajdonítható eltérést mutatott ki. A szisztematikus eltérés valószínűleg a sebességszórás tulajdonítható (STRICK, 1971). A véletlen eltérések (8. ábra) azt bizonyítják, hogy a szeizmikus hullám menetidejének szórása — a (36)-tal összhangban — a megtett út négyzetgyökével arányosan növekszik.

A (36) képletek a  $\Delta S$  fázisingadozásokra egyszerűen átfogalmazhatók, hiszen  $\Delta S = \omega \cdot \Delta T_0$ . Ebből következik, hogy inhomogén közegben a nagyfrekvenciás beérkezések nagyobb fázisingadozást mutatnak. Ez lehet a fizikai alapja annak a gyakorlati szeizmikában jól ismert ténynek, hogy a többszörös fedésű időszelvényeken kisméretű szűrővel a mélyebben levő szintek korrelálhatósága javul.

Alkalmazzuk most a beérkezési idők szórására nyert eredményeinket a porózus közegben terjedő ultrahang esetére. Az  $a$  sebességeloszlás és az  $\varepsilon^2 \exp[-|x/x_0|]$  autokorrelációs függvény esetén

$$M(\Delta T_0^2) = \frac{2\Delta h}{c_0^4} \varepsilon^2 x_0,$$

vagyis, (34) szerint:

$$M(\Delta T_0^2) = \frac{2\Delta h x_0}{[\Phi c_1 + (1 - \Phi) c_2]} \Phi(1 - \Phi)(c_1 - c_2)^2. \quad (37)$$

A reális  $c_{\text{mátrix}} = 4500$  m/s,  $c_{\text{folyadék}} = 1500$  m/s,  $\Phi = 20\%$ ,  $x_0 = 0.001$  m,  $\Delta h = 0.85$  m esetben például Wyllie-képlet szerint  $c_0 = 3900$  m/s,  $MT = 264$   $\mu\text{sec}$ ,  $\Delta T_0 = \pm 3$   $\mu\text{sec}$ . Valószínű tehát, hogy a beérkezési idők szórása, a porozitás gyakorlati becslésére kicsinyisége miatt nem lesz felhasználható.

Az előző levezetésekben feltételeztük, hogy  $c_0(r)$  állandó. A szeizmikus gyakorlatban azonban  $c_0(r)$  az egyik koordináta (a mélység mentén) lassan változó függvény:  $c_0(r) \equiv c_0(h)$ . Az  $\varepsilon(r)$  inhomogenitás homogén voltát itt is feltételezzük. A terjedési idő várható értéke ebben az esetben:

$$\begin{aligned} MT &= M \int_{h_1}^{h_2} \frac{1}{c_0(h)} \left\{ 1 - \frac{a(h)\varepsilon(h) + b(h)\varepsilon^2(h)}{c_0(h)} + \frac{a^2(h)\varepsilon^2(h)}{c_0^2(h)} + O\left(\left|\frac{\varepsilon}{c_0}\right|^3\right) \right\} dh \approx \\ &\approx T_0 + \varepsilon^2 \int_{h_1}^{h_2} \left[ \frac{a^2(h)}{c_0^3(h)} - \frac{b(h)}{c_0^2(h)} \right] dh. \end{aligned}$$

A (25a) sebességmodell esetére tehát

$$MT = T_0 + \varepsilon^2 \int_{h_1}^{h_2} \frac{dh}{c_0^3(h)} = T_0 \left[ 1 + \frac{\varepsilon^2}{c_0^2(\chi)} \right], \quad (38a)$$

ahol  $\chi$ ,  $h_1 \leq \chi \leq h_2$ , valamely  $h_1$  és  $h_2$  közötti mélységérték. A (38a) levezetésben fel-

használtuk az integrálszámítás középértéktételét. A b-c esetekben:

$$MT = T_0 + \varepsilon^2 \int_{h_1}^{h_2} \frac{d(h)}{c_0(h)} = T_0(1 + \varepsilon^2), \quad (38b)$$

ill.

$$MT = T_0 + \varepsilon^2 \int_{h_1}^{h_2} \left[ \frac{1}{c_0(h)} - \frac{1}{c_0(h)} \right] dh = T_0. \quad (38c)$$

A beérkezési idők szórására nem állandó sebességfüggvény esetén a következőt kapjuk:

$$\Delta T_0 = T_0 - MT_0 = - \int_{h_1}^{h_2} \frac{1}{c_0(h)} \left\{ \frac{a(h)\varepsilon(h)}{c_0(h)} - [\varepsilon^2(h) - \varepsilon^2] \left[ \frac{b(h)}{c_0(h)} + \frac{a^2(h)}{c_0^2(h)} \right] \right\} dh.$$

