

AN ANALYSIS OF THE PROPAGATION OF SOUND WAVES IN POROUS MEDIA BY MEANS OF THE MONTE CARLO METHOD

G. KORVIN-I. LUX*

Introduction

In the last two decades an abundant literature has been published on the determination of sound velocity in porous media. The problem has been tackled both from theoretical and experimental side. The discrepancies which appear between theoretical considerations are mainly due to the difference in the number of parameters and the assumptions about the physical mechanism involved. As for experimental findings, their range of validity and accuracy depend on the experimental conditions and techniques. Extensive investigations have been reported on sound velocity measurements in marine sediments (SHUMWAY 1960, NAFFÉ and DRAKE 1957). Among the empirical formulae proposed the most simple is that of WYLLIE-GREGORY-GARDNER (WYLLIE et al., 1956) which has found wide-spread application in applied geophysics. According to this formula:

$$\frac{1}{V_{av}} = \frac{\Phi}{V_{fl}} + \frac{1-\Phi}{V_{sol}},$$

where V_{av} is average sound velocity in the porous medium, V_{fl} and V_{sol} are velocities in the fluid and solid phase, respectively, and Φ denotes porosity. The physical meaning of this formula is that acoustic waves spend Φ per cent of the whole travel time in fluid, i.e. the waves propagate along a straight line in a porous medium. This assumption however, fails to take into account the basic principle of wave propagation, viz. that a wave always choose the path of the shortest travel-time between two given points (Fermat's principle), which is, in our case, not necessarily a straight line.

The aim of the present paper is to try to find a modification of Wyllie's formula which would obey Fermat's principle. The hypothesis that Fermat's principle be applicable for waves with wave length larger than the characteristic size of the inhomogeneities of the medium had been already put forward by WYLLIE et al. (1958).

Manuscript received: 30, 9, 1971.

* Roland Eötvös Geophysical Institute, Budapest.

The method

The problem was analysed in a two-dimensional approximation with a Monte Carlo simulation method. Random models of porous media, of a given area and predetermined porosity, were generated by computer and the path requiring the shortest time was searched by means of Ford's algorithm (cf. e.g. KAUFMAN, 1968). For a given velocity ratio 8 different porosity values were taken and for each porosity 50 models were computed. After this an explicit functional relationship best describing the experimental results has been established.

A straightforward approximation of porous media can be obtained if one considers a hexagonal lattice where each single hexagon is randomly filled with solid or fluid phase. In this model the wave can "move" from the centre of a hexagon to the centre of some neighbouring one and so, if a starting and a terminal point are given, the average velocity can be obtained by dividing the distance of these points by the time required to pass along the shortest broken line connecting them. A serious drawback of this method is that it allows the waves to propagate only in six directions (while, in reality, no such restriction exists).

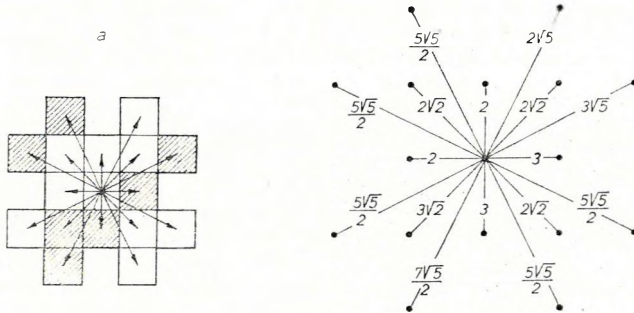


Fig. 1 a—a square and its "neighbours"; b—a portion of the graph corresponding to a (fictitious time scale, $v=1/2$)

1. ábra. a — egy négyzet „szomszédai”; b — az a-nak megfelelő gráf részlete (fiktív időskála, $v=1/2$)

Рис. 1. а) квадрат с «соседами»; б) часть графа, соответствующего квадрату на рис. а (фигтивная шкала времени — $v=1/2$)

In the present investigations we have adopted the more realistic square lattice approximation, where from each element the wave can continue its path in 16 directions (see Fig. 1a). Since the wave is imagined as propagating from centre to centre, it is enough to represent squares by their centres. Let us connect each centre by the 16 adjacent ones (i.e. with those points where the wave can "move in one step"). So, we obtain a configuration—a so-called graph—consisting of points and lines. Points are called vertices and the lines connecting them edges in the usual terminology of the theory of graphs. We attach to each edge the transit time necessary for the wave to make the distance between the points, and this value will be called the length of the edge. A portion of the graph corresponding to Fig. 1a is shown in Fig. 1b.

In order to construct porous media we generated uniformly distributed random numbers between 0 and 1 and the individual squares of the lattice were filled with fluid or solid phase according to whether the generated number had been less or greater than the porosity given. The generation of random numbers was performed with the method described by ADAMS and DENMAN (1966).

