

AZ EXCENTRIKUS FÖLDDIPÓLUS MÁGNESES POTENCIÁLTERÉNEK KÖHERENS MULTIPÓLUS SORA

KILCZER GYULA

ДБ. КИЛЬЦЕР

РЯД КОГЕРЕНТНЫХ МУЛТИПОЛЕЙ МАГНИТНОГО ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ПОЛЯ ЭКСЦЕНТРИЧНОГО ДИПОЛЯ ЗЕМЛИ

Разложение в ряд Гаусса – Лежандра имеет чисто математическую цель: получение множества данных магнитных потенциалов, определенных на поверхности Земли с как можно лучшей аппроксимацией, без учета внутренней намагниченности Земли.

Целью разложения в когерентный мультипольный ряд является выражение этого же множества данных при помощи математической формулы, с учетом намагниченности, вызванной эксцентричным диполем.

Параметры когерентных мультиполей позволяют непосредственно решить проблемы об эксцентричном диполе, решение которых при помощи рядов Гаусса – Лежандра связано с длительными вычислениями.

Приводится численный пример для подтверждения обоснованности когерентного мультиполя как средства изучения эксцентричного диполя, причем это является более подходящим средством по сравнению с рядом Гаусса – Лежандра.

GY. KILCZER

THE SERIES OF COHERENT MULTIPOLES OF THE MAGNETIC POTENTIAL FIELD OF THE ECCENTRIC EARTH-DIPOLE

The aim of the Gauss-Legendre series-development is solely a mathematical one: to summarize the values of the magnetic potential by approximating them with the greatest possible accuracy, neglecting the inner magnetization of the Earth.

The aim of coherent multipole series-development is the establishment of a mathematical term for the same data, taken the physical aspect, too, into consideration by supposing an inner magnetization of the Earth, originating from an eccentric dipole.

The parameters of the coherent multipole series directly furnish the solutions of many problems concerning the eccentric dipole, contrarily to the lengthy calculations arisen when using the Gauss-Legendre series.

A numerical example is given to demonstrate that the coherent multipole series is an adequate tool for examining the hypothesis of the eccentric dipole, it is in fact more suitable than the Gauss-Legendre series.

Bevezetés

„... a physicist, when he has to follow a mathematical calculation, will understand it all the better if each of the steps of the calculation admits of a physical interpretation.“

J. C. MAXWELL

A földmágneses tér potenciáljának az észlelési adatokból megállapított értékalmazát a Gauss-féle (g_n^m , h_n^m) paraméterekből számított együtthatókkal ellátott $P_n^m(\cos\theta)$ Legendre-féle asszociált gömbfüggvény polinómok végtelen sora közelíti meg. A következőkben jelölje röviden G. L. ezt a sort.

J. C. MAXWELL (1954) bebizonyította, hogy a Legendre-polinómok multipólusok; eszerint a G. L. sor egyúttal növekedő rendű multipólusok sorának is tekinthető.

A G. L. sor idők folyamán a földmágnességre vonatkozó minden kutatásnak alapja és különböző problémák megoldásának eszköze lett. Ilyen probléma például a Föld mágneses középpontjának meghatározása. Ennek megoldása egyszersmind a földmágneses potenciáltér közelítő előállítását is jelenti egyetlen kellő módon elhelyezett dipólussal.

A Föld mágneses középpontjának meghatározását legelőször W. THOMSON (1872) kísérte meg a G. L. sor első két tagjának olyan lineáris transzformációjával, amelynek következtében az új kezdőpontban elhelyezett dipólusnak, az excentrikus dipólusnak potenciáltere egymagában a Föld felszínén legjobban megközelítse a G. L. sor első két tagjával leirt potenciálteret. Ez az új origó a Föld mágneses középpontja. Az ide történő transzformációnak tehát a kvadrupólust képviselő második tagot formálisan el kellett volna tüntetnie. Ez azonban nem következett be, a kvadrupólus egy része megmaradt. Később AD. SCHMIDT (1934) kimutatta, hogy a transzformáció folytán a kvadrupólus hat együtthatóját alkotó öt paraméter négyzetes középértéke a megmaradó kvadrupólusban csupán egy bizonyos zérustól különböző minimumra redukálódik. Ő maga ebből a minimum feltételből kiindulva foglalkozott ugyanezzel a problémával. J. C. MAXWELL (1954) is közöl egy definíciót, amely szerint valamely mágnes középpontját úgy határozzuk meg, hogy a mágneset olyan új koordináta-rendszerbe helyezzük, amelyben a G. L. sor második tagjának négyzetét a középponti egységsugarú gömb egész felületére integrálva a mágnes potenciálja minimum legyen. A Föld mágneses középpontjának numerikus meghatározásával nem foglalkozott.

A földmágneses potenciáltér megközelítése tehát excentrikus dipólussal maradék kvadrupólus nélkül, a G. L. sorból kiindulva nem sikerült. Nem is sikerülhetett, mert a G. L. kvadrupólusát származtató dipólus nem azonos a Föld-dipólussal, a G. L. sor első tagjával (ZILÁHI—SEBESS, 1961; KILCZER, 1964). A probléma megoldásának sikertelensége vezetett a G. L. sor sajátosságainak tanulmányozására és ebből folyóan a Föld mágneses potenciálterének megközelítésére az excentrikus Föld-dipólus koherens multipólus sorával. A következőkben jelölje röviden k. m. ezt a sort.

I. Elméleti rész

A potenciálfüggvény binomiális sora. Tetszés szerint elosztott mágneses tömegek potenciálja a ható tömegeket befogadó valamely τ térfogaton kívül levő P pontban:

$$V = \int_{\tau} \frac{dm}{\varrho} \quad (1)$$

Itt $\varrho = [(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 + (z - \bar{z})^2]^{\frac{1}{2}}$, dm a $O(x, y, z)$ derékszögű koordináta-rendszerben az $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ koordinátájú + vagy - előjelű, pontszerű mágneses ható tömeg $\left(\int_{\tau} dm = 0 \right)$, ϱ ennek a dm -nek távolsága a $P(x, y, z)$ ponttól.

V -t a ϱ^{-1} függvény binomiális sorba fejtésével lehet a gyakorlati alkalmazás számára használható alakra hozni (MAC MILLAN, 1958). A sor tagjai a Legendre-polinómak, ezek generátor függvénye (ha $r = OP$) $r\varrho^{-1}$.

A következőkben τ a R sugarú, O középpontú Földgömb térfogata, P a Föld felszínének egy pontja (a mágneses hatóknak a gömb felszíne alatt kell lenniök). Rövidség kedvéért csak a sor első két tagját írjuk fel; a későbbi tárgyalás folyamán is megelégszünk a potenciál másodrendű megközelítésével.

Eszerint tehát

$$V = V_1 + V_2 \quad (2)$$

$$V_1 = xR^{-3} \int_{\tau} \bar{x} dm + yR^{-3} \int_{\tau} \bar{y} dm + zR^{-3} \int_{\tau} \bar{z} dm \quad (3)$$

$$\begin{aligned} V_2 = & x^2 R^{-5} \int_{\tau} \left(\bar{x}^2 - \frac{1}{2} \bar{y}^2 - \frac{1}{2} \bar{z}^2 \right) dm + y^2 R^{-5} \int_{\tau} \left(\bar{y}^2 - \frac{1}{2} \bar{z}^2 - \frac{1}{2} \bar{x}^2 \right) dm \\ & + z^2 R^{-5} \int_{\tau} \left(\bar{z}^2 - \frac{1}{2} \bar{x}^2 - \frac{1}{2} \bar{y}^2 \right) dm \\ & + 3xyR^{-5} \int_{\tau} \bar{x}\bar{y} dm + 3yzR^{-5} \int_{\tau} \bar{y}\bar{z} dm + 3zxR^{-5} \int_{\tau} \bar{x}\bar{z} dm. \end{aligned} \quad (4)$$

Mint hogy az integrálás tartománya minden egyes integrálban azonosan τ , ezek az integrálok (a Legendre-polinómak együtthatóiból alkotott kifejezések) nem lehetnek egymástól függetlenek. Hangsúlyozzuk: a (2) sor csak ennek a feltételnek teljesülése esetén egyenértékű a kiindulás alapját adó (1) potenciálfüggvénnyel, csak ebben az esetben adja meg ennek a függvénynek értékkeszletét.

Osszuk el bevett szokás szerint a V potenciált R -rel és legyen

$$V/R = \Phi, \quad V_1/R = \Phi_1, \quad V_2/R = \Phi_2. \quad (5)$$

A Φ , Φ_1 , Φ_2 mennyiségeket majd a numerikus számításnál γ egységekben fejezzük ki.

A (3) és (4) jobb oldalát R -rel osztva

$$x/R = \xi, \quad y/R = \eta, \quad z/R = \zeta$$

a P pont felé irányuló R iránycosinusai. Ezekkel az egyszerűsítő változtatásokkal és az együtthatókat AD. SCHMIDT (1934) szerint jelölve:

$$\Phi_1 = p_0 \xi + p_1 \eta + p_2 \zeta \quad (6)$$

$$\Phi_2 = Q_0 \xi^2 + Q_1 \eta^2 + Q_2 \zeta^2 + 3 q_1 \xi \eta + 3 q_4 \eta \zeta + 3 q_2 \xi \zeta. \quad (7)$$

Tehát Φ együtthatói

$$p_0 = R^{-3} \int_{\tau} \bar{x} dm, \quad p_1 = R^{-3} \int_{\tau} \bar{y} dm, \quad p_2 = R^{-3} \int_{\tau} \bar{z} dm$$

$$Q_0 = R^{-4} \int_{\tau} \left(\bar{x}^2 - \frac{1}{2} \bar{y}^2 - \frac{1}{2} \bar{z}^2 \right) dm$$

$$Q_1 = R^{-4} \int_{\tau} \left(\bar{y}^2 - \frac{1}{2} \bar{z}^2 - \frac{1}{2} \bar{x}^2 \right) dm$$

$$Q_2 = R^{-4} \int_{\tau} \left(\bar{z}^2 - \frac{1}{2} \bar{x}^2 - \frac{1}{2} \bar{y}^2 \right) dm$$

$$q_1 = R^{-4} \int_{\tau} \bar{x} \bar{y} dm$$

$$q_4 = R^{-4} \int_{\tau} \bar{y} \bar{z} dm$$

$$q_2 = R^{-4} \int_{\tau} \bar{z} \bar{x} dm.$$

Ezek az együtthatók a Legendre-féle $P_n^m(\cos \theta)$ asszociált polinómok AD. SCHMIDT szerint normált együtthatóival következőképpen azonosíthatók:

$$\begin{array}{lll} p_0 = G_1^0 & Q_0 = +G_2^0 & 3q_1 = \sqrt{3} G_2^1 \\ p_1 = G_1^1 & Q_1 = +\frac{1}{2} (\sqrt{3} G_2^2 - G_2^0) & 3q_4 = \sqrt{3} H_2^2 \\ p_2 = H_1^1 & Q_2 = -\frac{1}{2} (\sqrt{3} G_2^2 + G_2^0) & 3q_2 = \sqrt{3} H_2^1 \end{array} \quad (9)$$

Az integrálás tartománya, mint már hangsúlyoztuk, a (8) együtthatók mindegyikében a Föld térfogata. A (8)-ban szereplő integrálok mágneses nyomatók, értéküket a Föld mágnesezettségének módja határozza meg és egymástól nem függetlenek (MACMILLAN, 1958). Nemcsak a Φ sor egy tagján belül, hanem a különböző rendű tagok, tehát Φ_1 és Φ_2 együtthatói között is, a mágnesezés végtelen sok lehetséges megoszlása szerint érvényes, bonyolult összefüggések vannak. Mivel (9) szerint G_n^m és H_n^m is ezekkel az integrálokkal fejezhető ki, ezek a paraméterek sem lehetnek egymástól függetlenek. Ezért jelöljük őket e dolgozatban nagybetűkkel, megkülönböztetésül a G. L. sorban szereplő, általában (g_n^m, h_n^m) -mel jelölt Gauss-féle paraméterektől, amelyekből alkotott együtthatók tudvalevően egymástól függetlenek (MAUERSBERGER, 1959). r, ϑ és λ koordinátákkal a binomiális sort a következő alakban írhatjuk (BARTA, 1959):

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} V_n \quad (10)$$

$$V_n = R \sum_{m=0}^n (G_n^m \cos m\lambda + H_n^m \sin m\lambda) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} P_n^m(\cos \vartheta).$$

A nyomatók összefüggéseire magából a binomiális sorból semmi felvilágosítást nem kaphatunk. Az összefüggések megállapításához szükséges a mágnesezettség megoszlásának ismerete vagy valamely erre vonatkozó feltételezés, esetleg ilyen feltételezésen alapuló sorfejtés, amilyen például – amint majd meglátjuk – a k. m. sor.

A binomiális sorfejtés kiinduló pontja a potenciál általános fizikai definíciója. A tagok képzésének szabálya folytatólagos differenciálás. Az első tag együtthatója a mágnesezést létesítő valamennyi elemi dipólus eredő nyomatóka. A folytatólagos differenciálás ehhez az eredő dipólushoz már nem adhat hozzá további mágneses hatót, hanem csak a nyomatók rendszámát emeli egy-egy egységgel. Minden véges számú dipólusból eredő lehetséges mágnesezettségnek van egy saját, összefüggő nyomatókrendszere. Elképzelhető, hogy az eredő dipólus kisebb-nagyobb dipólus egységekből tevődik össze. Erre azonban a sorfejtés, amellyel csak a megadott, eredő potenciálteret közelíthetjük meg, éppúgy nem adhat felvilágosítást, mint a nyomatók összefüggéseire sem. Azt a potenciálteret, amelyet egy bizonyos mágnesezettség létesít, számtalan sokféle, ettől eltérő mágnesezettség is létesítheti (a potenciál peremérték-feladatának megoldása határozatlan probléma).

A potenciálfüggvény multipólus-sora. A következőkben fejtegetéseink állandó tárgya lesz a mágneses dipólus és a belőle származó kvadrupólus. A szemléletesség fokozására érdemesnek látszik e két fizikai – matematikai fogalom viszonyának megvilágítása a mechanikából vett hasonlattal. A dipólusnak és a belőle származó kvadrupólusnak kapcsolatát azzal a párhuzammal szemléltethetjük, amely egyfelől a merev testre ható erő és az általa létesített erőpár, másfelől a mágnesezett testben elhelyezkedő dipólus és az általa létesített kvadrupólus szerepe között megvonható.