Az  $O(|\varepsilon|^3)$  tagokat elhagyva tehát

$$M(\Delta T_0^2) = \int_{h_1}^{h_2} \int_{h_1}^{h_2} \frac{a(h')a(h'')}{c_0^2(h')c_0^2(h'')} R_{\varepsilon\varepsilon}(h' - h'') dh' dh''. \quad (39)$$

### A reflexiós együtthatók sorozatának viselkedése véletlen közegben

A reflexiós együttható szokásos definíciója, merőleges beesésnél

$$r = \frac{\varrho_2 c_2 - \varrho_1 c_1}{\varrho_2 c_2 + \varrho_1 c_1}. \quad (40)$$

Amint erre PETERSON *et al.* (1955) rámutatott, a (40) jobb oldala jó közelítéssel

$$\frac{\varrho_2 c_2 - \varrho_1 c_1}{\varrho_2 c_2 + \varrho_1 c_1} \approx \frac{\Delta(\varrho c)}{2\varrho c} = \frac{1}{2} \Delta \log(\Delta \varrho c) \quad (41)$$

alakban írható, tehát Peterson közelítése szerint a reflexiós együtthatók sorozata az akusztikus impedancia logaritmusának deriváltja.

A szintetikus szeizmogramok elméletében a sűrűség szerepét nem veszik figyelembe. Szokásos a  $\varrho = \text{const.}$  feltevés, vagy a

$$\varrho = \text{const. } c^n$$

törvényszerűség feltételezése, amikor is  $\varrho c = \text{const. } c^{n+1}$ , tehát a logaritmikus derivált értékét a sűrűség csak egy  $(n+1)$  szorzótényező erejéig befolyásolja.

Mi a továbbiakban ugyancsak ezzel a közelítéssel élünk. A (41) egyenletről a sűrűség szerepét elhanyagolva, határátmenettel

$$\frac{c_2 - c_1}{c_2 + c_1} = \frac{\frac{c_2 - c_1}{\Delta h}}{\frac{c_2 + c_1}{2}} \cdot \Delta h \rightarrow \frac{c'(h)}{2c(h)} dh = \frac{1}{2} \frac{d \log c(h)}{dh} \cdot dh.$$



A továbbiakban a reflexiós együtthatók sorozatán az

$$r(h) = \frac{1}{2} \frac{d \log c(h)}{dh} \tag{42}$$

kifejezést értjük (a sűrűség szerepének tanulmányozásához pl. WEST [1941] dolgozatára utalunk).

A reflexiós együtthatók sorozatának statisztikus tulajdonságaival számos dolgozat foglalkozott (pl. AGARD és GRAU [1961] vagy GOGONENKOV és ASSRIYANZ [1969]). A reflexiós együtthatók sorozatának autokorrelációs függvényéről általában egyöntetűen feltételezik, hogy

$$R_{rr}(k) = r^2 \delta_{k0}, \tag{43}$$

(ahol  $\delta_{k0} = 1$ , ha  $k = 0$ , egyébként viszont 0).

A (43)-ban foglalt feltevés, vagyis, hogy a reflexiós együtthatók sorozata korrelálatlan, fehér zaj, valamennyi dekonvolúciós eljárás alapja. Az empirikusan meghatározott autokorrelációs függvények (9. ábra; O'DOHERTY és ANSTEY [1971]) a (43)-ban foglalt idealizált feltevésnek nem tesznek eleget.

A véletlen közegek elméletének segítségével a reflexiós együtthatók autokorrelációs függvényét levezetjük és a 9. ábrán látható autokorrelációs függvény jellegzetes alakjára magyarázatot nyerünk.