Each model consisted of 15×30 squares; for starting and terminal points of the path the two end-points of the longer axis of symmetry were taken (Fig. 2).

All computations reported in this paper were performed on the MINSK-32 computer of the ELGI.

Theoretical considerations

Let us denote the quotient $\frac{V_{fl}}{V_{sol}}$ by v and be

$$v_a = \frac{V_{fl}}{V_{av}} = G(v, \Phi).$$

We shall be concerned in this paper in the determination of the explicit form of the function $G(v, \Phi)$. It will be required that function $G(v, \Phi)$ should satisfy the following conditions:

1. $G(v, 0) = v$ — when no fluid-phase is present, $v_a = v$ i.e. $V_{av} = V_{sol}$

2. $G(v, 1) = 1$ — in the absence of solid medium $v_a = 1$, i.e. $V_{av} = V_{fl}$

3. $G(1, \Phi) = 1$ — i.e. if $V_{sol} = V_{fl}$ then $V_{av} = V_{sol} = V_{fl}$

4. $v \leq G \leq 1$ — i.e. the average velocity lies between the velocities of the two phases.

It must be noted that inequality 4 is violated for large ($\Phi \geq 60\%$) porosities. In this case, namely, the sound velocity in the fluid-saturated medium may be less than in the fluid (HAMILTON 1956, SHUMWAY 1960, OFFICER 1958). Our results, therefore, will only apply for porosities less than 60 per cent but, of course, this covers the range most frequently encountered in geophysical practice.

An inherent approximation of the model is that material properties i.e. density, compressibility etc. of the individual phases are not taken into account.

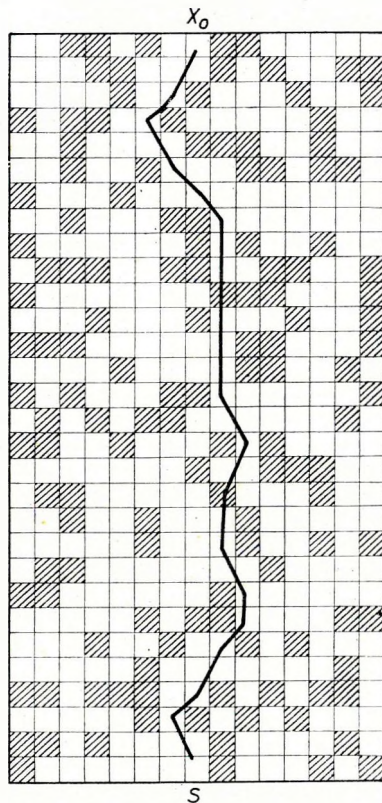


Fig. 2 A model with the corresponding shortest path ($\Phi = 0,3$)

2. ábra. Egy modell és a hozzá tartozó legrövidebb út ($\Phi = 0,3$)

Рис. 2. Модель с соответствующим кратчайшим путем ($\Phi = 0,3$)

The function $G(\nu, \Phi)$ will be sought for in the following form:

$$G(\nu, \Phi) = \frac{F(\nu, \Phi)\Phi + \nu(1 - \Phi)}{F(\nu, \Phi)\Phi + (1 - \Phi)},$$

where $F(\nu, \Phi)$ is some, for the time being unspecified, function. This functional form automatically satisfies conditions 1-4. For the special choice $F(\nu, \Phi) \equiv 1$ we receive back Wyllie's formula, since in this case

$$G(\nu, \Phi) = \frac{V_{fl}}{V_{av}} = \frac{\Phi + \nu(1 - \Phi)}{\Phi + 1 - \Phi} = \Phi + \frac{V_{fl}}{V_{sol}}(1 - \Phi),$$

$$\text{i.e. } \frac{1}{V_{av}} = \frac{\Phi}{V_{fl}} + \frac{1 - \Phi}{V_{sol}}.$$

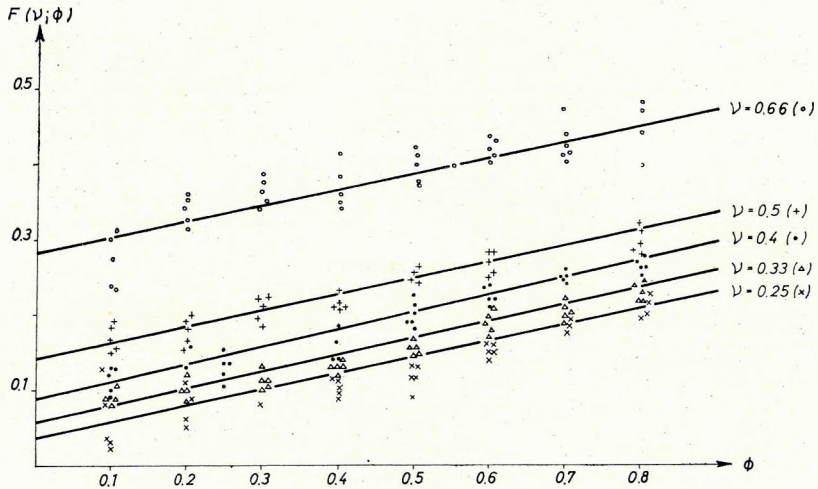


Fig. 3 Experimental values of function $F(\nu, \Phi)$ with the fitting straight lines. Each points plotted is the average of ten experiments