A merev testre ható erő és a dipólus egyaránt kötött vektorok. Jelölésük és ábrázolásuk módjának szempontjából lényegtelen, hogy a dipólust az ismeretes határátmenettel ponttá zsugorítjuk (nyilván a molekuláris elemi mágnesek molekuláris köráramok méretéhez igazodva).

Úgy, ahogyan két egyenlő nagyságú, ellenkező irányú erő erőpárt alkot, két egyenlő nyomatékú, ellenkező irányú dipólus együttvéve kvadrupólus, amelyet szintén ponttá zsugoríthatunk (mindjárt megjegyezzük, hogy az erő-pár vektor, a kvadrupólus azonban – mivel már a dipólus nyomaték-jellegű vektor – másodrendű tenzor; emiatt a párhuzam hamar megszűnik). A merev testre ható excentrikus erő támadópontjának az ismeretes szerkesztéssel az origóba történő eltolásakor megjelenik egy erőpár. Ez az erőpár azt a forgató nyomatékot képviseli, amelyet az erő eredeti helyzetében az origóra vonatkoztatva kifejtett. A centrikus erő és az erőpár együttese egyenértékű az eredeti excentrikus erővel. Az erőt eredeti helyzetébe visszatolva, ennek a visszatolásnak a megszerkesztéséhez szükséges ellenkező irányú erőpár az előbbit megsemmisíti; eredmény az eredeti excentrikus erő.

Egy dipólusnak az origóba történő párhuzamos eltolásakor a dipólussal és annak translációjával egyértelműen meghatározott kvadrupólus jelentkezik, amely a dipólusnak eredeti helyzetében az origóra vonatkozóan fennállott kvadrupólus-nyomaték jellegét képviseli. A centrikus dipólus és kvadrupólusának együttese egyenértékű az eredeti excentrikus dipólussal. A dipólust eredeti helyzetébe visszatolva, a kvadrupólust egy ellenkező „irányú” kvadrupólus megsemmisíti (KILCZER, 1966).

* * *

Már hivatkoztunk arra, hogy J. C. Maxwell szerint a Legendre-polinómak multipólusok potenciáljai. A multipólusok potenciáljának képzési szabálya (MAXWELL, 1954; STRATTON, 1941):

$$V_n = (-1)^n \frac{p^{(n)}}{n!} \frac{\partial^n}{\partial L_0 \partial L_1 \dots \partial L_{n-1}} \left(\frac{1}{r} \right) \quad (11)$$

V_n az n -edrendű multipólus potenciálja, de rövideg kedvéért magát V_n -et is multipólusnak nevezhetjük.

$L_0(a_0, b_0, c_0)$ a dipólus tengelyének vektora; hasonlóképpen $L_1(a_1, b_1, c_1)$, $L_2(a_2, b_2, c_2) \dots$ a további magasabbrendű multipólusok tengelyeinek vektorai.

$$p^{(i+1)} = (i+1)p^{(i)}|L_i|, \quad (i = 0, 1, \dots) \quad (12)$$

az i -rendű multipólus momentumának abszolút értéke.

Az L_i vektor szerint történő differenciálás, vagyis $\left(a_i \frac{\partial}{\partial x} + b_i \frac{\partial}{\partial y} + c_i \frac{\partial}{\partial z} \right)$ differenciáloperatorral végzett gradiensképzés szemléletesen az $i+1$ rendű multipólus $|L_i|$ mértékű eltolását jelenti (a_i, b_i, c_i) irányban.

Észerint a dipólus az origóban levő $-q$ és tőle L_0 távolságban levő $+q$ mágneses hatók együttese; momentuma (12) szerint

$$p^{(1)} = q|L_0| = m,$$

potenciálja

$$V_1 = -m \frac{\partial}{\partial L_0} \left(\frac{1}{r} \right).$$

A L_0 és L_1 tengelyekkel jellemzett kvadrupólus az origóban levő $-m$ momentumú, meg a L_1 vektorral eltolt $+m$ momentumú dipólusok együttese; momentuma (12) szerint

$$p^{(2)} = 2m|L_1|,$$

potenciálja

$$V_2 = 2m|L_1| \left[\frac{1}{2!} \cdot \frac{\partial^2}{\partial L_0 \partial L_1} \left(\frac{1}{r} \right) \right].$$

A szemléletes képet ki kell egészítenünk azzal, hogy az így megszerkesztett multipólusokat az ismeretes határátmenettel ponttá zsugorítjuk; ezeket nevezi J. C. MAXWELL (1954) különböző rendű „szinguláris” pontoknak.

Az (1) potenciálfüggvény (2) binomiális sorának első két tagját multipólus alakban írva

$$V = V_1 + V_2 \quad (13)$$

$$V = -m \frac{\partial}{\partial L_0} \left(\frac{1}{r} \right) + 2m|L_1| \left[\frac{1}{2!} \cdot \frac{\partial^2}{\partial L_0 \partial L_1} \left(\frac{1}{r} \right) \right].$$

Ha az első tag: V_1 egyetlen dipólus, akkor ez a két tag együttesen egy excentrikus dipólus potenciálja. A dipólus kivételével a magasabbrendű multipólusoknak önmagukban, mint a sor egy kiragadott tagjának, nincs önálló fizikai jelentőségük; mint „töltés szingularitások” (STRATTON, 1941) csupán matematikai absztrakciók.

Nyilvánvaló az is, hogy egy bizonyos (1) potenciálfüggvény multipólusai, mint a binomiális sor tagjaival egyenértékű és azoktól csak alakjukban eltérő kifejezések, képzési szabályuk szerint is egymással szorosan összefüggnek: a létesítő dipólusból kiindulva minden rendű multipólus valamennyi kisebb rendszámú multipólus jellemző adatát magában foglalja. $V_1 + V_2$ csak abban az esetben lehet egy excentrikus dipólusnak potenciálja, ha a V_2 -ben szereplő m és L_0 a V_1 létesítő dipólus jellemzői. Ezért mondjuk az ilyen sort koherensnek. A multipólusok (11) képzési szabályát figyelembe véve nem is meglepő, hogy az egymást követő multipólusok együtthatóinak rekurrens meghatározására vonatkozó eljárást lehetett megállapítani (JAMES, 1967).

Differenciáljuk r^{-1} -et L_0 szerint; ezután $r = R$ -et téve

$$V_1 = -m[-R^{-3}(a_0x + b_0y + c_0z)] = mR^{-3}(a_0x + b_0y + c_0z).$$

$mR^{-3} = M$ -et helyettesítve és R -rel mindkét oldalt osztva

$$\Phi_1 = M(a_0\xi + b_0\eta + c_0\zeta). \quad (14)$$

V_1 -et L_1 vektor szerint folytatólagosan differenciálva, vagyis $\left(a_1 \frac{\partial}{\partial x} + b_1 \frac{\partial}{\partial y} + c_1 \frac{\partial}{\partial z}\right)$ differenciáloperátort alkalmazva és ezután $r = R$ -et téve

$$V_2 = M|L_1|R^{-2}[3(a_0x + b_0y + c_0z)(a_1x + b_1y + c_1z) - (a_0a_1 + b_0b_1 + c_0c_1)(x^2 + y^2 + z^2)].$$

R^{-2} -vel beszorozva és R -rel mindkét oldalt osztva

$$\Phi_2 = Md_1[3(a_0\xi + b_0\eta + c_0\zeta)(a_1\xi + b_1\eta + c_1\zeta) - c(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)] \quad (15)$$

ha $c = a_0a_1 + b_0b_1 + c_0c_1$ és $|L_1|/R = d_1$. Φ_2 -t ξ , η , ζ szerint rendezzük és Φ_1 , Φ_2 együtthatóit Ad. Schmidt szerint jelöljük; így

$$\Phi_1 = p_0\xi + p_1\eta + p_2\zeta \quad (16)$$

$$\Phi_2 = Q_0\xi^2 + Q_1\eta^2 + Q_2\zeta^2 + 3q_1\xi\eta + 3q_4\eta\zeta + 3q_2\xi\zeta. \quad (17)$$

Az együtthatókat jelentésük szerint részletezve

$$\begin{aligned} p_0 &= Ma_0 \\ p_1 &= Mb_0 \\ p_2 &= Mc_0 \\ Q_0 &= Md_1(3a_0a_1 - c) \\ Q_1 &= Md_1(3b_0b_1 - c) \\ Q_2 &= Md_1(3c_0c_1 - c) \\ q_1 &= Md_1(a_0b_1 + a_1b_0) \\ q_4 &= Md_1(b_0c_1 + b_1c_0) \\ q_2 &= Md_1(c_0a_1 + c_1a_0) \end{aligned} \quad (18)$$

Ha az (1) potenciálfüggvényt k. m. sorba fejtvé az együtthatókat a legkisebb hibanégyzetösszeg módszerével határozzuk meg, akkor a közöttük meglévő összefüggéseket, mint kényszerfeltételi egyenleteket figyelembe kell venni. Ezeket a bonyolult összefüggéseket az első két tag — tehát egy létesítő dipólus és kvadrupólusa — esetén a kvadrupólus nyomatók-tenzor matrixának invariánsai foglalják magukban (KILCZER, 1964). De már ebben a leggyyszerűbb esetben is egyes koeficiensok kifejezése az erre kiszemelt többi koeficienssel gyakorlatilag teljesíthetetlen. Ezért a sor megalkotásának lehetőségét döntő módon meghatározza annak a felismerése, hogy Φ_1 (16) és Φ_2 (17) alakjának felhasználásával ezeknek a kényszerfeltételi egyenleteknek közvetlen alkalmazását el lehet kerülni. (14) és (15)-ben Md_1 -gyel beszorozva

$$\begin{aligned} Ma_0 &= A_0 & d_1a_1 &= A_1 \\ Mb_0 &= B_0 & d_1b_1 &= B_1 \\ Mc_0 &= C_0 & d_1c_1 &= C_1 \end{aligned} \quad (19)$$

jelölésekkel

$$\begin{aligned} \Phi &= A_0 \xi + B_0 \eta + C_0 \zeta \\ &+ [3 (A_0 \xi + B_0 \eta + C_0 \zeta) (A_1 \xi + B_1 \eta + C_1 \zeta) \\ &- (A_0 A_1 + B_0 B_1 + C_0 C_1) (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)]. \end{aligned} \quad (20)$$

Numerikus számításnál $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$; a (20) általános alakban azért szoktuk kiírni, hogy kitűnjék a kvadrupólus homogén kvadratikus volta.

(19)-ből látható, hogy

$$A_0^2 + B_0^2 + C_0^2 = M^2 \quad (21)$$

$$A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 = d_1^2 \quad (22)$$

azaz A_0, B_0, C_0 a dipólus-nyomatéknak, A_1, B_1, C_1 pedig a d_1 translationak összetevői; mint ilyenek egymástól teljesen függetlenek. Nevezük őket röviden Maxwell-paramétereknek, minthogy a Maxwell-féle multipólusok tengelyeinek iránycosinusaiból egyszerűen származtathatók. Ezeket a paramétereket a földmágneses észlelési adatokból – legegyszerűbben a térerősség függőleges összetevőjéből – a legkisebb hibanégyzetösszeg módszerével kiszámíthatjuk. Belőlük szükség esetén az egyszerűen adódó $M(a_0, b_0, c_0)$ és $d_1(a_1, b_1, c_1)$ értékkel a (p, Q, q) együtthatókat és a (G_n^m, H_n^m) paramétereket (9) és (18) szerint szintén ki lehet számítani.

A hat Maxwell-paraméter szimultán meghatározása esetén a javítási egyenleteket lineárisá kell tenni. De elvégezhetjük a meghatározást először a Φ_1 kifejezés A_0, B_0, C_0 paramétereinek kiszámításával és azután ezeknek felhasználásával számíthatjuk a Φ_2 kifejezés A_1, B_1, C_1 paramétereit. Minthogy a P_n^m függvények ortogonálisok, tehát Φ_1 és Φ_2 is ortogonális függvények (MAXWELL, 1954), a kétféle lehetséges eljárás eredménye megegyezik.

Az excentrikus dipólussal történő megközelítés esetén a meghatározandó paraméterek száma $3+3$. A multipólus sor minden további magasabbrendű polinómjának meghatározása, melyet a megközelítés fokozására a számításba bevonhatunk, a paraméterek számát hárommal növeli.

A binomiális sor és a multipólus sor tagjai egyaránt Legendre-polinómok. Ha a két különböző alakú sorral ugyanazt a mágneses potenciálteret állítjuk elő, akkor a két sor azonos, vagyis polinómjaik együtthatói is azonosíthatók. A binomiális sor momentumai ezzel az azonosítással kapják meg az excentrikus dipólusnak megfelelő értékeiket. Ha a földmágneses tér egyetlen excentrikus dipólussal közelíthető meg, akkor a sornak csak két tagja van: Φ_1 és Φ_2 . Tehát (19)-et is figyelembe véve érvényesek a következő azonosságok:

$$p_0 = R^{-3} \int_{\tau} \bar{x} dm = A_0$$

$$p_1 = R^{-3} \int_{\tau} \bar{y} dm = B_0$$

$$p_2 = R^{-3} \int_{\tau} \bar{z} dm = C_0$$

$$\begin{aligned}
 Q_0 &= R^{-4} \int_{\tau} \left(\bar{x}^2 - \frac{1}{2} \bar{y}^2 - \frac{1}{2} \bar{z}^2 \right) dm = 3A_0A_1 - C \\
 Q_1 &= R^{-4} \int_{\tau} \left(\bar{y}^2 - \frac{1}{2} \bar{z}^2 - \frac{1}{2} \bar{x}^2 \right) dm = 3B_0B_1 - C \\
 Q_2 &= R^{-4} \int_{\tau} \left(\bar{z}^2 - \frac{1}{2} \bar{x}^2 - \frac{1}{2} \bar{y}^2 \right) dm = 3C_0C_1 - C \\
 q_1 &= R^{-4} \int_{\tau} \bar{x}\bar{y} dm = A_0B_1 + A_1B_0 \\
 q_4 &= R^{-4} \int_{\tau} \bar{y}\bar{z} dm = B_0C_1 + B_1C_0 \\
 q_2 &= R^{-4} \int_{\tau} \bar{z}\bar{x} dm = C_0A_1 + C_1A_0
 \end{aligned} \tag{23}$$

Az integráció tartománya a R sugarú Földgömb, $C = A_0A_1 + B_0B_1 + C_0C_1$. Ezek az azonosságok rejtik magukban azokat az összefüggéseket, amelyek a binomiális sor nyomatókai között fennállanak.