A reflexiós együttható definíciójaként az

$$r(h) = \frac{1}{2} \frac{d}{dh} \log c(h) = \frac{1}{2} \frac{c'(h)}{c(h)} \tag{44}$$

kifejezést fogadjuk el. A (25a) sebességfüggvény esetére

$$\begin{aligned} r(h) &= \frac{1}{2} \frac{(c_0 + \varepsilon)'}{c_0 + \varepsilon} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon'}{c_0 + \varepsilon} = \frac{1}{2c_0} \varepsilon' \left[ 1 - \frac{\varepsilon}{c_0} + O\left(\left(\frac{\varepsilon}{c_0}\right)^2\right) \right] = \\ &= \frac{\varepsilon'}{2c_0} - \frac{\varepsilon\varepsilon'}{2c_0^2} = \frac{\varepsilon'}{2c_0} - \frac{(\varepsilon^2)'}{4c_0^2} = \left[ \frac{\varepsilon}{2c_0} - \left(\frac{\varepsilon}{2c_0}\right)^2 \right]' \end{aligned} \tag{45}$$

A reflexiós együtthatók várható értéke nyilván zérus, hiszen  $\varepsilon(h)$  korlátossága miatt, (45)-ből

$$Mr = \lim_{\Delta H \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta H} \int_H^{H+\Delta H} \left[ \frac{\varepsilon(h)}{2c_0} - \frac{\varepsilon^2(h)}{4c_0^2} \right]' dh = \lim_{\Delta H \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta H} \left[ \frac{\varepsilon(h)}{2c_0} - \left(\frac{\varepsilon(h)}{2c_0}\right)^2 \right]_H^{H+\Delta H} = 0.$$

A reflexiós együttható-sorozat autokorrelációs függvényének kiszámításához bevezetjük a

$$\delta(h) = \frac{\varepsilon(h)}{2c_0} - \left(\frac{\varepsilon(h)}{2c_0}\right)^2 \tag{46}$$

jelölést. Szükségünk lesz a következő egyszerű matematikai segédételre: *tetszőleges  $x(t)$  differenciálható sztochasztikus folyamat autokorrelációs függvényére érvényes, hogy*

$$R_{x'x'}(\tau) = -R_{xx'}(\tau), \tag{47}$$

vagyis: a folyamat deriváltjának autokorrelációs függvénye az eredeti autokorrelációs függvény második deriváltjának  $(-1)$ -szerese.

A (47) bizonyításához írjuk fel Fourier-sor alakjában az  $x(t)$  sztochasztikus folyamatot:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{i\omega_k t}. \quad (48)$$

Ekkor (pl. Wiener, 1950, p. 6).

$$R_{xx}(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 e^{i\omega_k \tau},$$

ahonnan

$$R''_{xx}(\tau) = - \sum |c_k|^2 e^{i\omega_k \tau} \cdot \omega_k^2. \quad (49)$$

Másrészt viszont a (48) deriválásával és a komplex konjugáltat felülvonással jelölve

$$\begin{aligned} R_{x'x'}(\tau) &= M \left\{ \sum_k c_k i \omega_k e^{i\omega_k t} \cdot \sum_l \overline{c_l} i \omega_l e^{-i\omega_l(t-\tau)} \right\} = \\ &= \sum_k \sum_l [c_k c_l \omega_k \omega_l e^{i\omega_k \tau} \cdot M e^{i(\omega_k - \omega_l)\tau}]. \end{aligned}$$

Figyelembe véve, hogy

$$M e^{i(\omega_k - \omega_l)\tau} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{i(\omega_k - \omega_l)t} dt = \begin{cases} 1 & \text{ha } k=l \\ 0 & \text{ha } k \neq l \end{cases}$$

azt kapjuk, hogy

$$R_{x'x'} = \sum_k |c_k|^2 \omega_k^2 e^{i\omega_k \tau}. \quad (50)$$

Összevetve a (49) és (50) kifejezéseket, a (47) állítás helyessége nyilvánvaló.

Visszatérve a reflexiós együtthatók sorozatának autokorrelációs függvényéhez, a (46)-nál megadott jelöléssel, továbbá a (47)-et felhasználva:

$$R_{rr}(\tau) = R_{\delta\delta}(\tau) = -R''_{\delta\delta}(\tau) = -\frac{R''_{\varepsilon\varepsilon}(\tau)}{4c_0^2} + O\left(\left|\frac{\varepsilon}{c_0}\right|^3\right). \quad (51)$$

Az  $R_{\varepsilon\varepsilon} = \varepsilon^2 e^{-(a\tau)^2}$  autokorrelációs függvény feltételezésével (ahol  $1/a = h_0$  a korrelációs távolság),

$$R''_{\varepsilon\varepsilon}(\tau) = 2a^2 \varepsilon^2 e^{-a^2 \tau^2} [2a^2 \tau^2 - 1],$$

vagyis

$$R_{rr}(\tau) \approx \frac{\varepsilon^2 a^2}{2c_0^2} e^{-a^2 \tau^2} [1 - 2a^2 \tau^2]. \quad (52)$$