3. ábra. Az $F(\nu, \Phi)$ függvény értékei az illeszkedő egyenesekkel. Minden feltüntetett pont tíz kísérlet átlaga

Рис. 3. Величины функции $F(\nu, \Phi)$ с соответствующими прямыми. Каждая точка представляет собой среднюю величину результатов 10 вычислений

Results

The experiments were performed with $\nu = 0,66; 0,5; 0,4; 0,33; 0,25$, for each velocity ratio the porosity changed from 0,1 to 0,8 in 0,1 steps. For any single pair (ν, Φ) 50 different models were generated.

The calculated values of the function $F(\nu, \Phi)$ are plotted in Fig. 3, where each point represents the average of 10 models. The values obtained are, for a given ν , in a linear relationship with porosity, i.e.

$$F(\nu, \Phi) \approx a(\nu) \cdot \Phi + b(\nu).$$

Fitting was performed according to the least mean square criterion. The slopes $a(\nu)$ and constant terms $b(\nu)$ figuring in the equation of the straight lines are shown in Fig. 4a and 4b, respectively. The slope of the straight lines is approximately constant

$$a(\nu) \approx 0,22$$

while the term $b(\nu)$ appears to have an exponential form:

$$b(\nu) \approx B(e^{k\nu} - 1).$$

It is, of course, possible, that the constant 0,22 and the parameters of the above exponential form of function $b(\nu)$ are not of universal validity but they are in connection with the special symmetries and size of the applied lattice model

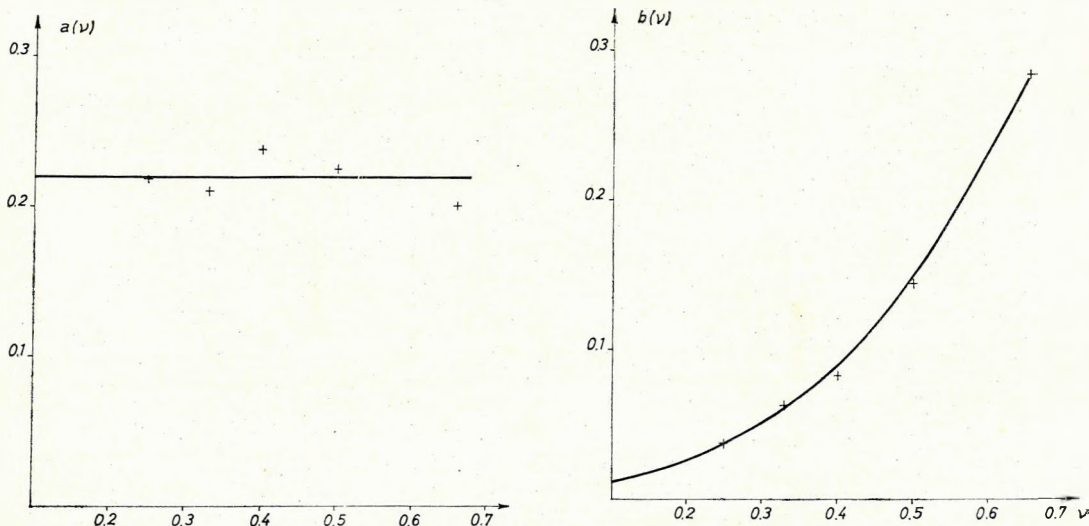


Fig. 4 a — the slope of the straight line $F(\nu, \Phi)$; b — the constant term of the straight line $F(\nu, \Phi)$

4. ábra. a — az $F(\nu, \Phi)$ egyenes iránytangense; b — az $F(\nu, \Phi)$ egyenes tengelymetszete

Рис. 4. а) Угловой коэффициент прямой $F(\nu, \Phi)$; б) Осевое сечение прямой $F(\nu, \Phi)$

Further possibilities of the method

In the computations reported, the effect of reflections and attenuation was not taken into account. Consequently, in actual measurements the arrival time of the first (recorded) pulse would not necessarily agree with the computed value, it will be greater. It was also neglected that the initial wave-form is not a spike and its shape can change during propagation due to the above-mentioned factors. The method of finding the shortest path can be improved so that it should yield the incident energy as well, by decreasing the energy at each phase-boundary according to the reflection coefficient and taking geometrical scattering into account. This version of the method may be useful for a Monte Carlo investigation of the occurrence of phase-skippings in sonic logging.