Excentrikus dipólus feltételezése csak egyike azoknak a lehetséges, elvben végtelen nagy számú fizikai elgondolásoknak, amelyekkel a Föld mágneses potenciáletterét megközelíthetjük. Az excentrikus dipólust a gömbalakú Föld-mag mágnesezett belső részével azonosítjuk. Ennek potenciáletterét tekinthetjük normáltérnek; ehhez járulnak a különböző anomáliák, elsősorban a tapasztalat szerint meglevő nagyméretű, teresztrikus regionális anomáliák. Ismeretes, hogy az anomáliák elválasztása a normáltértől igen nehéz feladat, mert az anomáliák hatása belekerül a normáltér potenciáljába, mégpedig annál inkább, minél több tagot vonunk be a normáltér definíciójába. Az anomáliák hatása alól természetesen a dipóluspotenciál sem mentesül.

Az excentrikus dipólus hipotézisének alapja az a tény, hogy a potenciálsort nem csak egy tag, a centrikus dipólus alkotja. A felszíni potenciáletter tulajdonsága szerint ítélve a Föld belsejének okvetlenül aszimmetrikusan mágnesezettnek kell lennie. Ha az $\left(a_i \frac{\partial}{\partial x} + b_i \frac{\partial}{\partial y} + c_i \frac{\partial}{\partial z} \right)$ operátor alkalmazásának szemléletes értelmezéséül elfogadjuk a dipólus és a folytatólagosan keletkező multipólusok translációját a L_1, L_2, \dots vektorokkal jellemzett poligonnal megközelített görbe mentén, akkor a dipólus és kvadrupólus együttesét elsőrendű excentrikus dipólusnak kell nevezni.

A földmágneses nyomatók és multipólus sorra jó analógiánk a gravitációs potenciálsor. Ennél is megelégszünk a sor első két nyomatók-jellegű tagjával, a másodrendű szintszferoid potenciáljával (megfelel a mágneses elsőrendű excentrikus dipólusnak), de más kényszerfeltételeket szabunk ki: követeljük,

hogy az elsőrendű nyomaték (megfelel a dipólusnak) zérus legyen, a másodrendű nyomaték deviációs komponensei (a kvadrupólus vegyes tagjai) eltűnjenek, minek következtében a tengelyek (a kvadrupólus tengelyek) egymásra merőlegesek (EGYED, 1956).

A multipólus sor megalkotásánál (1)-ből, a potenciál legáltalánosabb kifejezéséből indulunk ki. A k. m. sor alkalmas a földmágneses potenciáltér minden olyan hipotézisen alapuló előállítására, amely hipotézis segítségével a binomiális sor nyomatékai közt fennálló összefüggések gyakorlatilag lehetetlen meghatározását a Maxwell-féle paraméterek alkalmazásával el lehet kerülni, mint ahogyan egy excentrikus dipólus esetében elkerülhetjük.

A földmágneses teret megközelíthetjük két vagy több excentrikus dipólus potenciálterével is. Az eddig végzett ilyen kísérleteknek közös hibája, hogy a Földdipólust önkényesen bontják komponensekre (MÁCHT, 1951; KILCZER, 1966), holott ezeknek az elsőrendű nyomatékoknak, valamint a másodrendű nyomatékokat jelentő kvadrupólusoknak paramétereit helyesen a legkisebb hibanégyzetösszeg módszerével kell kiszámítani. Ezenkívül a meghatározást nem a G. L. sorból kiindulva, hanem elvileg, fizikai szempontból kifogástalanul a k. m. sorral kell végezni. A dipólusok számának növelésével a (A, B, C) paraméterek száma mindenesetre megszorodik és meghatározásuk bonyolultabbá válik.

A Gauss–Legendre sor, mint a földmágneses potenciál sora. A Föld belsejében levő mágneses hatókból eredő potenciálértékeket Gauss a földmágneses észlelési adatok kiegyenlítéséből származó következő végtelen sorral foglalta össze (BARTA, 1957):

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} V_n \quad (24)$$

$$V_n = R \sum_{m=0}^n (g_n^m \cos m\lambda + h_n^m \sin m\lambda) \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1} P_n^m(\cos \theta)$$

g_n^m és h_n^m a Gauss-féle paraméterek, $P_n^m(\cos \theta)$ az Ad. Schmidt szerint normált Legendre-féle asszociált polinómok.

Arra az esetre, ha $r = R$, az első két tagra szorítkozva a következő, már előzőleg is meghatározott értelmű kifejezéseket kapjuk:

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi_1 + \Phi_2 \\ \Phi_1 &= g_1^0 \xi + g_1^1 \eta + h_1^1 \zeta \\ \Phi_2 &= g_2^0 \xi^2 + \frac{1}{2} (\sqrt{3} g_2^2 - g_2^0) \eta^2 - \frac{1}{2} (\sqrt{3} g_2^2 + g_2^0) \zeta^2 \\ &\quad + \sqrt{3} g_2^1 \xi \eta + \sqrt{3} h_2^2 \eta \zeta + \sqrt{3} h_2^1 \zeta \xi. \end{aligned} \quad (25)$$

Annak érdekében, hogy a kiegyenlítéssel számított Φ értékek a legkisebb hibanégyzetösszeg elve szerint valamely ξ, η, ζ koordinátákkal meghatározott adathalmazt lehetőleg jobban megközelítsenek, a (25) különböző rendű polinómjaiban szereplő Gauss-féle együtthatóknak egymástól függetleneknek kell lenniök.

Az együtthatók között az egyes polinómonkon belül természetesen vannak összefüggések; ezek a Legendre-függvények harmonikus voltából, fizikai okból a mágneses tér divergencia-mentességéből következnek.

A G. L. sor egyes polinómjai Maxwellnek a Legendre-polinómokra vonatkozó bizonyítása szerint multipólusok; ezek a multipólusok azonban az együtt hatókra tett inénti megállapítások alapján általában teljesen heterogének, közöttük semmiféle fizikai kapcsolat nincs. Nem olyanok mint a k. m. sor közös dipólusból eredő multipólusai. A G. L. sor multipólusainak heterogén volta azt jelenti, hogy ha az elsőrendű tagban szereplő vektor L_0 , akkor a másodrendű tagban szereplő vektorokat például L_{01}, L_{11} -gyel, a harmadikban szereplőket L_{02}, L_{12}, L_{22} -vel s. i. t. kellene jelölni. Emiatt azonban a G. L. sor nem lehet az (1) potenciálfüggvény sorfejtése, mert:

1. a Föld mágnesezettségének van egy bizonyos, tényleges eloszlása;
 2. ehhez az eloszláshoz tartozik egy teljesen határozott (1) potenciálfüggvény;
 3. ennek a potenciálfüggvénynek van a binomiális sor nyomatékrendszerén alapuló multipólus sora;
 4. ennek a sornak tagjai között szükségszerű összefüggések vannak;
 5. a G. L. sor tagjai egymástól függetlenek.
4. és 5. ellentmondása állításunkat igazolja.

A G. L. sor az észlelési adatokat nem egy (1) potenciálfüggvény érték-készletével közelíti meg, hanem az adatok fizikai jelentésétől független matematikai képletet ad azok legjobb megközelítésére. Éppen ezért felhasználható bármely, a Föld felszínén végzett észleléssel, méréssel összegyűjthető adathalmaz regisztrálására. Például A. PREY (1922) felhasználta a Föld felszínére vonatkozó szintezési adatok összefoglalására. Ugyanígy felhasználható meteorológiai adatok összefoglalására stb.

Az az állításunk, hogy a G. L. sor az észlelési adatokat nem az (1) potenciálfüggvény érték-készletével közelíti meg, természetesen nem vonatkozik a G. L. sor első, dipólus tagjára, amíg a megközelítést egymagában képviseli; ekkor még nem is beszélhetünk ellentmondásról. Megjegyezzük, hogy a legkisebb hibanégyzetösszeg módszerével meghatározott lineáris tag mindig azonos, bármilyen képzési szabály szerint folytatódjék is a sor.

A G. L. sornak a földmágneses potenciáltér előállításában, leírásában és kutatásában betöltött szerepét természetesen nem lehet csak aszerint vizsgálni, hogy mennyire használható valamely, különleges fizikai alkalmazásra, esetünkben az excentrikus dipólus hipotézisének ellenőrzésére. A G. L. sor elsődleges célja az, hogy az észlelési adatoknak térképeken és táblázatokban összegyűjtött anyagát a statisztikai analízis és szintézis számára matematikai alakban előállítsa, összefoglalja (MAUERSBERGER, 1959 a), nem pedig a potenciáltér eredetének keresése, a mágneses hatók olyan eloszlásának, fizikai sajátosságának kutatása, amely a potenciáltér forrása lehet, amely a tapasztalat megmagyarázására vezethet. Azt mondhatjuk, hogy a G. L. sor célja tisztán matematikai és az észlelési adatok megközelítésének célját a legkisebb hibanégyzetösszeg elvének alkalmazásával a lehető legtokéletesebben el is éri; persze ennek a célnak az elérésére minél több tagját kell összegezni.

A G. L. sornak a statisztikai analízisre való felhasználásáról azonban már nem nyilváníthatunk ilyen egyértelmű véleményt. Ennek a statisztikai analízisnek egyik tárgya a sor tagjaiban szereplő együttthatók időbeli változásának vizsgálata. Erre a célra grafikonokat és az időtől való függést leíró kiegyenlítő formulákat készítenek (LUCKE, 1959). De tudjuk, hogy a G. L. sor polinómjai heterogén multipólusok, amelyek mindegyikének létesítő dipólusai különböznek a Földdipólustól (KILCZER, 1964). Ezért ezeknek a vizsgálatoknak alig tulajdoníthatunk jelentőséget, sőt egyáltalában valamiféle fizikai jelentést, kivéve természetesen a g_1^0 , g_1^1 , h_1^1 együttthatóknak, a Földdipólus együttthatóinak vizsgálatát.

Viszont a fizikai kutatás nem állhat meg egy adathalmaz statisztikai elemzésénél, tovább kell haladnia az ok, a forrás keresésének irányában. Ez a feladat nem könnyű. A Földnek bizonyos mágnesezettsége teljesen határozott potenciáalteret létesít, de ugyanezt a potenciáalteret számtalan, sok lehetséges mágnesezettség idézheti elő. De nem végtelen az ésszerű megfontolásokkal, a fizikai tapasztalat eredményeivel alátámasztható lehetőségek száma. Ilyen lehetőség az excentrikus dipólus hipotézise: a gömbalakú földmag belső része egyenletesen mágnesezett (EGYED, 1962), tehát dipólusnak tekinthető, és középpontja a Föld középpontján kívül esik (BARTA 1962). A fizikai kutatás feladata ennek a hipotézisnek ellenőrzése, megvizsgálása. Ennek a vizsgálatnak alkalmas matematikai eszköze a k. m. sor, megfelelőbb, mint a G. L. sor, amint a következő numerikus kísérleti számításra történt alkalmazása is igazolja. A k. m. sor általában előnyösen használható olyan feladatok megoldására, amelyek eleve feltételezik a mágnesezettség bizonyos meghatározott módját, mint amilyen az excentrikus dipólus okozta mágnesezettség. Ilyen feladatok még például a mágneses középpont meghatározása, vagy a pólusok helyének kiszámítása. Ezeket a feladatokat a k. m. sor alapján, a meglévő paraméterek segítségével közvetlenül meg lehet oldani, nem olyan körülményesen, mint a G. L. sorból kiindulva. A G. L. sor használata nem racionális olyan fizikai természetű feladatok megoldására, amelyek nem igényelnek statisztikai analízist. Azon, hogy a G. L. sor nem az (1) potenciálfüggvény fizikai ekvivalense, nem fizikai tartalmú potenciálfüggvény, hanem tisztán matematikai jellegű, nem változtat semmit annak megállapítása, hogy a G. L. sor tagjai a potenciál létezését feltételező Laplace-differenciálegyenlet megoldásának részei (MAUERSBERGER, 1959a). Ettől még az egész sor nem kap fizikai jelleget, pl. a Prey-féle sorban nem jelentenek a tagok potenciálokat. Ez a körülmény csak azt jelenti, hogy a Legendre-polinómak harmonikus függvények és mint gömbfelületi függvények alkalmasak bármely a Földgömb felületén ϑ , λ koordinátákkal jellemezhető adathalmaz legjobb megközelítésére.

II. Kísérleti számítás

A Maxwell paraméterek kiszámítása. A Maxwell-paramétereket legegyszerűbben a földmágneses tér Z -vel jelölt függőleges összetevőjének olyan értékrendszeréből lehet kiszámítani, amelyet az észlelésekkel meghatározott adatokból a gömbfelületi ϑ , λ koordinátahálózat bizonyos módon kiválasztott rádspontjaira interpolálva állapítottak meg. A (20) alakjában felírt potenciál-

sor első két tagjának a Föld felszínén kívül elhelyezkedő pontokra is érvényes alakja:

$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2 \\ &= R(A_0\xi + B_0\eta + C_0\zeta) \frac{R^2}{r^2} \\ &\quad + R[3(A_0\xi + B_0\eta + C_0\zeta)(A_1\xi + B_1\eta + C_1\zeta) \\ &\quad - (A_0A_1 + B_0B_1 + C_0C_1)(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)] \frac{R^3}{r^3} \end{aligned} \quad (26)$$

$$Z = \frac{\partial V}{\partial r} \text{ lévén differenciálás után } r=R\text{-et téve}$$

$$Z = -2\Phi_1 - 3\Phi_2$$

a Föld felszínének bármely ξ , η , ζ pontjában. Ez az egyenlet használható fel a Maxwell-paraméterek kiszámítására. A számításához sok adatot kell figyelembe venni, ami elektronikus gépi számítást igényel. Kísérleti számításra kielégítő egy kis értéktáblázatnak, azoknak a V potenciálértékeknek felhasználása, amelyeket Vestine és munkatársai az 1945. epochára V_6 -ig kiszámított 204 potenciálértékből szerkesztettek (VESTINE, 1947; MAUERSBERGER, 1959. b).