A  $\tau = 0$  helyettesítéssel a reflexiós együttható szórásnégyzetét kapjuk:

$$R_{rr}(0) = M r^2 = \frac{a^2 \varepsilon^2}{2c_0^2} = \frac{\varepsilon^2}{2h_0^2 c_0^2}, \quad (53)$$

továbbá

$$M(|r|) = \frac{|\varepsilon|}{\sqrt{2}h_0c_0} \quad (53a)$$

Az  $R_{rr}(\tau)$  függvény a

$$\tau^* = \frac{1}{\sqrt{2}} h_0 \quad (54)$$

értéknél negatívvá válik és ezután, exponenciálisan lecsengő burkolóval, végig negatív marad. Az elméleti úton nyert (52) képlet megmagyarázza O'Doherty és Anstey empirikus nyert autokorrelációs függvényét (9. ábra). Az idézett cikkben az első gyökhely 0.0002 sec-nál lép fel,  $c_0 \approx 4000$  m/s, tehát  $\tau^* = 0.8$  m, ami az (54) szerint

$$h_0 = 1.13 \text{ m}$$

nagyságrendű korrelációs távolságnak felel meg.

Ha a  $c_0(h)$  sebességfüggvény nem differenciálható, bontsuk a közeget a  $h$  tengely mentén haladva  $\Delta h$  vastagságú rétegekre. Egy  $h$  mélységben levő osztáspont két „oldalán”

$$c_1 = c_0 + \varepsilon(h - \Delta h),$$

$$c_2 = c_0 + \varepsilon(h + \Delta h),$$

vagyis

$$\begin{aligned} r(h) &= \frac{c_2 - c_1}{c_2 + c_1} = \frac{\varepsilon(h + \Delta h) - \varepsilon(h - \Delta h)}{2c_0 + \varepsilon(h - \Delta h) + \varepsilon(h + \Delta h)} = \\ &= \frac{1}{2c_0} \left\{ [\varepsilon(h + \Delta h) - \varepsilon(h - \Delta h)] - \frac{1}{2c_0} [\varepsilon^2(h + \Delta h) - \varepsilon^2(h - \Delta h)] + O\left(\left|\frac{\varepsilon}{c_0}\right|^3\right) \right\}. \end{aligned}$$

Ebben az esetben tehát nyilvánvaló, hogy

$$M(r) = 0.$$

$$\begin{aligned} M(r^2) &= \frac{1}{4c_0^2} \{ M[\varepsilon(h + \Delta h) - \varepsilon(h - \Delta h)]^2 + O(|\varepsilon|^3) \} \approx \\ &\approx \frac{1}{4c_0^2} [2\varepsilon^2 - 2R_{\varepsilon\varepsilon}(2\Delta h)]. \end{aligned} \quad (55)$$

Ha  $2\Delta h \ll 1$  és pl.  $R_{\varepsilon\varepsilon} = \varepsilon^2 e^{-|h\alpha|}$  (amely, a (13) képlettel kapcsolatban elmondottaknak megfelelően, nem folytonosan differenciálható sebesség-inhomogeneitások autokorrelációs függvénye), akkor —  $O(\Delta h^2)$  pontossággal —

$$Mr^2 = \frac{\varepsilon^2 a}{c_0^2} \Delta h. \quad (56)$$

Nézzük most meg a reflexiók együttható autokorrelációs függvényét az előbbi közelítésben:

$$\begin{aligned} R_{rr}(\tau) &= M \frac{1}{4c_0^2} \{ [\varepsilon(h + \Delta h) - \varepsilon(h - \Delta h)][\varepsilon(h + \Delta h + \tau) - \varepsilon(h - \Delta h + \tau)] + O\left(\left|\frac{\varepsilon}{c_0}\right|^3\right) \} \approx \\ &\approx \frac{1}{4c_0^2} [2R_{\varepsilon\varepsilon}(\tau) - R_{\varepsilon\varepsilon}(2\Delta h + \tau) - R_{\varepsilon\varepsilon}(-2\Delta h + \tau)], \end{aligned}$$

vagyis

$$R_{rr}(\tau) \approx -\frac{1}{4c_0^2} (2\Delta h)^2 \frac{R_{ze}(-2\Delta h + \tau) - 2R_{ze}(\tau) + R_{ze}(2\Delta h + \tau)}{(2\Delta h)^2}. \quad (57)$$

Az (57) közelítő formulának az (51) formulával való hasonlósága nyilvánvaló ha meggondoljuk, hogy az (57) jobb oldalán levő törtkifejezés az  $R''(\tau)$  második derivált szokásos digitális közelítése.