A further possibility is to extend the model to three dimensions. The method can be also adapted to the case of a medium consisting of many components, where the validity of the time-average equation is also taken for granted (TEGLAND, 1970). By an appropriate modification of the Monte Carlo method, in the generation of porous media, besides porosity, also the grain size distribution can be taken into account.

Summary

We have been concerned with the determination of the average velocity of sound waves propagating in porous media. Two-dimensional random models of porous media were generated by computer and the shortest path of acoustic waves between two given points was determined by means of Ford's algorithm. As a result of our experiments we obtained the following formula:

$$\frac{1}{V_{av}} = \frac{0,22}{V_{fl}} \Phi + \frac{1-\Phi}{V_{sol}} + \frac{b \left(\frac{V_{fl}}{V_{sol}} \right)}{V_{fl}}$$

$$1 - 0,78 \Phi + b \left(\frac{V_{fl}}{V_{sol}} \right)$$

where V_{av} = average velocity in the porous medium,

V_{fl} = velocity in the fluid phase,

V_{sol} = velocity in the solid phase,

$b \left(\frac{V_{fl}}{V_{sol}} \right)$ = is the exponential function illustrated in Figure 4b.

Appendix: Ford's algorithm for finding the shortest path of a graph

Suppose that we are given a connected graph*, to each edge of which there corresponds some positive distance value. Let the distance of disconnected vertices be $+\infty$. Let us denote the starting point of the path by x_0 , its terminal point by S , and let the other vertices be, in an arbitrary order, $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$.

We are going to attach a so-called potential value to each vertex, i.e. some value $\mu(x_i)$ to vertex x_i . The potential will be initially zero, while at the end of the algorithm it will be equal to the minimum distance from x_0 of the vertices in question.

In each step of the algorithm the graph will be split into two parts, let the subgraphs be denoted by A and B , respectively. Subgraph A will consist of those vertices whose minimum distance from X_0 had been already determined, and B of those for which this had not been done, i.e. whose potentials are not yet equal to the minimum distance. In the first step**

$$x_0 \in A; \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_k, S\} \in B.$$

In course of the procedure subgraph A will be extended by elements from B until S itself is included in A . The extension of A with one more vertex is done as follows: let, in general,

$$x_\alpha, x_\beta, \dots, x_n \dots \in A,$$

$$x_\alpha, x_\beta, \dots, x_\nu \dots \in B$$

and denote the distance of vertices x_n, x_ν by $\tau_{n\nu}$. Let us form now the value

$$\varepsilon_{n\nu} = \mu(x_n) + \tau_{n\nu}$$

for each pair of vertices $x_n \in A, x_\nu \in B$ and seek the value

$$E_{m\mu} = \min_{n, \nu} \varepsilon_{n\nu}.$$

The corresponding vertex x_μ will be inserted into subgraph A and its potential will be $\varepsilon_{m\mu}$. We have to show that the potential of any vertex in A will give the length of the shortest path connecting the given vertex with x_0 .

Let the number of vertices belonging to A be l . If $l = 1$, then $A = \{x_0\}$ and $\mu(x_0) = 0$ for which the statement holds. Assume now, that

$$A = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{l-1}\}$$

and suppose the validity of the statement for these vertices. We proceed to show that the potential of the point x_μ which results according to the rules of the algorithm will also equal the length of the minimal path. Indeed,

$$\mu(x_\mu) = \mu(x_m) + \tau_{m\mu} = \min_{n, \nu} (\mu(x_n) + \tau_{n\nu}) \quad x_n \in A, x_\nu \in B.$$

* As to the basic principles and terminology of graph theory we refer to the monographs of KAUFMAN (1968) or BERGE (1957).

** The notation $x \in A$, frequently used in set-theory, means that x belongs to set A .

Since, by the induction hypothesis $\mu(x_n)$ is the length of the shortest path from x_0 to x_n , $\mu(x_n) + \tau_{nr}$ will be the length of some path from x_r through x_n to x_0 . The value

$$\min_r (\mu(x_n) + \tau_{nr})$$

is the length of a path which starts from a vertex in B , goes through x_n and terminates in x_0 . Taking now the minimum in n we obtain the distance from x_0 to the nearest point in B , which was to be proved. The algorithm is finished as soon as vertex S gets incorporated to A .

There remains the problem how to determine the path itself. Let us choose vertex x_i for which

$$\mu(S) - \mu(x_i) = \tau_{Sx_i}$$

(it is possible, of course, that more than one such vertices exist which means that there are many, equally optimal paths), then x_i will precede S in the shortest path; we repeat then this procedure for x_i instead of S and obtain the next vertex etc., until x_0 will be reached.