A tényleges eljárás és az alkalmazott kísérleti számítás között a különbség lényegében annyi, hogy az észlelési adatokként szereplő V értékek már ki vannak egyenlítve. Ennek a körülménynek azonban nincs befolyása annak az elméleti részben tárgyalt elvi állításnak igazolására, hogy a k. m. sor megfelelőbb az excentrikus dipólus potenciálterének leírására és megvizsgálására, valamint az excentrikus dipólussal kapcsolatos problémák megoldására, mint a heterogén multipólusokból álló G. L. sor.

A V_1 és V_2 potenciálok helyett szokás szerint a $V_1/R = \Phi_1$ és $V_2/R = \Phi_2$ kifejezéseket használjuk. Minthogy ezek Legendre-polinómok lévén ortogonális függvények, a keresett paramétereket nem kell okvetlenül szimultán eljárással meghatároznunk; a legkisebb hibanégyzetösszeg elvének alkalmazásával először A_0 , B_0 , C_0 -t számítjuk ki Φ_1 -ből, azután az eredményül kapott értékeket adott számoknak tekintve A_1 , B_1 , C_1 -et Φ_2 -ből. Így feladatunk lineáris közvetítő egyenletek megoldása közelítő értékekkel (TÁRCZY-HORNOCH, 1950).

A_0 , B_0 , C_0 számításakor a hibaegyenletek \bar{A}_0 , \bar{B}_0 , \bar{C}_0 közelítő értékekkel és δA_0 , δB_0 , δC_0 kiegészítésekkel

$$(\bar{A}_0 + \delta A_0)\xi_i + (\bar{B}_0 + \delta B_0)\eta_i + (\bar{C}_0 + \delta C_0)\zeta_i = o_i + v_i \quad (i = 1, 2, \dots, 204)$$

Rendezve

$$\xi_i \delta A_0 + \eta_i \delta B_0 + \zeta_i \delta C_0 + [(\Phi_1)_i - o_i] = v_i,$$

végül

$$a_i x + b_i y + c_i z + l_i = v_i.$$

Itt o_i a Vestine-féle táblázatban $10^5 \Gamma \text{ cm}$ egységben megadott potenciálok R^{-1} -szerese γ egységben ($R = 6371 \text{ km}$); $(\Phi_1)_i$ a Φ_1 közelítő értékeit képviseli.

Figyelembe véve, hogy

$$\begin{aligned} a_i &= \xi_i = \cos \vartheta_i \\ b_i &= \eta_i = \sin \vartheta_i \cos \lambda_i \\ c_i &= \zeta_i = \sin \vartheta_i \sin \lambda_i, \end{aligned}$$

a normálegyenletek együtthatóinak táblázata

$$\begin{array}{ccc} [\cos^2 \vartheta] & [\sin \vartheta \cos \vartheta \cos \lambda] & [\sin \vartheta \cos \vartheta \sin \lambda] \\ & [\sin^2 \vartheta \cos^2 \lambda] & [\sin^2 \vartheta \sin \lambda \cos \lambda] \\ & & [\sin^2 \vartheta \sin^2 \lambda] \end{array}$$

Az összegezésnél

$$\vartheta = 10^\circ, 20^\circ, \dots, 170^\circ$$

$$\lambda = 30^\circ, 60^\circ, \dots, 360^\circ.$$

A Vestine-féle táblázat így megadott koordináta-hálózatánál alkalmazható goniometriai összefüggések felhasználásával

$$\begin{aligned} [\xi^2] &= 96 & [\xi \eta] &= 0 & [\xi \zeta] &= 0 \\ & & [\eta^2] &= 54 & [\eta \zeta] &= 0 \\ & & & & [\zeta^2] &= 54, \end{aligned}$$

tehát normálegyenleteink

$$\begin{aligned} +96x & & -691 &= 0 \\ +54y & & -5673 &= 0 \\ & +54z & -5624 &= 0. \end{aligned}$$

Első durva közelítő értékek $\bar{A}_0 = -30440$, $\bar{B}_0 = 0$, $\bar{C}_0 = +5860$ voltak. A második kiegyenlítésnél

a kiegészítések és közelítő értékek:	a végleges értékek	
$x = \delta A_0 = + 7$		
$\bar{A}_0 = -30258$	$A_0 = -30251$	
$y = \delta B_0 = + 105$		
$\bar{B}_0 = -2463$	$B_0 = -2358$	(27)
$z = \delta C_0 = + 104$		
$\bar{C}_0 = + 5626$	$C_0 = + 5730$	

A_1, B_1, C_1 számításakor az A_0, B_0, C_0 végleges, $\bar{A}_1, \bar{B}_1, \bar{C}_1$ közelítő értékekkel és $\delta A_1, \delta B_1, \delta C_1$ kiegészítésekkel a hibaegyenletek (20) szerint

$$\begin{aligned} & (\Phi_1)_i + 3(\Phi_1)_i [(\bar{A}_1 + \delta A_1)\xi_i + (\bar{B}_1 + \delta B_1)\eta_i + (\bar{C}_1 + \delta C_1)\zeta_i] \\ & - [A_0(\bar{A}_1 + \delta A_1) + B_0(\bar{B}_1 + \delta B_1) + C_0(\bar{C}_1 + \delta C_1)] = o_i + v_i \\ & (i = 1, 2, \dots, 204). \end{aligned}$$

Rendezve

$$\begin{aligned} & [3(\Phi_1)_i \xi_i - A_0] \delta A_1 + [3(\Phi_1)_i \eta_i - B_0] \delta B_1 \\ & + [3(\Phi_1)_i \zeta_i - C_0] \delta C_1 + [(\Phi_1)_i + (\Phi_2)_i - o_i] = v_i. \end{aligned}$$

Végül

$$a_i x + b_i y + c_i z + l_i = v_i.$$

Itt o_i az észlelési adatokat képviseli,

$$(\Phi_1)_i = A_0 \xi_i + B_0 \eta_i + C_0 \zeta_i,$$

$(\Phi_2)_i$ pedig Φ_2 közelítő értékeinek jelölése.

A normálegyenletek együtthatóiban

$$a_i a_i = 9(\Phi_1)_i^2 \xi_i^2 - 6(\Phi_1)_i A_0 \xi_i + A_0^2$$

$$b_i b_i = 9(\Phi_1)_i^2 \eta_i^2 - 6(\Phi_1)_i B_0 \eta_i + B_0^2$$

$$c_i c_i = 9(\Phi_1)_i^2 \zeta_i^2 - 6(\Phi_1)_i C_0 \zeta_i + C_0^2$$

$$a_i b_i = 9(\Phi_1)_i^2 \xi_i \eta_i - 3(\Phi_1)_i (A_0 \eta_i + B_0 \xi_i) + A_0 B_0$$

$$b_i c_i = 9(\Phi_1)_i^2 \eta_i \zeta_i - 3(\Phi_1)_i (B_0 \zeta_i + C_0 \eta_i) + B_0 C_0$$

$$c_i a_i = 9(\Phi_1)_i^2 \zeta_i \xi_i - 3(\Phi_1)_i (C_0 \xi_i + A_0 \zeta_i) + C_0 A_0$$

Figyelembe véve ξ, η, ζ jelentését, az összegezésnél a lehetséges goniometriai összefüggések alkalmazásával

$$[\xi^4] = 69 \quad [\xi^2 \eta^2] = 13,5 \quad [\xi^2] = 96$$

$$[\eta^4] = 30,375 \quad [\eta^2 \zeta^2] = 15,125 \quad [\eta^2] = 54$$

$$[\zeta^4] = 30,375 \quad [\zeta^2 \xi^2] = 13,5 \quad [\zeta^2] = 54$$

$$[1,1] = 204$$

végés tizedes törtet kapjuk, a fel nem sorolt többi összegezés eredménye zérus.

A normálegyenletek együtthatói

$$[aa] = 249 A_0^2 + 121,5 B_0^2 + 121,5 C_0^2$$

$$[bb] = 121,5 A_0^2 + 153,375 B_0^2 + 91,125 C_0^2$$

$$[cc] = 121,5 A_0^2 + 91,125 B_0^2 + 153,375 C_0^2$$

$$[ab] = - 3 A_0 B_0$$

$$[bc] = + 62,25 B_0 C_0$$

$$[ca] = - 3 C_0 A_0$$

Végül a már ismert A_0 , B_0 , C_0 behelyettesítése után és minden együtthatót ezerrel osztva a normálegyenletek

$$+ 232530384x - 213996y - 520015z - 180608 = 0$$

$$- 213996x + 115032133y - 801081z + 180582 = 0$$

$$- 520015x - 801081y + 116729893z + 128498 = 0$$

A kiegészítések
és közelítő értékek

A végleges
értékek

$$x = \delta A_1 = + 0,000778$$

$$\overline{A_1} = + 0,009520$$

$$A_1 = + 0,010298$$

$$y = \delta B_1 = - 0,001576$$

$$\overline{B_1} = - 0,058011$$

$$B_1 = - 0,059587$$

(28)

$$z = \delta C_1 = - 0,001128$$

$$\overline{C_1} = + 0,028350$$

$$C_1 = + 0,027222$$

A dipólus és kvadrupólus adatai, a Föld mágneses középpontja. (21) szerint közvetlenül adódik a Földdipólus nyomatékának értéke R^{-3} -mal szorozva

$$M = 30875\gamma. \quad (29)$$

A dipólus tengelyének iránycosinusai

$$a_0 = - 0,979661$$

$$b_0 = - 0,076362 \quad (30)$$

$$c_0 = + 0,185562$$

(22) szerint közvetlenül megkapjuk a mágneses középpont excentricitását

$$Rd_1 = 6371 \cdot 0,066315 \text{ km} = 422 \text{ km}. \quad (31)$$

A d_1 translatio iránycosinusai (19)-ből

$$a_1 = + 0,155289$$

$$b_1 = - 0,898543 \quad (32)$$

$$c_1 = + 0,410494$$

A kvadrupólus nyomatéka R^{-4} -gyel szorozva

$$P = 2Md_1 = 4095\gamma. \quad (33)$$

L_1 kvadrupólus-tengely metszéspontja a Föld felszínével legyen D_1 pont ennek földrajzi koordinátái (32)-ből

$$\Theta = 8^\circ 56' N \quad (34)$$

$$\lambda = 155^\circ 27' E.$$

A kvadrupólus tengelyeinek szöge

$$\text{arc cos } (a_0 a_1 + b_0 b_1 + c_0 c_1) = 90^\circ 25' \quad (35)$$

tehát a kvadrupólus kevés híján elfajuló (KILCZER, 1966). A kvadrupólus tengelyeinek síkjára merőleges a kvadrupólus s_2 sajátvektora; legyen ennek metszéspontja a Föld felszínével S_2 . OS_2 iránycosinusait (KILCZER, 1964) szerint kell kiszámítani; ezek

$$l_2 = +0,135375$$

$$m_2 = +0,430974 \quad (36)$$

$$n_2 = +0,892152$$

A S_2 pont földrajzi koordinátái (36)-ból:

$$\Theta = 7^\circ 47' N \quad (37)$$

$$\lambda = 64^\circ 13' E.$$

A kvadrupólus adatait és a mágneses középpontot a G. L. sorból Ad. Schmidt eljárása szerint önkényes definíció alapján és csak hosszadalmas számítással lehet meghatározni; az eredmények némileg eltérnek az itt közöltektől (KILCZER, 1966). Az eltérés onnan származik, hogy a G. L. sor második tagja nem az első tagnak, a dipólusnak a kvadrupólusa, amint ezt már a bevezetésben említettük.

A (q, Q, p) együtthatók kiszámítása. Az excentrikus dipólusnak ξ, η, ζ hatványai szerint rendezett kifejezésében szereplő együtthatókat (23) szerint számítjuk ki; összehasonlításként velük párhuzamosan felírjuk a (g_n^m, h_n^m) Gauss-féle paraméterekből számított együtthatókat. A paramétereket VESTINE ÉS MUNKATÁRSAI (1947) a X, Y komponensekből határozták meg.

A potenciál-gömbfüggvény-sor együtthatói tehát ezek szerint

Szerző együtthatói (23) szerint számítva: (k. m. együtthatók)	Vestine együtthatói (g_n^m, h_n^m) -ből számítva: (G. L. együtthatók)
$p_0 = -30251$	$\bar{p}_0 = -30570$
$p_1 = -2358$	$\bar{p}_1 = -2110$
$p_2 = +5730$	$\bar{p}_2 = +5810$
$Q_0 = -920$	$\bar{Q}_0 = -1270$
$Q_1 = +436$	$\bar{Q}_1 = +2055$

$$\begin{array}{ll}
 Q_2 = + 484 & \bar{Q}_2 = - 785 \\
 3 q_1 = + 5334 & 3 \bar{q}_1 = + 5128 \\
 3 q_4 = - 1216 & 3 \bar{q}_4 = + 935 \\
 3 q_2 = - 2293 & 3 \bar{q}_2 = - 2875
 \end{array}$$

Vestine együtthatóit az ő adataiból (9) szerint számítottuk és felülvonással különböztettük meg saját együtthatóinktól.

Ezekkel az k. m. együtthatókkal felírt potenciálkifejezések

$$\begin{aligned}
 \Phi_1 &= -30251\xi - 2358\eta + 5730\zeta \\
 \Phi_2 &= -920\xi^2 + 436\eta^2 + 484\zeta^2 \\
 &\quad + 5334\xi\eta - 1216\eta\zeta - 2293\zeta\xi
 \end{aligned}$$

a G. L. együtthatókkal felírt potenciálkifejezések:

$$\begin{aligned}
 \Phi_1 &= -30570\xi - 2110\eta + 5810\zeta \\
 \Phi_2 &= -1270\xi^2 + 2055\eta^2 - 785\zeta^2 \\
 &\quad + 5128\xi\eta + 935\eta\zeta - 2875\zeta\xi
 \end{aligned}$$

A kétféle potenciálkifejezés dipólusainak lényegtelen eltérése (átlagban néhány százalék) a kétféle numerikus számítási eljárás különbözőségéből származik. A kvadrupólusok együtthatói között észrevehető eltérések lényegesek. Ezeknek az eltéréseknek hatását a potenciálkifejezések értékészletére és annak a földrajzi helytől függő viselkedésére csak akkor tudjuk érdemlegesen megállapítani, ha valamilyen jól összehasonlítható módon ábrázoljuk ezeket a kifejezéseket. Célravezetőnek látszik az ekvipotenciális vonalak ábrázolása, de még inkább – amit majd kiderül – a potenciál izoanómáliák vonalainak megrajzolása a Föld felszínére.