### Hullámok visszaverődése és elnyelődése véletlen akusztikus ellenállású rétegsoron

Tételezzük fel, hogy az  $(x, y)$  síkkal párhuzamos  $z=0$  és  $z=L$  térrészen belül a (25a) modellnek megfelelő

$$c = c_0 + \varepsilon(z)$$

sebesség-inhomogeneitással rendelkező,  $L$  vastagságú közeg van, és vizsgáljuk meg a  $z < 0$  féltérről beeső hullámok visszaverődésének és elnyelődésének statisztikai tulajdonságait (feltételezzük, hogy  $L$  az inhomogeneitások korrelációs távolságánál jóval nagyobb).

A közelítő hullámegyenletről indulunk ki:

$$c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2},$$

ahol  $\varphi$  a beeső hullám potenciálja. A  $\varphi = e^{i\omega t} \cdot u(z)$  szokásos feltevéssel élve, az idő-független részt kielégíti az

$$u''(z) + \frac{\omega^2}{c^2} u(z) = 0 \quad (58)$$

egyenletet. Itt

$$c = c_0 + \varepsilon = c_0 \left( 1 + \frac{\varepsilon}{c_0} \right) = c_0 (1 + \mu),$$

ahol bevezettük a

$$\mu(z) = \frac{\varepsilon(z)}{c_0} \quad (59)$$

jelölést. Bevezetve még a

$$k_0 = \frac{\omega}{c_0} \quad (60)$$

„átlagos” hullámszámot, az (58) hullámegyenletben szereplő  $\frac{\omega^2}{c^2}$  a következő alakban írható:

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k_0^2 \frac{1}{(1 + \mu)^2} = k_0^2 [1 - 2\mu + 3\mu^2 + O(|\mu|^3)],$$



a hullámeqyenletnek pedig a következő alakjához jutunk :

$$\left[ \frac{d^2}{dz^2} + k_0^2 \right] u(z) = -k_0 \delta(z) u(z), \quad (61)$$

ahol

$$\delta(z) = -2\mu(z) + 3\mu^2(z) + O(|\mu|^3). \quad (62)$$

A (61)-nek megfelelő Fredholm típusú integrálegyenlet (KAY és SILVERMAN, 1968) :

$$u(z) = \exp [ik_0 z] - k_0^2 \int_0^L G(z|z') \delta(z') u(z') dz', \quad (63)$$

ahol a  $G(z|z')$  Green-függvény részletes alakja :

$$G(z|z') = \frac{1}{2ik_0} \exp [ik|z - z'|]. \quad (64)$$

A (63) integrálegyenlet megoldása, a szokásos módon, Neumann-sorral nyerhető :

$$\begin{aligned} u(z) &= \exp [ik_0 z] + \frac{ik_0}{2} \int_0^L \exp [ik_0|z - z_1|] \exp [ik_0 z_1] \delta(z_1) dz_1 - \\ &- \frac{k_0^2}{4} \int_0^L \int_0^L \exp [ik_0|z - z_1|] \exp [ik_0|z_1 - z_2|] \exp [ik_0 z_2] \delta(z_1) \delta(z_2) dz_1 dz_2 + \dots = \\ &= \exp [ik_0 z] + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{ik_0}{2} \right)^n \int_0^L \int_0^L \dots \int_0^L \exp [ik_0|z - z_1|] \exp [ik_0|z_1 - z_2|] \dots \\ &\dots \exp [ik_0|z_{n-1} - z_n|] \exp [ik_0 z_n] \delta(z_1) \delta(z_2) \dots \delta(z_n) dz_1 \dots dz_n. \end{aligned} \quad (65)$$

A  $T$  transzmissziós és  $R$  reflexiós együtthatót, Kay és Silverman nyomán, a következőképpen definiáljuk :

$$\left. \begin{aligned} u(z) &= T \exp [ik_0 z], & \text{ha } z \geq L \\ u(z) &= \exp [ik_0 z] + R \exp [-ik_0 z], & \text{ha } z < 0. \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

A (65) és (66) egyenletek összevetésével

$$\begin{aligned} T &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{ik_0}{2} \right)^n \int_0^L \int_0^L \dots \int_0^L \exp [-ik_0 z_1] \exp [ik_0|z_1 - z_2|] \dots \\ &\dots \exp [ik_0|z_{n-1} - z_n|] \exp [ik_0 z_n] \delta(z_1) \delta(z_2) \dots \delta(z_n) dz_1 dz_2 \dots dz_n, \end{aligned} \quad (67)$$