REFERENCES

- ADAMS, R. N.—DENMAN, E. D., 1966: Wave propagation and turbulent media. American Elsevier Publ. Co. New York, pp. 50–51.
- BERGE, C., 1957: Théorie des graphes et ses applications. Dunod, Paris.
- HAMILTON, E. L., 1956: Low sound velocities in high-porosity sediments. *Journal of Acoustical Soc. Am.* XXVIII. No. 1. p. 16.
- KAUFMANN, A., 1968: Az operációkutatás módszerei és modelljei. Műszaki Könyvkiadó, Budapest. (Hungarian translation of the original: *Méthods et modèles de la recherche operationelle*, Dunod, Paris).
- NAFE, J. E.—DRAKE, C. L., 1957: Variation with depth in shallow and deep water marine sediments of porosity, density and the velocities of compressional and shear waves. *Geophysics*, XXII. No. 3. pp. 523–552.
- OFFICER, C. B., 1958: Introduction to the theory of sound transmission (with application to the ocean). McGraw-Hill, New York-Toronto-London, pp. 257–260.
- SHUMWAY, G., 1960: Sound speed and absorption studies of marine sediments by a resonance method. I, II. *Geophysics*, XXV. No. 2. pp. 451–467, No. 3. pp. 659–682.
- TEGLAND, E. R., 1970: Sand-shale ratio determination from seismic interval velocity. 23-rd Annual meeting of SEG and AAPG, Dallas, March 8–10, 1970.
- WYLLIE, M. R. J.—GREGORY, A. R.—GARDNER, L. W., 1956: Elastic wave velocities in heterogeneous and porous media. *Geophysics*, XXI. No. 1, pp. 41–70.
- WYLLIE, M. R. J.—GREGORY, A. R.—GARDNER, G. K. F., 1958: An experimental investigation of factors affecting elastic wave velocities in porous media. *Geophysics*, XXIII, No. 4. pp. 459–493 (480–484).

HANGHULLÁMOK TERJEDÉSÉNEK VIZSGÁLATA PORÓZUS KÖZEGBEN MONTE CARLÓ MÓDSZERREL

KORVIN GÁBOR—LUX IVÁN

A dolgozatban a porózus közegben terjedő akusztikus hullám átlagsebességének a porózitástól való függését vizsgáltuk. Feltételeztük, hogy a hullámhossznál jóval kisebb inhomogenitások esetére is alkalmazható Fermat-elve, vagyis a hullám a porózus közeg két pontja között mindig a legrövidebb időt követelő utat választja.

A porózus közeg egy adott részét négyzetrácsal közelítettük, amelyet Monte Carlo módszerrel véletlen módon töltöttünk ki — a porózitásnak megfelelően — folyadék, ill.

szilárd fázissal. A kapott modellben azután az operációkutatásból ismert Ford-algoritmussal határoztuk meg a legrövidebb utat. A két fázis sebességarányának 0,66; 0,5; 0,4; 0,33; 0,25 értékeire számítottunk modelleket a $\Phi=0,1; 0,2; \dots; 0,8$ porozitásértékekre. Minden sebességarányra és porozitásértékre 50–50 modellt generáltunk és az átlagsebesség változásának statisztikus viselkedését a sebességarány és a porozitás függvényében határoztuk meg. A számításokat MINSZK–32 számítógépen végeztük. A kísérletek eredményeképpen a következő formulához jutottunk;

$$\frac{1}{V_a} = \frac{\frac{0,22}{V_f} \Phi + \frac{1-\Phi}{V_{sz}} + \frac{b \left(\frac{V_f}{V_{sz}} \right)}{V_f}}{1 - 0,78 \Phi + b \left(\frac{V_f}{V_{sz}} \right)}$$

- ahol V_a a közegre vonatkozó átlagsebesség
 V_f a folyadékfázisra vonatkozó átlagsebesség
 V_{sz} a szilárd fázisra vonatkozó átlagsebesség
 $b \left(\frac{V_f}{V_{sz}} \right)$ a 4b ábrán látható, exponenciális menetű függvény.