Az ekvipotenciális és az izoanómália vonalak. Koordinátarendszerül leg-egyszerűbb a derékszögű parallelogramma-hálózat választása; az eltérések lényegének felismerését ennek a hálózatnak torzítása – amely különösen a sarkok közelében mutatkozik – nem gátolja.

Az ekvipotenciális vonalak megrajzolásához ki kell számítani a k. m. sor és a G. L. sor teljes Φ potenciálkifejezéseinek (mindkét sor első két tagja összegének) a Vestine-féle táblázatban megadott (λ, ϑ) koordináta-párokhoz tartozó 204 – 204 helyettesítési értékét. Ezeket a helyettesítési értékeket minden $\lambda = \text{konstans}$ esetre külön grafikonon ábrázoljuk, mint ϑ függvényét és viszont minden $\vartheta = \text{konstans}$ esetre, mint λ függvényét. Ezekből a grafikonokból állapítjuk meg azokat a földrajzi helyeket, amelyekben a Φ függvények bizonyos kiválasztott értékeket ($-3 \cdot 10^4 \gamma, -2 \cdot 10^4 \gamma, \dots$) felvesznek. Az így megállapított és azonos értékeket mutató pontokat összekötő vonalak az ekvipotenciális vonalak.

Teljesen hasonló eljárással szerkesztjük meg az $l=0-\Phi$ anomáliaértékek-ből rajzolt grafikonokkal az izoanomália vonalakat.

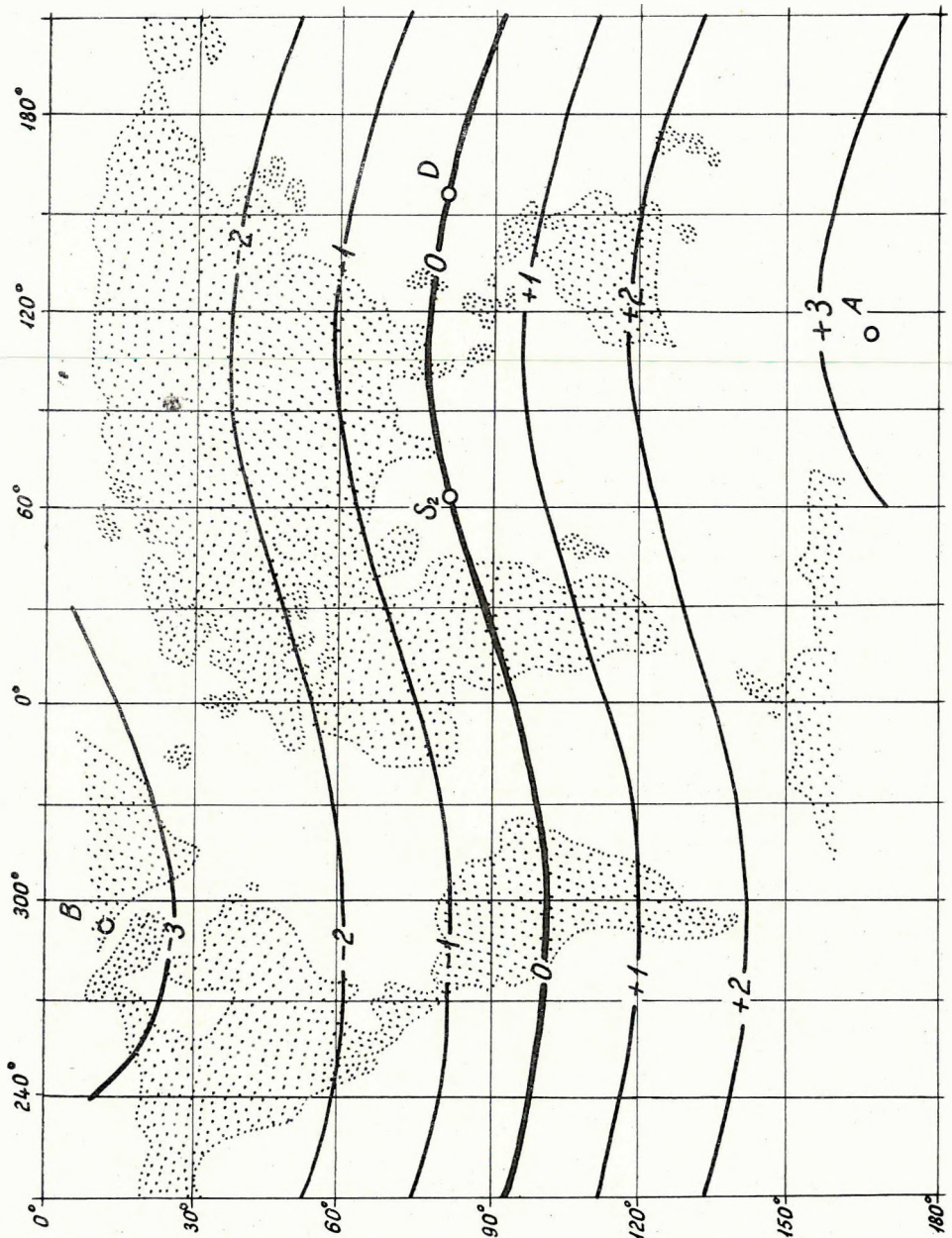
Az 1. ábrán a mindkét sorfejtésben közös centrikus dipólus ekvipotenciális vonalait látjuk, mégpedig Φ_1 -nek a -3.10^4 , -2.10^4 , -1.10^4 , 0 , $+1.10^4$, $+2.10^4$, $+3.10^4\gamma$ értékeit mutató földrajzi pontokat összekötő vonalakat. A centrikus dipólus minden sorfejtésben azonos; a k. m. sor és a G. L. sor Φ_1 -eiben az eltérés lényegtelen, az ábrázolásban fel sem tűnik, úgyhogy az 1. ábra mindkettőre egyaránt vonatkozik. A földgömb felszínén a centrikus dipólus ekvipotenciális vonalai a földmágneses egyenlítővel párhuzamos körök.

A 2. ábra a Vestine-féle táblázat, a 3. és 4. pedig a k. m. sor és a G. L. sor teljes $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ potenciálfüggvényeinek ekvipotenciális vonalait mutatja az előbbi 1. ábrának értékeivel egyező potenciálokra. A Vestine-féle táblázat vonalai az észlelt X , Y adatokból számított Φ értékeket ábrázolják, 3. vonalai az excentrikus dipólus potenciáeloszlását. A 4. ábra esetében csak a sor első két tagjának összegéhez tartozó vonaloknak nevezhetjük őket, mert a G. L. sor első két tagja nem koherens. A vonalak görbületeiben és a szomszédos, vagyis egyenlő értékű vonalak között levő távolságok változásaiban határozott eltéréseket lehet ugyan észrevenni, de ezek a különbségek teljes mértékben csak a térképek következő sorozatában, az izoanomália térképeken válnak igazán feltűnővé.

Az 5. ábrán a közös centrikus dipólus potenciáljának izoanomália-vonalait látjuk, vagyis $(0-\Phi_1)$ -nek (0 a Vestine-féle táblázat adatait jelenti) -4.10^3 , -3.10^3 , -2.10^3 , -1.10^3 , 0 , $+1.10^3$, $+2.10^3$, $+3.10^3$, $+4.10^3\gamma$ értékeivel jellemzett földrajzi pontokat összekötő vonalakat. A 6. ábrán külön is megrajzolt zérus anomália vonal egyetlen zárt görbe mentén járja körül a Földet. Így a Föld felszínét két nagy, egyrészt negatív, másrészt pozitív régióra osztja: Ázsia és egész Amerika negatív, Európa, Afrika, Ausztrália pozitív anomáliás terület. Az északi félgömbön az anomáliának két negatív, a délin két pozitív szélső értéke van. Az anomáliák keletkezésében láthatóan szerepük van a kontinenseknek is (BARTA, 1957).

Ez a sajtóság még jobban szembetűnik a 7. és 8. térképen; ezek a k. m. sorral számított teljes potenciálnak vagyis az excentrikus dipólus potenciáljának izoanomália vonalait tüntetik fel, a 8. ábra külön csak a zérus anomália vonalát. Feltűnő, hogy a Φ_2 tag az anomáliák értékeit az 5. térképhez viszonyítva csak alig csökkenti, ellenben a teresztrikus regionális anomáliákat egymástól jobban elkülöníti: a negatívokat két zárt görbe választja el a pozitívoktól, a negatívok két egyszerűen összefüggő, a pozitívok ennek megfelelően egy kétszeresen összefüggő felületet alkotnak. Nagyon feltűnő Afrika kiemelkedő pozitív anomáliája a többi kontinens főleg negatív anomáliájával szemben.

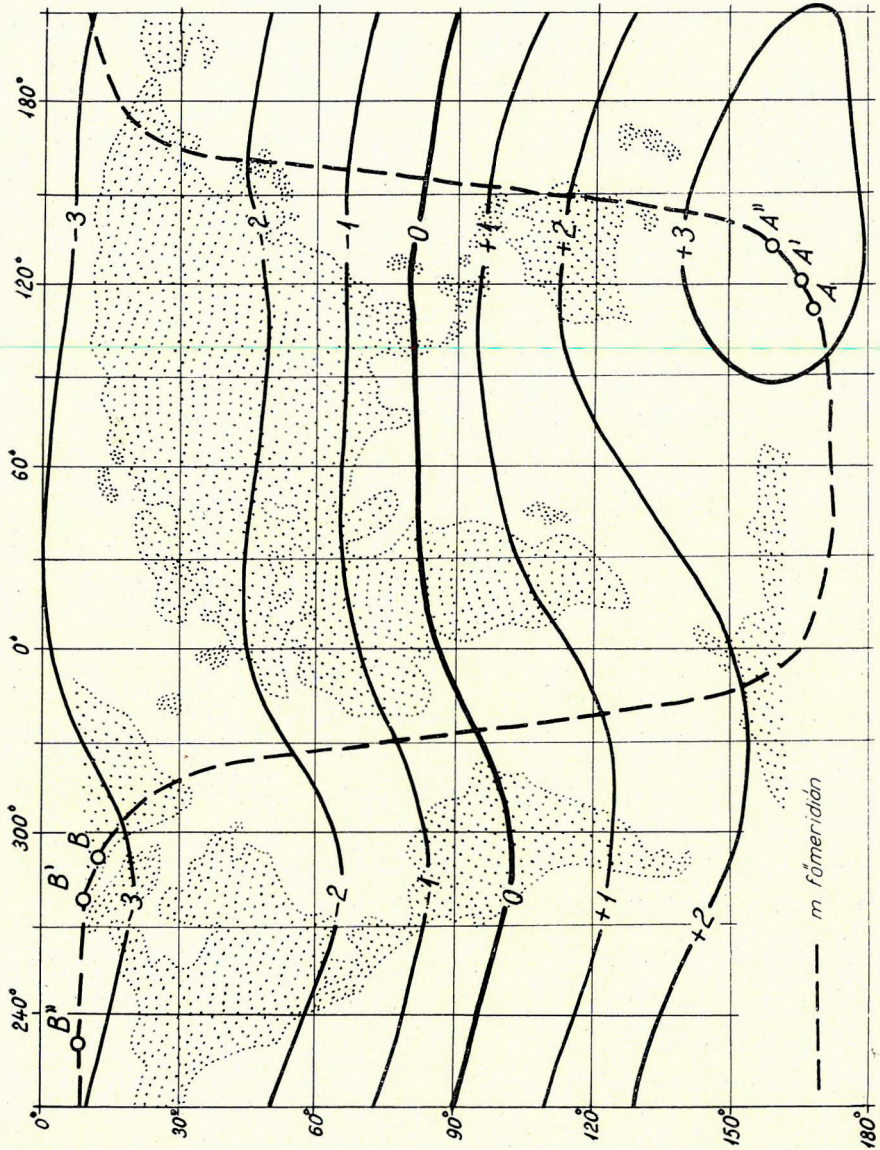
A 9. és 10. ábra a Vestine együtthatókkal számított G. L. sorral meghatározott teljes potenciálnak, a sorfejtés első két tagjával megadott potenciálnak izoanomália vonalait mutatja, a 10. térkép külön csak a zérus-anomália vonalait. Azonnal szembeötlik ennek a két térképnek az excentrikus dipólus megfelelő 7. és 8. térképeitől teljesen elütő jellege. Feltűnő, hogy a Φ_2 tag bekapcsolódása az anomália értékeket a 7. és 8. térképhez viszonyítva körülbelül felére csökkenti és a zérus-anomália vonalak számát háromra növeli; ez nyilván megfelel a G. L. sor gyorsabban közelítő tulajdonságának. De még élesebben különböznek ezek a térképek az excentrikus dipólus térképeitől abban, hogy



1. ábra. A centrikus dipólus ekvipotenciális vonalai. Egység $10^4 \gamma$. B, A a földmágneses pólusok; D a földmágneses főmeridián és földmágneses egyenlítő metszéspontja; S_2 a kvadrupólus második sajátvektorának metszéspontja a földmágneses egyenlítővel.