és hasonlóképpen

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{ik_0}{2} \right)^n \int_0^L \int_0^L \dots \int_0^L \exp [ik_0 z_1] \exp [ik_0 |z_1 - z_2|] \dots \exp [ik_0 |z_{n-1} - z_n|] \cdot \exp [ik_0 z_n] \delta(z_1) \delta(z_2) \dots \delta(z_n) dz_1 dz_2 \dots dz_n. \quad (68)$$

A reflexiók együttható (68) alatti kifejezésének komplex konjugáltját véve az  $RR^*$  szorzatot képezve és elhagyva az  $O(|\delta|^3)$  tagokat, az  $|R|^2$  várható értékének becslését nyerjük:

$$\begin{aligned} M(|R|^2) &= M(RR^*) \approx \frac{l_0^2}{4} M \int_0^L \int_0^L \exp [2ik_0 z_1] \exp [-2ik_0 z_2] \delta(z_1) \delta(z_2) dz_1 dz_2 = \\ &= \frac{l_0^2}{4} \int_0^L \int_0^L \exp [-2ik_0(z_2 - z_1)] R_{\delta\delta}(z_1 - z_2) dz_1 dz_2 \approx \\ &\approx \frac{l_0^2}{4} \int_0^L dz \int_{-\infty}^{\infty} \exp [-2ik_0 x] R_{\delta\delta}(x) dx = \frac{l_0^2 L}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \exp [-2ik_0 x] R_{\delta\delta}(x) dx. \quad (69) \end{aligned}$$

Megfigyelhetjük, hogy a (69) összefüggés jobboldalán levő integrál, egy konstans szorzótól eltekintve, éppen a  $\delta$  véletlen tér  $W_{\delta\delta}$  teljesítményspektrumának a  $(2k_0)$  hullámszámhoz tartozó értéke:

$$M(|R|^2) = \frac{l_0^2 L \pi}{2} W_{\delta\delta}(2k_0). \quad (70)$$

A (62) és (59) definíciók felhasználásával

$$R_{\delta\delta} = 4R_{\mu\mu} + O(|\mu|^3) = \frac{4R_{\varepsilon\varepsilon}}{c_0^2} + O\left(\left|\frac{\varepsilon}{c_0}\right|^3\right)$$

és, az  $O\left(\left|\frac{\varepsilon}{c_0}\right|^3\right)$  tagoktól eltekintve,

$$M(|R|^2) = \frac{2L\pi l_0^2}{c_0^2} W_{\varepsilon\varepsilon}(2k_0) = \frac{2L\pi\omega^2}{c_0^4} W_{\varepsilon\varepsilon}\left(\frac{2\omega}{c_0}\right). \quad (71)$$

Az  $R_{\varepsilon\varepsilon}(\tau) = \varepsilon^2 \exp [-2\alpha|\tau|]$  alakú korrelációs függvény feltételezésével például a (9) és (10) szerint a teljesítményspektrum

$$W_{\varepsilon\varepsilon} = \frac{\varepsilon^2}{\pi} \frac{2\alpha}{\omega^2 + (2\alpha)^2} \quad (72)$$

alakú és

$$M(|R|^2) = \frac{2L\pi\omega^2}{c_0^4} W_{\varepsilon\varepsilon}(2k_0) = \frac{\alpha L \varepsilon^2}{c_0^2} \frac{l_0^2}{\lambda_0^2 + \alpha^2}, \quad (73)$$

ahol  $\frac{1}{2\alpha} = h_0$  az  $\varepsilon$  inhomogeneitások korrelációs távolsága. A reflexiós együtthatónak ebből az alakjából egyszerű számítással kapjuk, hogy az inhomogeneitások a

$$k \cdot h_0 \gg 1 \quad (74)$$

feltételt kielégítő, nagyfrekvenciás hullámokat majdnem teljesen visszaverik. A „more up, less down” elv értelmében (O'DOHERTY és ANSTEY, 1971) azt várhatjuk, hogy ugyanezek a frekvenciák a terjedés folyamán jelentékenyen elnyelődjenek. Szeizmikus viszonyok között tehát pl.  $c_0 = 3000$  m/s átlagsebességet és  $h_0 = 3$  m korrelációs távolságot feltételezve (elég nagy megtett úton) ez a 160 Hz feletti frekvenciakomponensek gyakorlatilag teljes elnyelődését jelenti.