АНАЛИЗ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗВУКОВЫХ ВОЛН В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ ПО МЕТОДУ МОНТЕ КАРЛО

Г. КОРВИН—И. ЛУКС

Постановка проблемы

За последнее десятилетие в ряде работ рассматривалась задача определения скорости распространения акустических волн в пористых средах. Решение задачи аппроксимировалось как с теоретической, так и с экспериментальной стороны. Расхождения полученных теоретических результатов вызваны различием учтенных параметров и допущенных физических механизмов (OFFICER, 1958; Петкевич—Вербицкий, 1970). Область действия результатов, полученных экспериментальным путем, определяются условиями проведения экспериментов. Большой объем экспериментов был проведен для определения скоростей волн в морских осадках. (SHUMWAY, 1960, NAPE и DRAKE, 1957.) Наиболее простое по форме выражение, полученное по экспериментам, предложено WYLLIE—GREGORY—GARDNER (WYLLIE и др., 1956). При вычислениях чаще всего применяется именно эта формула:

$$\frac{1}{V_{cp}} = \frac{\Phi}{V_{жс}} + \frac{1-\Phi}{V_T}$$

где V_{cp} — средняя скорость в пористой среде, $V_{жс}$ и V_T — скорости в среде жидкой и твердой фазы, соответственно и Φ — пористость. Формула выражает, что в пористой среде акустическая волна проводит $\Phi\%$ от всего времени своего пробега в жидкости, что однозначно с тем, что в пористой среде она также распространяется прямолинейно. Однако, это допущение не учитывает основного закона распространения волн, по которому между двумя любыми точками волна пробегает по пути, требующему наименьшего времени (принцип Фермата), а в нашем случае это не обязательно прямая линия.

Цель нашей работы сводится к видоизменению формулы Вилли с таким расчетом, чтобы она удовлетворила и принципу Фермата. Гипотеза о возможности применения при пористой среде принципа Фермата для волн, длина которых превосходит характерные размеры неоднородностей, была предложена WYLLIE и др. (1958).

Метод, применявшийся для решения проблемы

Поставленная проблема анализировалась с использованием метода Монте Карло, в двумерном приближении. При помощи ЭВМ была создана пористая модель с заданными поверхностью и пористостью и с случайным распределением. Путь между двумя точками, требующий наименьшего времени для пробега, находился при помощи алгоритма Форда (см. напр. KAUFMANN, 1968). Под пористостью подразумевается пропорция поверхности жидкости на заданной плоскости. Вычисления проводились для каждого скоростного соотношения с 8 величинами пористости на 50 моделях каждое. Для полученных таким образом результатов выбирались наиболее подходящие формы явных функций.

В первом приближении заданная плоскость разбивалась гексагональной решеткой на шестиугольники, которые заполнялись случайно жидкостной и твердой фазой. Предполагалось, что из центра шестиугольника волна может перейти по прямой линии к центру соседнего шестиугольника; при этом средняя скорость получается путем деления расстояния между двумя точками на время, необходимое для пробега ломаной линии, соединяющей заданные таким образом начальную и конечную точки. Недостаток этой модели заключается в том, что из одной точки волна может распространяться только в шести направлениях (в то время как в действительности, само собой разумеется, это направление может быть любым).

Во втором приближении подобным образом применялась квадратная решетка, из элементов которой волна может распространяться по 16 направлениям, как это показано на рис. 1/а. Поскольку предполагается, что волна распространяется от центра до центра, четырехугольники могут быть представлены их центрами. Свяжем каждый центр с соседними с ним 16 остальными (в которые волна поступает «одним шагом»). Таким образом получается так назыв. граф, состоящий из пунктов и прямых. Прямые, связывающие точки графа называются по принятой терминологии дугами графа. К каждой дуге приурочивается время, необходимое для пробега волной расстояния между двумя точками и это называется длиной дуги или расстоянием между двумя пунктами. В этом графе предстоит определить серию наиболее коротких дуг, связывающих начальную точку с конечной. Часть графа, соответствующего рис. 1/а показана на рис. 1/б.

Пористая среда имитировалась путем случайной генерации (с равномерным распределением) чисел от 0 до 1, причем отдельные элементы заполнялись жидкостью или твердой фазой в зависимости от того, что указанные числа оказываются меньшими и большими по сравнению с величиной пористости. Генерация случайных чисел проводилась методом, использовавшимся авторами ADAMS и DENMAN (1966).

Каждая модель состояла из 15×30 квадратов, причем в качестве начальной и конечной точек волны выбирались две конечные точки более длинной оси симметрии. Подобная модель показана на рис. 2. Все вычисления проводились на ЭВМ Минск-32 Института.

Теоретические соображения

Применим обозначение ν для отношения $\frac{V_{жс}}{V_T}$;
пусть будет

$$\nu_{ср} = \frac{V_{жс}}{V_{ср}} = G(\nu, \Phi).$$

Целью нашей работы является определение явной формы функции $G(\nu, \Phi)$.