Фиг. 1. Эквипотенциальные линии центрального диполя. Единица измерения $10^4 \gamma$. В и А – магнитные полюсы; D – пункт пересечения главного геомагнитного меридиана и геомагнитного экватора; S_2 – пункт пересечения второго самовектора квадрупольного поля и геомагнитного экватора

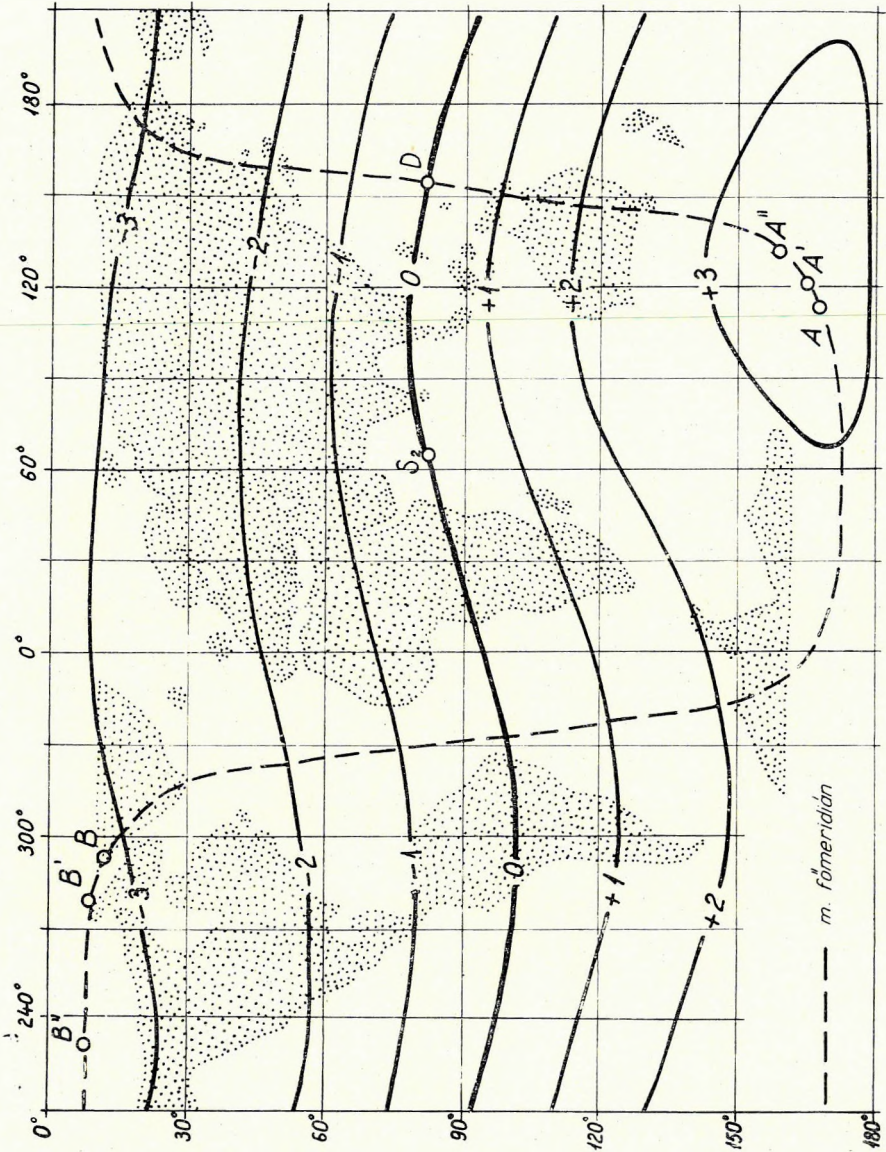
Fig. 1. Equipotential lines of the centric dipole. Unit: $10^4 \gamma$. B and A are the geomagnetic poles; D is the intersection of the geomagnetic main meridian and the geomagnetic equator; S_2 is the intersection of the second eigenvector of the quadrupole and the geomagnetic equator.



2. ábra. A Vestine-féle V táblázat értékeinek ekvipotenciális vonalai. Egység $10^4\gamma$. B , és A a földmágneses pólusok; B' és A' az excentrikus dipólus tengelyének dőféspontjai; B'' és A'' a mágneses pólusok.

Fig. 2. Эквипотенциальные линии величин таблицы Вестайна. Единица измерения $10^4 \gamma$. B и A – магнитные полюсы Земли; B' и A' – конечные пункты оси эксцентричного диполя; B'' и A'' – магнитные полюсы

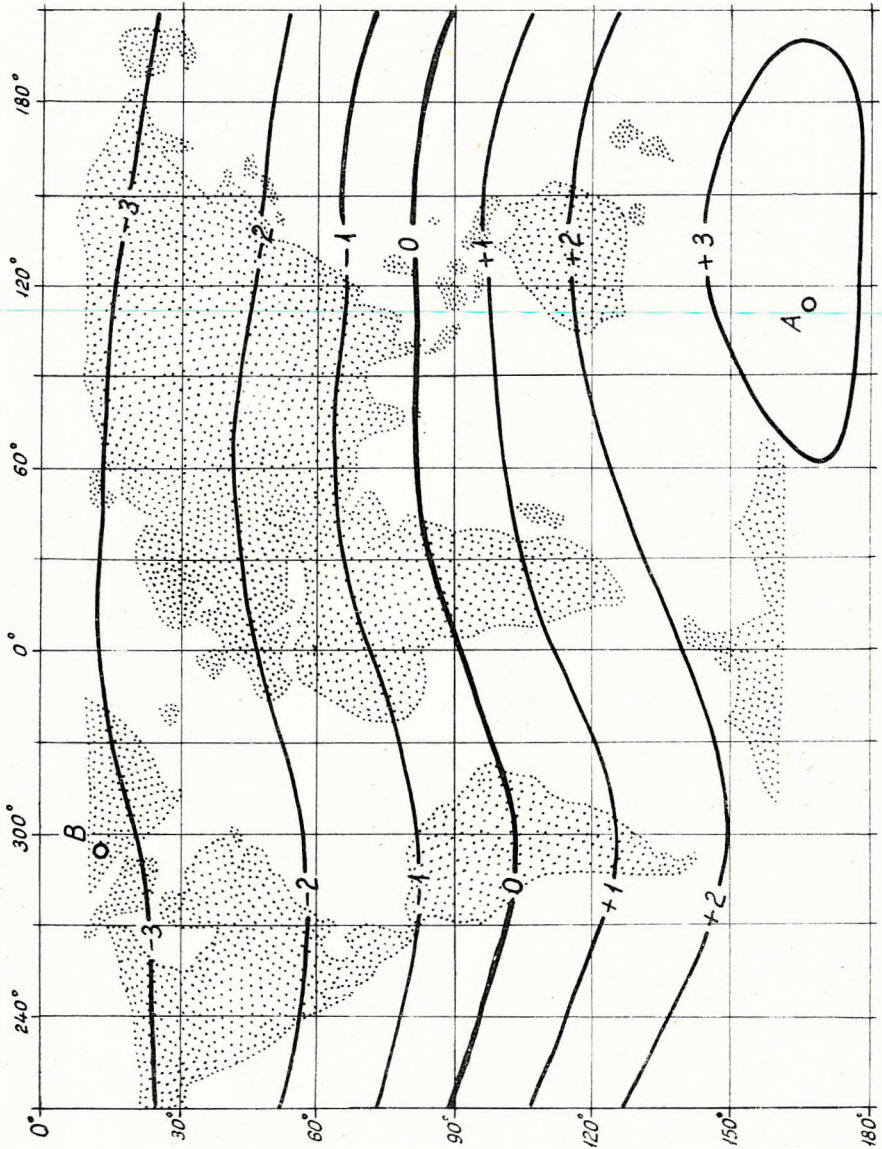
Fig. 2. Equipotential lines of Vestine's table V . Unit: $10^4\gamma$. B and A are the geomagnetic poles; B' and A' are the endpoints of the eccentric dipole-axis; B'' and A'' are the dipoles.



3. ábra. Az excentrikus dipólus ekvipotenciális vonalai a Maxwell-féle paramétereiből számítva. Egység $10^4 \gamma$. D és S_2 mint az 1. ábrán; B, A, B', A', B'', A'' mint a 2. ábrán.

Фиг. 3. Эквипотенциальные линии эксцентричного диполя, подсчитанные по параметрам Максвелла. Единица измерения $10^4 \gamma$. D и S_2 - см. фиг. 1.; B, A, B', A', B'', A'' - см. фиг. 2.

Fig. 3. Equipotential lines of the eccentric dipole as calculated with the Maxwell-parameters Unit: $10^4 \gamma$. D and S_2 as on Fig. 1., B, A, B', A', B'', A'' as on Fig. 2.



4. ábra. A Gauss-Legendre sor első két tagja összegének ekvipotenciális vonalai a Vestine-féle paraméterekből számítva. Egység $10^4 \gamma$. B és A a földmágneses pólusok.

Фиг. 4. Эквипотенциальные линии суммы первых двух членов ряда Гаусса – Лежандра по параметрам Вестайна. Единица измерения $10^4 \gamma$. B и A – магнитные полюсы Земли

Fig. 4. Equipotential lines of the sum of the first two members of the Gauss-Legendre series calculated with Vestine's parameters. Unit: $10^4 \gamma$. B and A are the geomagnetic poles

az anomáliák nemhogy jobban kitűnnének és elkülönülnének, hanem ellenkezőleg: csökkennek és kiegyenlítődnek.

A k. m. sor szintén a kiegyenlített észlelési adatokhoz konvergál, mint a G. L. sor de a megközelítés folyamata a paraméterek közt levő kényszerfeltételek miatt lassúbb, mint a G. L. sornál. A k. m. sor szemmel láthatóan lassabban olvasztja be az excentrikus dipólus potenciáljába az egyelőre még elkülönülő anomáliákat. A G. L. sornál az anomáliák felszívásának ez a folyamata már a Φ_2 -vel megkezdődik. Elég nagyszámú tag esetén azonban a k. m. sornak ez az előnyös viselkedése megszűnik, a két sor eltérésének fokozatosan csökkennie kell. Emiatt a földmágneses potenciál kiszámításánál is megállhatunk a másodrendű tagnál, mint ahogy a gravitációs potenciál meghatározásánál tesszük.

A földmágneses pólusok meghatározása. Legyen a $\bar{O}(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta})$ földmágneses koordinátarendszer $\bar{\xi}$ tengelye a Földdipólus tengelye, de ellenkező irányban, mint az eddig használt $O(\xi, \eta, \zeta)$ koordinátarendszerben, azért, hogy a $\bar{\xi}$ tengely pozitív iránya észak felé mutasson. Tehát $\bar{\xi}$ tengely iránycosinusai \bar{O} -ban egyenlők az ellenkező előjellel vett (30) iránycosinusokkal. A $\bar{\xi}$ tengelyre merőleges síkú legnagyobb körnek, a mágneses egyenlítőnek egyenletrendszere a O koordinátarendszerben

$$+0,979661\xi + 0,076362\eta - 0,185562\zeta = 0$$

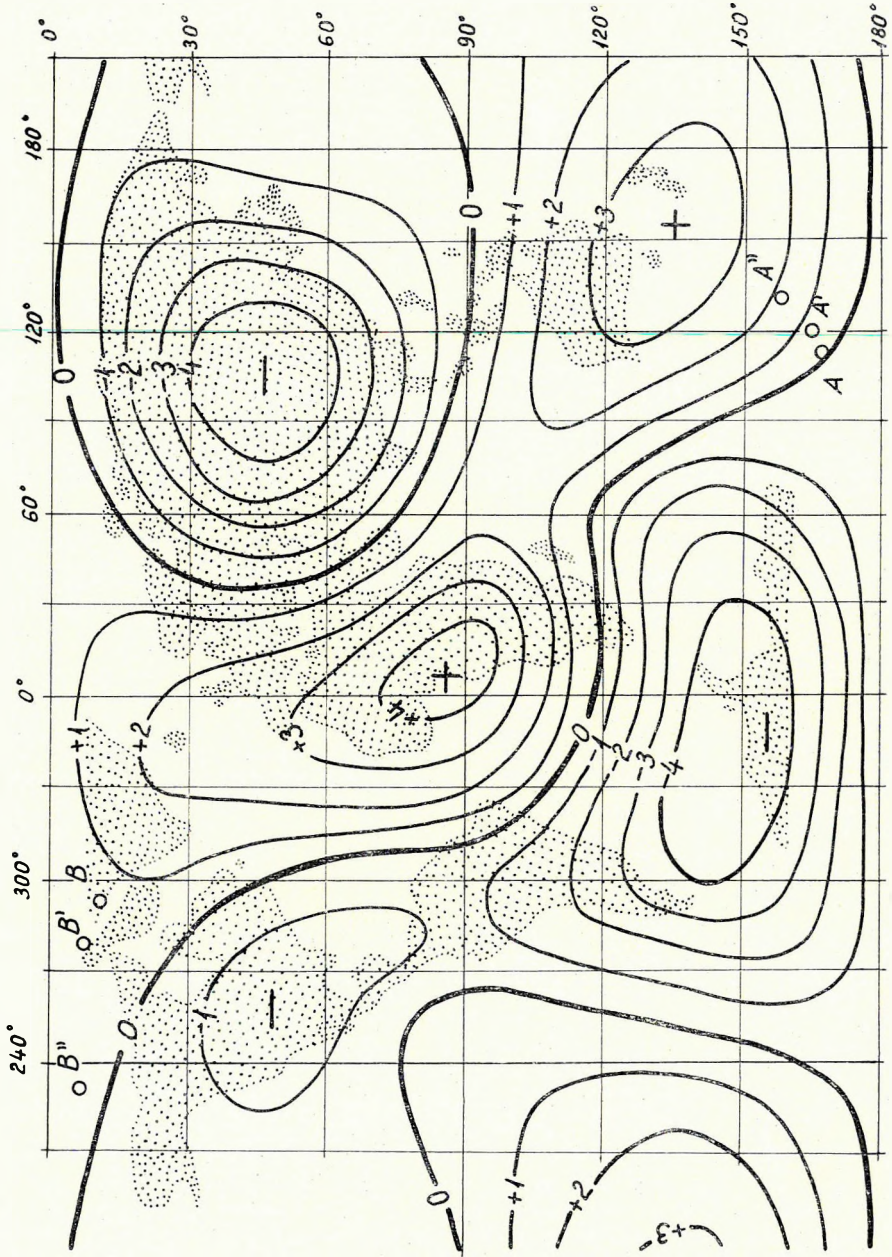
$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1 \quad (39)$$

Másik alapkörnek a mágneses főmeridiánt választjuk, azt a legnagyobb kört, amelynek síkjában a centrikus dipólus tengelye van, vagyis a $\bar{\xi}$ tengely, továbbá az excentrikus dipólusnak ezzel párhuzamos tengelye és a kvadrupólus L_1 tengelye. Ennek folytán ezen a főmeridiánon vannak a B északi és A déli földmágneses pólusok, az excentrikus dipólusnak B' és A' dőféspontja a Föld felszínével, végül a B'' északi és A'' déli mágneses pólusok (elméleti inklinációs pólusok).