Mielőtt a véletlen rétegsorok hullámáteresztési tulajdonságainak részletes vizsgálatára kitérnénk, megemlítjük, hogy a reflexiós operátor (73) becslése a reflexiós együtthatók sorozatának empirikusan kapott teljesítményspektrumára is bizonyos mértékig magyarázatot ad (10. ábra), hiszen a reflektált energia jórésze (az ún. egyszeres-energia) a reflexiós együtthatók sorozatával történő konvolúcióból ered (PETERSON *et al.*, 1950).

Az előbbi heurisztikus megfontolások után térjünk rá a véletlen akusztikus ellenállású közegek transzmissziós tulajdonságainak vizsgálatára. A (73) szerint

$$M(|T|^2) \approx 1 - M(|R|^2) = 1 - \frac{2L\pi\omega^2}{c_0^4} W_{\varepsilon\varepsilon}(2k_0). \quad (75)$$

Nem túl nagy  $L$  út esetén

$$M(|T|^2) \approx \exp[-M(|R|^2)] = \exp\left[-\frac{2\pi L}{c_0^4} \omega^2 W_{\varepsilon\varepsilon}(2k_0)\right] \quad (76)$$

a (72) alakú teljesítményspektrum feltételezésével

$$M(|T|^2) \approx \exp\left[-\frac{\alpha L \varepsilon^2}{c_0^2} \cdot \frac{l_0^2}{k_0^2 + \alpha^2}\right]. \quad (77)$$

Az  $\frac{\alpha \varepsilon^2}{c_0^2} \frac{l_0^2}{k_0^2 + \alpha^2}$  kifejezés a kérdéses közegben a terjedés folyamán a véletlen inhomogeneitásokon szétszóródó energia csillapodását leíró frekvenciafüggő abszorpciós együttható. Az abszorpciós együttható értéke adott véletlen inhomogeneitású közegben: *zérus frekvenciánál 0, kis frekvenciáknál  $\omega^2$ -tel növekszik, nagy frekvenciákon az elnyelődés a frekvenciától gyakorlatilag függetlenné válik.*

Rögzített frekvencia mellett az abszorpciós együttható:

a)  $\varepsilon^2$ -tel, az inhomogeneitások szórásnégyzetével egyenes arányban van; (78a)

b) az átlagsebesség négyzetével fordított arányban van; (78b)

c) elég nagy frekvenciáknál a korrelációs távolsággal fordított arányban van. (78c)

A (76) egyenlet a reflexiós együtthatók sorozatának teljesítményspektrumával is egyszerűen kifejezhető. Valóban, a korábban levezetett

$$R_{rr}(\tau) = -\frac{R''_{\varepsilon\varepsilon}(\tau)}{4c_0^2} \quad (51)$$

reláció Fourier-transzformáltját véve,

$$W_{rr}(\omega) = \frac{\omega^2 W_{\epsilon\epsilon}(\omega)}{4\epsilon_0^2} \quad (79)$$

Ebbe az egyenlőségbe  $\omega$  helyett  $2k_0$ -t téve, és (76)-ba helyettesítve, az

$$M(|T|^2) = \exp[-2\pi L W_{rr}(2k_0)] \quad (80)$$

törvényszerűséget kapjuk, ami azt fejezi ki, hogy *egy rétegsor transzmissziós függvénye a reflexiós együtthatók teljesítményspektrumával egyszerű kapcsolatban van.*

A transzmissziós operátor (80) kifejezése — a szintetikus szeizmogramok elméletével levezetett — közelítő képlettel (O'Doherty és Anstey, 1971) analógiát mutat. Az idézett szerzők szerint ugyanis

$$|T(\omega)| = \exp[-R(\omega) \cdot t]. \quad (81)$$

(Itt  $|T(\omega)|$  az átengedett jel amplitúdóspektruma,  $R(\omega)$  a reflexiós együtthatók idő szerint vett sorozatának teljesítményspektruma,  $t$  a terjedési idő.)

Porózus közegben, amint láttuk (vö. 34), a porozitásból eredő inhomogeneitás szórásnégyzete

$$\epsilon^2 = \text{konst. } \Phi(1 - \Phi),$$

tehát az előbbi (78a, b) törvényszerűség értelmében, figyelembe véve, hogy az átlagsebesség a porozitás monoton csökkenő függvénye: porózus közegben, ultrasonikus frekvenciánál, az abszorpciós együttható viselkedését  $\Phi(1 - \Phi)$  határozza meg, ahol  $\Phi$  a porozitás. A  $\Phi(1 - \Phi)$  függvény  $\Phi = 0$  és  $\Phi = 1$  értékeknél zérussá válik, maximumát a  $\Phi = 0.50$  porozitásnál veszi fel. Ez az eredmény összhangban van SHUMWAY (1960) mérési eredményeivel (11. ábra), és indokoltá teszi annak feltételezését, hogy az ultrahangok porózus közegben való elnyelődését részben az általunk vázolt mechanizmus okozza.