К функции $G(\nu, \Phi)$ предъявляется требование удовлетворить следующим условиям:

1. $G(\nu, 0) = \nu$ т. е. при отсутствии жидкой фазы $\nu_{ср} = \nu$
т. е. $\nu_{ср} = \nu_T$
2. $G(\nu, 1) = 1$ т. е. при отсутствии среды твердой фазы $\nu_{ср} = 1$
т. е. $\nu_{ср} = \nu_{жс}$
3. $G(1, \Phi) = 1$ если $V_T = V_{жс}$, то $V_{ср} = V_T = V_{жс}$
4. $\nu \leq G \leq 1$, средняя скорость приходится между скоростями, характерными для двух фаз.

Неравенство 4 на практике не выполняется при высоких величинах пористости ($\Phi \geq 60\%$). В этом случае (НАМПТОН, 1956; SHUMWAY 1960; OFFICER, —1958) скорость распространения звуковой волны в породах, насыщенных жидкостью, может быть более низкой по сравнению со скоростью в жидкости. Полученные нами результаты могут использоваться применительно к величинам пористости $\Phi < 60\%$, т. е. они охватывают весь интересный для геофизики диапазон величин пористости. (Поскольку предполагалась приуроченность отдельных фаз к определенным местам — что не может быть действительным для частиц, плавающих в жидкости — предлагаемая модель не может применяться для случаев $\Phi \approx 1$.)

Дополнительное ограничение заключается в том, что моделью не учитываются вещественный состав, плотность и сжимаемость отдельных фаз.

Предстоит найти функцию $G(\nu, \Phi)$ в форме

$$G(\nu, \Phi) = \frac{F(\nu, \Phi) \cdot \Phi + \nu(1 - \Phi)}{F(\nu, \Phi) \cdot \Phi + 1 - \Phi}$$

где $F(\nu, \Phi)$ является пока неизвестной функцией. Данная форма функции автоматически выполняет условия 1-4. Следует заметить, что в случае $F(\nu, \Phi) = 1$ снова получается как раз формула WYLLIE, так как в данном случае

$$G(\nu, \Phi) = \frac{V_{жс}}{V_{ср}} = \frac{\Phi + \nu(1 - \Phi)}{\Phi + 1 - \Phi} = \Phi + \frac{V_{жс}}{V_T}(1 - \Phi)$$

следовательно

$$\frac{1}{V_{ср}} = \frac{\Phi}{V_{жс}} + \frac{1 - \Phi}{V_T}.$$

Полученные результаты

Вычисления проводились для величин $\nu = 0,66; 0,5; 0,4; 0,33; 0,25$, причем для каждого соотношения скоростей величины Φ выбирались от 0,1 до 0,8 с шагом через 0,1. Для каждой пары величин (ν, Φ) были приняты по 50 моделей.

Подсчитанные величины функции $F(\nu, \Phi)$ представлены на рис. 3, причем одна точка соответствует средней по 10 моделям величине. Полученные величины при заданных ν , как функции от Φ , хорошо совмещаются с прямой, т. е.

$$F(\nu, \Phi) = a(\nu) \cdot \Phi + b(\nu).$$

Совмещение проводилось по критерию погрешности наименьших квадратов. Угловые коэффициенты и осевые сечения прямых в функции от ν показаны на рис. 4/а и 4/б. Угловые коэффициенты являются, с хорошим приближением, постоянными и равными

$$a(\nu) \approx 0,22$$

а кривая, определяемая осевыми сечениями, по имеющимся пунктам измерений, является экспоненциальной:

$$b(\nu) \approx B(e^{\lambda\nu} - 1).$$

Возможно, что численные величины входящей в формулу постоянной 0,22 и параметров экспоненциальной кривой $b(\nu)$ не носят универсального характера, а связаны с специальной симметрией и размерами выбранной модели.

Направления дальнейшего совершенствования метода

При вычислениях не учитывались эффекты отражений и поглощения. В связи с этим время вступления первого (регистрируемого) сигнала в экспериментах может не совпадать с вычисленным временем, а превышать его. Точно также не учитывалось, что исходной сигнал представлен не игольчатым импульсом, причем форма сигнала сильно изменяется как раз по вышеуказанным причинам. В метод нахождения кратчайшего пути могут быть внесены изменения с таким расчетом, чтобы он определял и энергию вступления импульса путем снижения энергии, имеющейся у отдельных границ фаз в соответствии с коэффициентом отражения, а также, учета геометрического рассеяния. Таким образом метод Монте Карло может использоваться и для анализа скачков периодов, представляющих собой помехи в результатах акустического каротажа.

Другим возможным направлением совершенствования метода является применение трехмерной модели.

Исследования могут быть распространены и на случай многокомпонентной среды, при котором также предполагается действие уравнения среднего времени (TEGLAND, 1970). Метод Монте Карло может быть изменен и с таким расчетом, чтобы при генерации среды, помимо пористости учитывалось и гранулиметрическое распределение.