A \bar{O} koordinátarendszer $\bar{\zeta}$ tengelye a mágneses egyenlítő síkjának és a mágneses főmeridián síkjának metszésvonala $\bar{O}D$; D az a pont, amelyben a mágneses egyenlítő és a főmeridián egymást metszi, annak a D_1 (34) pontnak közelében van, amelyben L_1 metszi a főmeridiánt.

A \bar{O} koordinátarendszer $\bar{\eta}$ tengelye az $\bar{O}S_2$ sugár; S_2 az a pont, amelyben a kvadrupólus s_2 sajátvektora (KILCZER, 1964) metszi a mágneses egyenlítőt. A sajátvektor iránycosinusait és S_2 földrajzi koordinátáit már megadtuk (36) és (37)-ben.

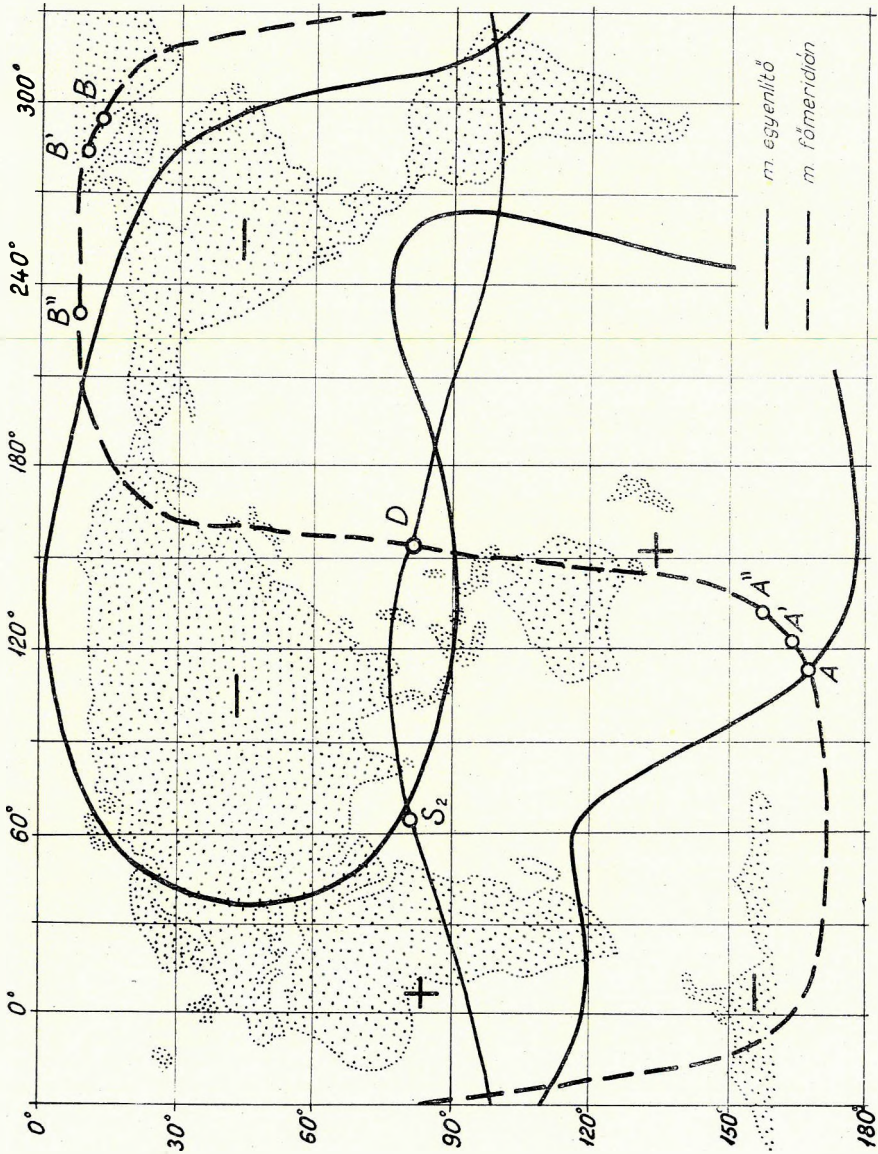
A $\bar{O}D = \bar{\zeta}$ tengely iránycosinusait abból a követelményből kell kiszámítani, hogy $\bar{\xi}$ -ra és $\bar{\eta}$ -ra merőleges legyen, úgyhogy $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$ sorrendben jobbsodrású koordinátarendszert alkossanak; ennek pedig az a feltétele, hogy kilenc iránycosinusuk $+1$ értékű determinánst alkosson, a O és \bar{O} koordinátarendszerek transzformáló determinánsát.



5. ábra. A centrikus dipólus potenciál-izoanómia vonalai. Egység $10^3\gamma$. B, B', B'', A, A', A'' mint a 3. ábrán.

Фиг. 5. Потенциальные изолинии центрального диполя. Единица измерения $10^3 \gamma$. B', B', B'', A, A', A'' - см. фиг. 3.

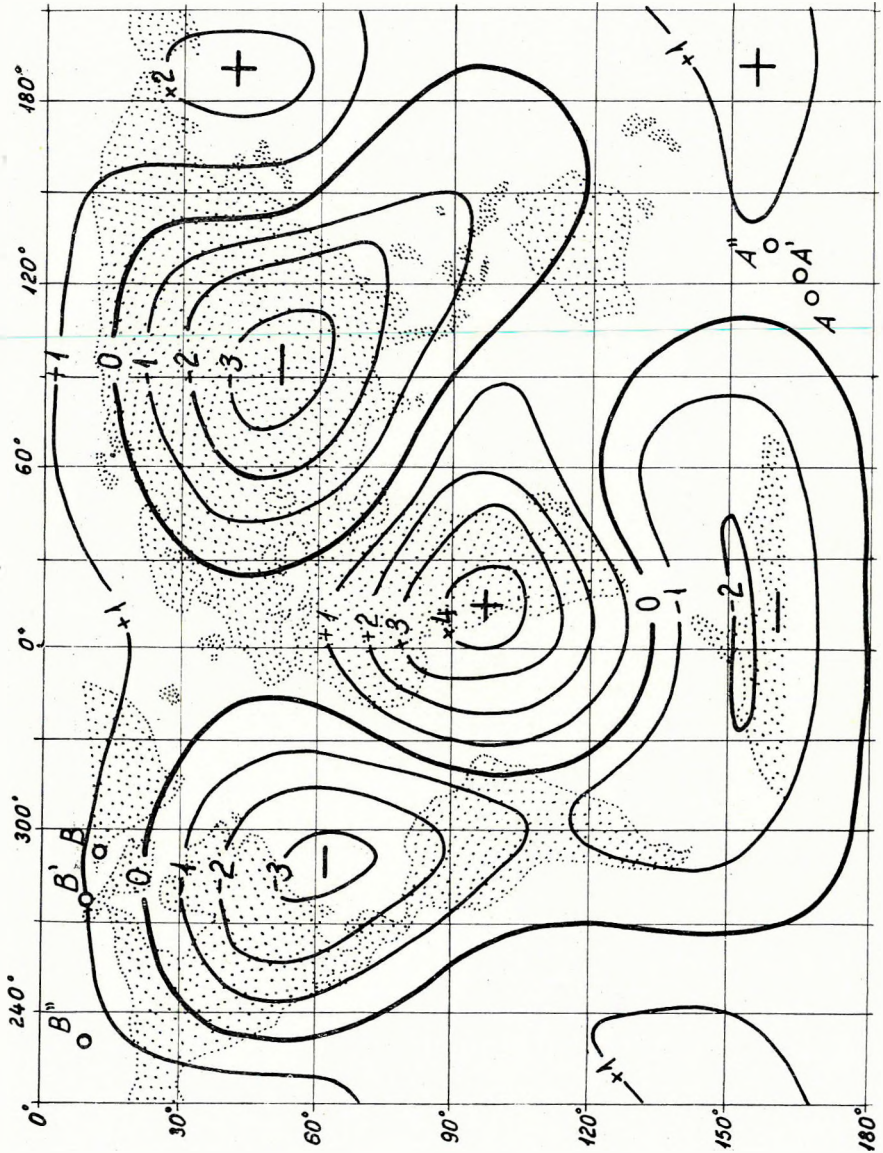
Fig. 5. Potential-isoanomaly lines of the centric dipole. Unit $10^3\gamma$.



6. ábra. A centrikus dipólus potenciál-anomáliájának zérus vonala az 5. ábrából; D és S_2 mint az 1. ábrán; B, B', B'', A, A', A'' mint a 2. ábrán.

Фиг. 6. Нулевая изолиния потенциалов центрального диполя из фиг. 5. D и S_2 – см. фиг. 1. B, B', B'', A, A', A'' – см. фиг. 2.

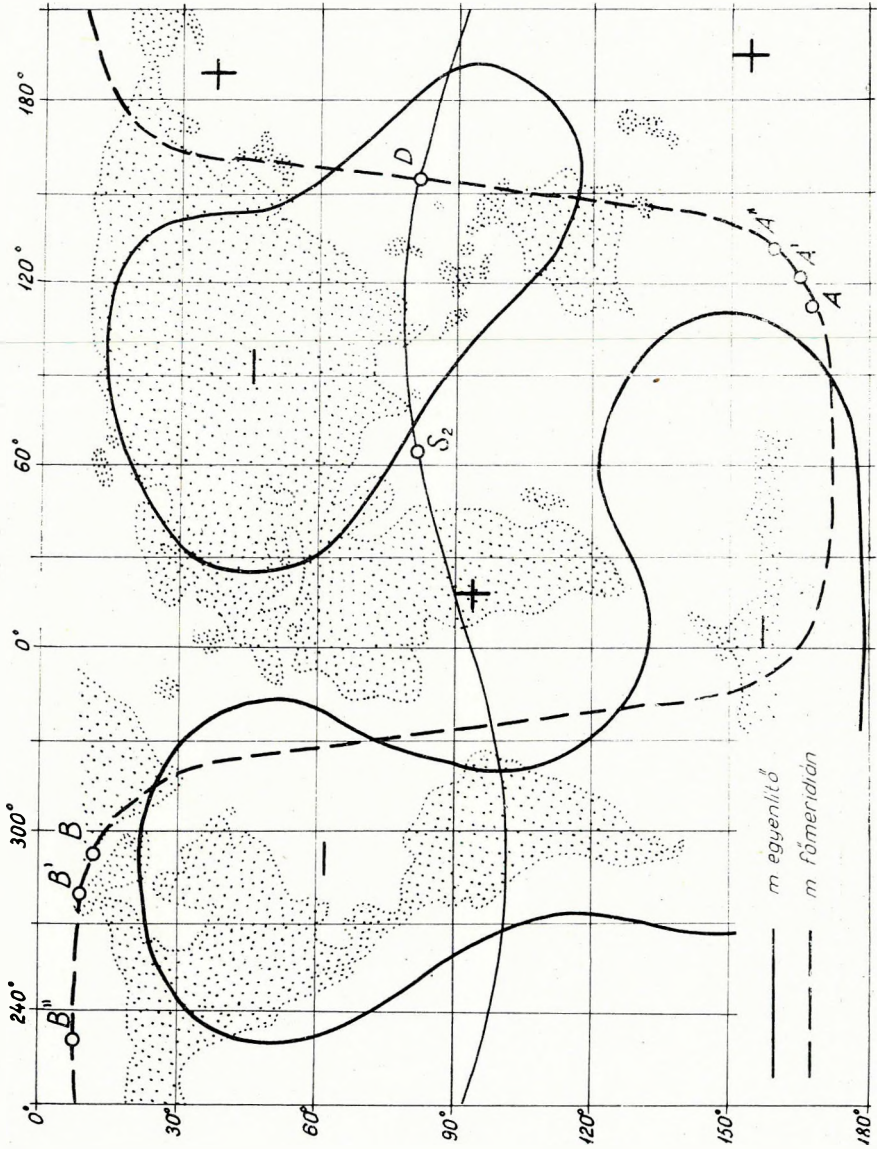
Fíg. 6. Zero potential-isoanomaly line of the centric dipole of the Fig. 5.



7. ábra. Az excentrikus dipólus potenciál-izoanómia vonalai. Egység $10^3\gamma$. B , B' , B'' , A , A' , A'' mint a 2. ábrán.

Fig. 7. Изолинии потенциалов эксцентричного диполя. Единица измерения $10^3 \gamma$. B , B' , B'' , A , A' , A'' – см. на фиг. 2.