Az idézett IRODALMAT lásd az angol szöveg végén.

### A SZERKESZTŐ MEGJEGYZÉSE

A jel—zaj viszony javítására való törekvés a reflexiós szeizmikus kutatással egyszerre született. Táblás vidékek reflexiós kutatásánál a ground-roll, valamint a többszörös visszaverődések a zaj fő komponensei. Hazai kutatásunk, amely kizárólag táblás vidékek irodalmára támaszkodhat, e két zajtípusnak nagy — sőt néha feleslegesen nagy — figyelmet szentelt, de a zajkomponenseknek a kutatott összletekből származó részét meglehetősen elhanyagolta (többek között azért, mert az előbbieket sem sikerült megoldania).

A szerző — nagyon helyesen — az utóbbi problémára fordítja figyelmét és végső célja az aljzat reflexiós kutatása.

Hús esztendő telt el azóta, hogy az aljzat sajátos földtani alkatából eredő *diffúz visszaverődés* problémája első ízben felvetődött (Szénás—Ádám, 1953), de hiába járta be a szeizmika azt a nagy utat, amely jelenlegi digitális magaslataihoz vezetett, a kérdés ma sincs megnyugtatóan megoldva. Amíg azonban hús évvel ezelőtt a kérdést csak ösztönösen, kvalitatíve és a legprimitívebb analóg technikával lehetett megközelíteni, most a digitális út nemcsak kötelezően újra felveti a problémát, hanem megoldásában is esetleg sikert ígér.

A jelenlegi cikk egy sorozat első tagja, amely — amint a szerző céloz is rá — végül a háromdimenziós megoldáson keresztül az aljzatnak a hullámhossz nagyságrendjébe eső egyenetlenségeit is exakt, matematikai, géppel számítható módon kívánja tárgyalni.

A szerkesztő



Г. КОРВИН

## ТЕОРИЯ СЛУЧАЙНЫХ СРЕД И НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ РАСПРОСТРАНЕНИЯ СЕЙСМИЧЕСКИХ И УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ВОЛН

Работа представляет собой первую часть серии статей, рассматривающих распространение волн в случайных средах. Анализируется влияние скоростных неоднородностей малых амплитуд с величинами, меньшими длины волн, на наблюдаемую волновую картину.

Работа подразделяется следующим образом. Сначала дается короткое описание случайных функций, а затем излагается современная теория трехмерных случайных полей.

С использованием случайных полей была построена математическая модель неоднородного распределения скоростей. Обнаружено, что неоднородности среды, величина которых меньше длины волн, приводят к флуктуации времен вступления волн, причем разброс времен вступлений пропорционален квадрату корню пройденного пути. Использование полученных результатов применительно к ультразвуковым волнам и пористым средам приводит к новому выведению известной формулы Wyllie и дает объяснение интересной зависимости, обнаруженной при анализе расхождений результатов сейсмо- и акустического каротажа.

Рассматриваются статистические особенности серии коэффициентов отражения для случайных разрезов и определяется автокорреляционная функция этой серии.

В заключение анализируются отражающие и пропускающие свойства случайных разрезов, причем выводятся следующие основные закономерности.

— Случайная среда поглощает (точнее: *рассеивает*) распространяющиеся в ней волны в зависимости от частоты. Передаточная функция, зависящая от частоты, имеет простую связь с спектрами мощности скоростных неоднородностей.

— При постоянных частотах в случайной среде коэффициент поглощения прямо пропорционален квадрату разброса неоднородностей; обратно пропорционален квадрату средней скорости, и, при довольно больших частотах, обратно пропорционален корреляционному расстоянию неоднородностей. Теоретические результаты иллюстрируются эмпирическими зависимостями, взятыми из литературы, посвященной физическим свойствам горных пород и прикладной сейсмике.

В настоящей работе выбрана одномерная модель распространения волн. В продолжении работы предполагается рассматривать трехмерные проблемы (проблематику диффузивного отражения от поверхностей случайного характера, корреляционные особенности сейсмических помех в пространстве и времени, и т. д.).