Выводы

Проведенная работа преследовала цели определить средние скорости распространения акустических волн в пористых средах. Методом Монте Карло была создана двумерная пористая среда и с использованием алгоритма Форда на ЭВМ определялось время, необходимое для пробега акустической волны пути между двумя точками этой среды. В результате проведенной работы получена формула

$$\frac{1}{V_{cp}} = \frac{0,22 \Phi + \frac{1-\Phi}{V_T} + b \left(\frac{V_{жс}}{V_T} \right)}{1 - 0,78 \Phi + b \left(\frac{V_{жс}}{V_T} \right)}$$

где V_{cp} — средняя для данной среды скорость

$V_{жс}$ — средняя скорость в жидкой фазе

V_T — средняя скорость в твердой фазе

$b \left(\frac{V_{жс}}{V_T} \right)$ — экспоненциальная функция, представленная на рис. 4б

Добавление: Алгоритм Форда для нахождения кратчайшего пути

Зададимся связным графом*, к каждой дуге которого приурочиваются положительные величины расстояний. Пусть будет расстояние не связанных между собой точек $+\infty$. Обозначим начальную точку пути x_0 , а конечную точку — S . Пусть остальные точки, по любому порядку, будут $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$.

К каждой точке графа приурочиваются так назыв. потенциальные величины, так к точке x_i — величина $u(x_i)$. Сначала эта потенциальная величина равняется нулю, а в конце алгоритма она означает минимальное расстояние отдельных точек до точки x_0 .

В процессе выполнения алгоритма граф разделяется на две части; обозначим эти частичные графы буквами A и B . В частичный граф A входят точки, минимальные расстояния которых до точки x_0 уже определены, а в частичный граф B — точки, для которых эти расстояния не определены, т. е. потенциалы которых еще не равняются минимальному расстоянию. Первый шаг:**

$$x_0 \in A \{x_1, x_2, \dots, x_k, S\} \in B.$$

В процессе данной операции частичный граф A дополняется элементами из частичного графа B до тех пор, пока в A не войдет и S .

* Относительно основ и терминологии теории графов см. напр. монографии Кауфмана (1968) или Берга (1957).

** $X \in A$ — принятое в теории множеств обозначение того, что X входит в множество A .

A дополняется одной точкой следующим образом. Пусть будут в обобщенном виде

$$x_a, x_b, \dots, x_n \dots \in A$$

$$x_\alpha, x_\beta, \dots, x_\nu \dots \in B$$

а расстояние точек x_n, x_ν обозначим $\tau_{n\nu}$.

Зададимся величиной

$$\varepsilon_{n\nu} = \mu(x_n) + \tau_{n\nu}.$$

для каждой пары точек $x_n \in A, x_\nu \in B$.

Найдем величину

$$\varepsilon_{m\mu} = \min_{n, \nu} \varepsilon_{n\nu}.$$

Затем соответствующая точка x_μ вводится в частичный граф A и ее потенциал подбирается равным $\varepsilon_{m\mu}$. Необходимо показать, что так потенциал каждой точки в частичном графе A равен длине кратчайшего пути, соединяющего его с X_0 .

Пусть количество точек в частичном графе A будет l . Если $l=1$, то $A = \{x_0\}$ и $\mu(x_0)=0$, для чего действительно указанное утверждение. Теперь предположим, что

$$A = \{x_0, x_1, \dots, x_{l-1}\}$$

и предположим правильность утверждения для этих точек; нетрудно видеть, что потенциал точки x_μ , полученной по правилам алгоритма, также равняется минимальной длине пути, так как

$$\mu(x_n) = \mu(x_m) + \tau_{m\mu} = \min_{n, \nu} [\mu(x_n) + \tau_{n\nu}].$$

Поскольку согласно исходному допущению $\mu(x_n)$ представляет собой длину кратчайшего из путей $x_n - x_0$, $\mu(x_n) + \tau_{n\nu}$ будет равняться длине пути, исходящего из x_ν через x_n до x_0 . Величина

$$\min_{\nu} [\mu(x_n) + \tau_{n\nu}]$$

представляет собой длину кратчайшего пути, исходящего из одного из элементов частичного графа B через x_n до x_0 . Если взять его минимум b_n , получаем расстояние точки частичного графа B , располагающейся наиболее близко к x_0 , т. е. длину кратчайшего из путей $x_\mu - x_0$, в чем и заключалось наше положение. Эта операция кончается введением точки S в частичный граф A .

После этого определение самого пути уже является простой задачей; находим точку x_i , для которой

$$\mu(S) - \mu(x_i) = \tau_{Sx_i}.$$

(возможно, что имеется несколько таких точек; это означает, что существует несколько равно оптимальных путей) и эта точка находится на кратчайшем пути перед S . Затем подобным образом на месте S с x_i получаем предыдущую точку и т. д., пока не дойдем до x_0 .