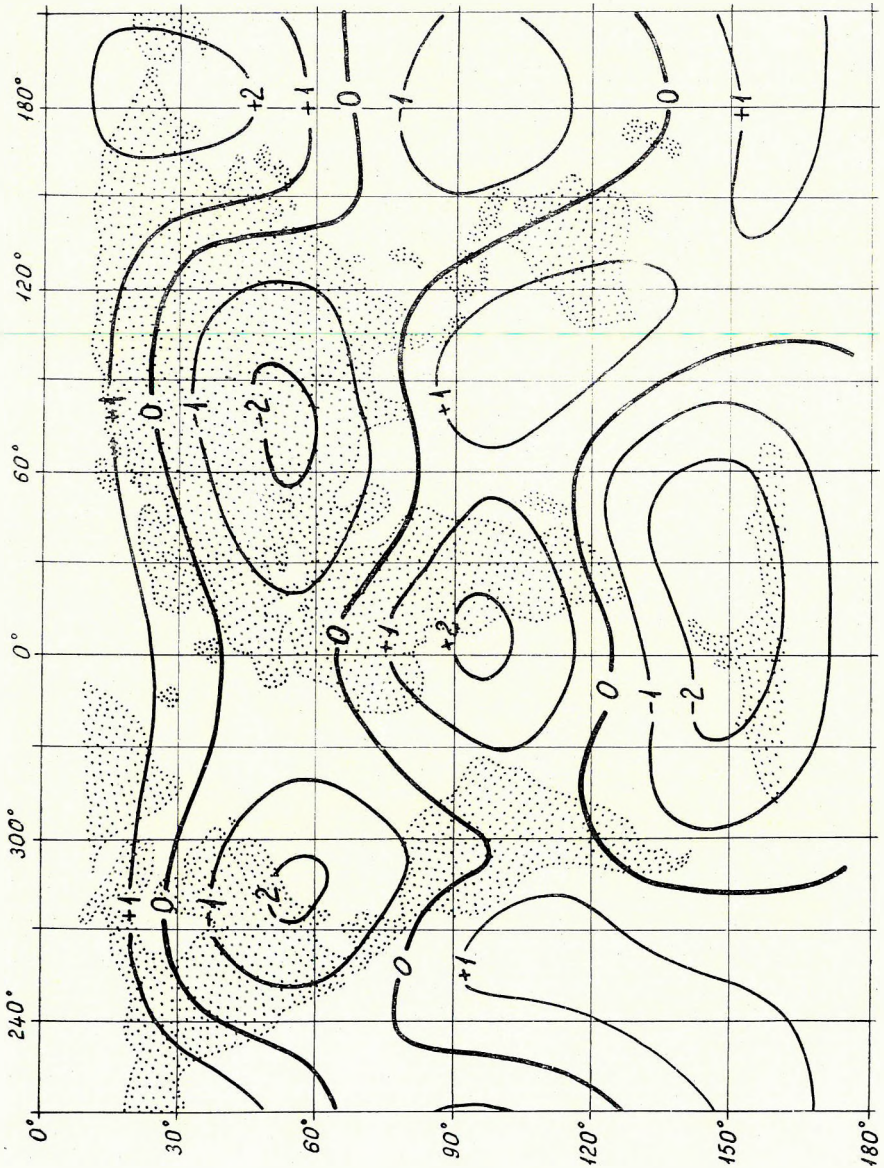
Fig. 7. Potential-isoanomaly lines of the eccentric dipole. Unit: $10^3\gamma$.



8. ábra. Az excentrikus dipólus potenciál-izoanomáliájának zérus vonalai a 7. ábrából; D és S_2 mint az 1. ábrán; B, B', B'', A, A', A'' mint a 2. ábrán

Фиг. 8. Нулевые изолинии потенциала эксцентричного диполя из фиг. 7; D и S_2 – см фиг. 1.; B, B', B'', A, A', A'' – см фиг. 2.

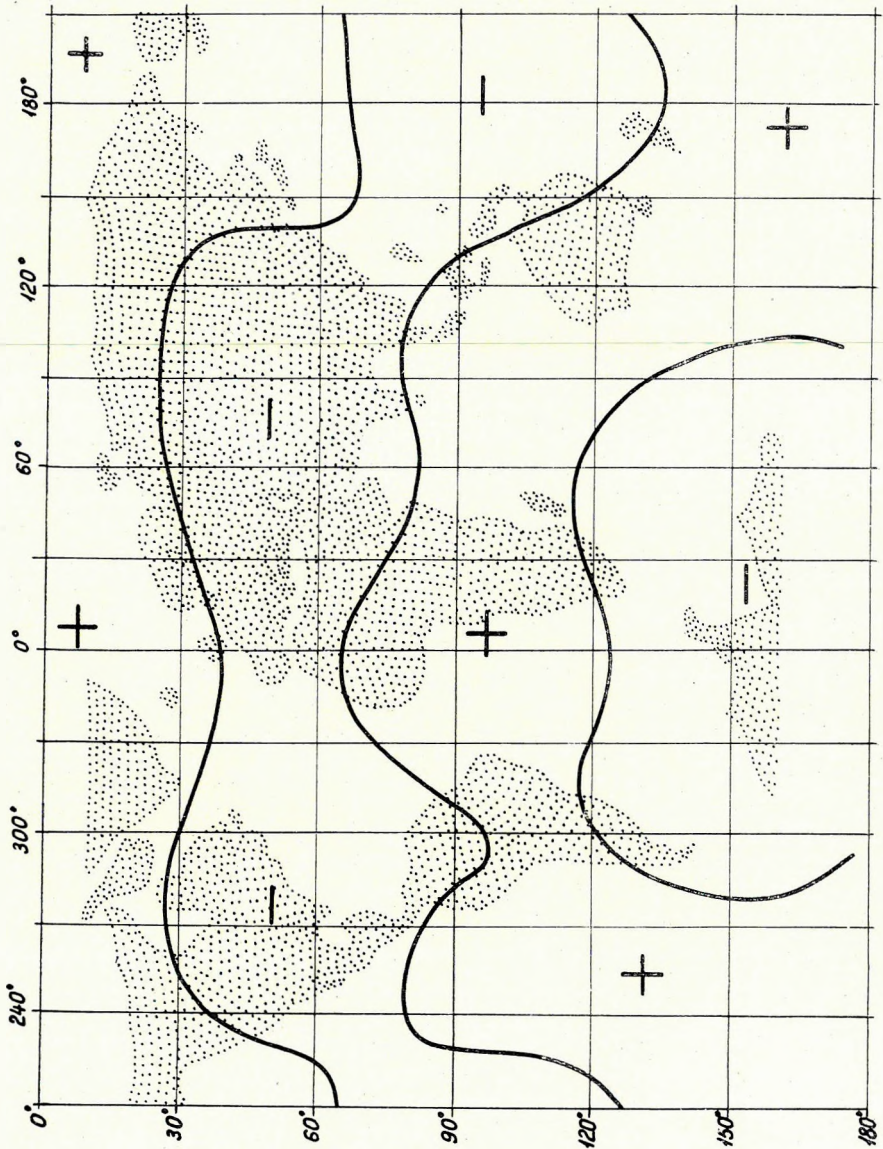
Fig. 8. Zero potential-isoanomaly lines from Fig. 7.



9. ábra. A Gauss-Legendre sor első két tagja összegének potenciál-izোনómia vonalai a Vestine-féle paraméterekből számítva. Egység $10^3\gamma$.

Фиг. 9. Изолинии потенциала суммы первых двух членов ряда Гаусса - Лежандра по параметрам Вестайна. Единица измерения $10^3\gamma$

Fig. 9. Potential-isoanomaly lines of the sum of the first two members of the Gauss-Legendre series as calculated with Vestine's parameters. Unit: $10^3\gamma$



10. ábra. A Gauss-Legendre sor első két tagja összegének zérus potenciál-izoanómia vonalai a 9. ábrából.

Fig. 10. Нулевая изолиния потенциала суммы первых двух членов ряда Гаусса - Лежандра из фиг. 9.

Fig. 10. Zero potential-isopotential line from Fig. 9.

Eszerint $\bar{\xi}$ iránycosinusai O rendszerben

$$\begin{aligned} a_D &= +0,148098 \\ b_D &= -0,899126 \\ c_D &= +0,411870 \end{aligned} \quad (40)$$

A transzformáló egyenletrendszerek:

\bar{O} -ból O -ba történő forgatásnál

$$\begin{aligned} \bar{\xi} &= +0,979661\xi + 0,135375\eta + 0,148098\zeta \\ \bar{\eta} &= +0,076362\xi + 0,430974\eta - 0,899126\zeta \\ \bar{\zeta} &= -0,185562\xi + 0,892152\eta + 0,411870\zeta \end{aligned} \quad (41)$$

O -ból \bar{O} -ba történő forgatásnál

$$\begin{aligned} \xi &= +0,979661\bar{\xi} + 0,076362\bar{\eta} - 0,185562\bar{\zeta} \\ \eta &= +0,135375\bar{\xi} + 0,430974\bar{\eta} + 0,892152\bar{\zeta} \\ \zeta &= +0,148098\bar{\xi} - 0,899126\bar{\eta} + 0,411870\bar{\zeta} \end{aligned} \quad (42)$$

Teljesség kedvéért felírjuk a mágneses főmeridián egyenletrendszerét is (síkjának normálisa $O S_2$):

$$\begin{aligned} +0,135375\xi + 0,430974\eta + 0,892152\zeta &= 0 \\ \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 &= 1 \end{aligned} \quad (43)$$

A főmeridián a O rendszer egyenlítőjét, a földrajzi egyenlítőt azokban a pontokban metszi, amelyeknek hosszúsága

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 154^\circ 13' E \\ \lambda_2 &= 25^\circ 47' W \end{aligned} \quad (44)$$

Előkészületeink után most már kiszámíthatjuk a pólusok koordinátáit.

B koordinátái \bar{O} -ban: $\bar{\xi} = +1, \bar{\eta} = 0, \bar{\zeta} = 0$

A koordinátái \bar{O} -ban: $\bar{\xi} = -1, \bar{\eta} = 0, \bar{\zeta} = 0$

Ezeket a koordinátákat (41) szerint O -ba transzformáljuk és átszámítjuk földrajzi koordinátákba. Összehasonlításul közöljük Vestine adatait is (MAUERSBERGER, 1959a).

Saját adataink:	Vestine adatai
$B: \quad \Theta = 78^\circ 25' N$	$\Theta = 78^\circ 36' N$
$\lambda = 67^\circ 48' W$	$\lambda = 70^\circ 06' W$
$A: \quad \Theta = 78^\circ 25' S$	$\Theta = 78^\circ 36' S$
$\lambda = 112^\circ 12' E$	$\lambda = 109^\circ 54' E$

(45)

Ezeket a földrajzi koordinátákat (30)-ból közvetlenül is kiszámíthatjuk, mert $\sin \Theta = a_0$ és $\operatorname{tg} \lambda = c_0/b_0$.

Ha az excentrikus dipólus dőféspontjainak pólustávolsága $\bar{\vartheta}$ és $\pi - \bar{\vartheta}$, a kvadrupólus tengelyek szöge pedig ψ , akkor

$$\sin \bar{\vartheta} = d_1 \sin \psi.$$

(31) és (35)-ből vett értékekkel számítva

$$\sin \bar{\vartheta} = 0,066315 \cdot \sin 90^\circ 25' = 0,066313, \quad \bar{\vartheta} = 3^\circ 48'.$$

Az excentrikus dipólus dőféspontjainak koordinátái $\bar{\vartheta}$ felhasználásával

$$B' \text{ koordinátái } \bar{O}\text{-ban: } \bar{\xi} = +0,997799, \bar{\eta} = 0, \bar{\zeta} = +0,066313$$

$$A' \text{ koordinátái } \bar{O}\text{-ban: } \bar{\xi} = -0,997799, \bar{\eta} = 0, \bar{\zeta} = +0,066313$$

A dőféspontok \bar{O} -beli koordinátáit (41) szerint transzformálva és földrajzi koordinátákban kifejezve, BARTA Gy. (1959) értékeivel összehasonlítva:

Saját adataink:	Barta Gy. adatai:
$B': \Theta = 80^\circ 52' N$	$\Theta = 80^\circ 48' N$
$\lambda = 84^\circ 0' W$	$\lambda = 85^\circ 24' W$
$A': \Theta = 75^\circ 24' S$	$\Theta = 75^\circ 48' S$
$\lambda = 122^\circ 35' E$	$\lambda = 119^\circ 48' E$

(46)

Az elméleti inklinációs pólusok meghatározása. A dipólusokat különböző közelítő eljárásokkal szokták meghatározni (BARTA, 1959). Egy exakt számító módszert a következőkben ismertetünk. Vonatkoztassuk a (10) kifejezést a \bar{O} rendszerre és fejezzük ki belőle az \bar{X} és \bar{Y} vízszintes komponenseket ($\bar{\vartheta}$ és $\bar{\lambda}$ változókkal):

$$\bar{X} = \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{\vartheta}} = -\bar{p}_0 \sin \bar{\vartheta} + \bar{p}_1 \cos \bar{\vartheta} \cos \bar{\lambda} + \bar{p}_2 \cos \bar{\vartheta} \sin \bar{\lambda} \quad (47)$$

$$-\bar{Q}_0 \sin 2\bar{\vartheta} + \bar{Q}_2 \sin 2\bar{\vartheta} + 3\bar{Q}_2 \cos 2\bar{\vartheta}$$

$$\bar{Y} = -\frac{1}{R \sin \bar{\vartheta}} \cdot \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{\lambda}} = \bar{p}_1 + 3\bar{q}_1 \cos \bar{\vartheta} + 3\bar{q}_4 \sin \bar{\vartheta} \quad (48)$$

Azonban a \bar{O} koordináta-rendszerben a kvadrupólus-tengelyek iránycosinusai

$$\bar{a}_0 = -1 \quad \bar{a}_1 = \cos(\pi - \psi) = -\cos \psi$$

$$\bar{b}_0 = 0 \quad \bar{b}_1 = 0$$

$$\bar{c}_0 = 0 \quad \bar{c}_1 = \sin(\pi - \psi) = +\sin \psi,$$

tehát (18) szerint

$$\begin{aligned}\bar{p}_0 &= M\bar{a}_0 = -M \\ \bar{p}_1 &= M\bar{b}_0 = 0 \\ \bar{p}_2 &= M\bar{c}_0 = 0 \\ \bar{Q}_0 &= Md_1(2\bar{a}_0\bar{a}_1 - \bar{b}_0\bar{b}_1 - \bar{c}_0\bar{c}_1) = +2Md_1 \cos \psi \\ \bar{Q}_2 &= Md_1(2\bar{c}_0\bar{c}_1 - \bar{a}_0\bar{a}_1 - \bar{b}_0\bar{b}_1) = -Md_1 \cos \psi \\ 3\bar{q}_1 &= 3Md_1(\bar{a}_0\bar{b}_1 + \bar{a}_1\bar{b}_0) = 0 \\ 3\bar{q}_4 &= 3Md_1(\bar{b}_0\bar{c}_1 + \bar{b}_1\bar{c}_0) = 0 \\ 3\bar{q}_2 &= 3Md_1(\bar{c}_0\bar{a}_1 + \bar{c}_1\bar{a}_0) = -3Md_1 \sin \psi.\end{aligned}$$

Az elméleti inklinációs pólus jellemzője, hogy ott $\bar{X} = \bar{Y} = 0$. (48) szerint $\bar{Y} \equiv 0$, (47)-ből pedig

$$\sin \bar{\vartheta} - 3d_1 \sin(2\bar{\vartheta} + \psi) = 0. \quad (49)$$

Ha (35) szerint ψ -t közelítőleg 90° -nak vesszük, $\sin \bar{\vartheta}$ -ra egyszerű másodfokú egyenletünk van, amelyből

$$\sin \bar{\vartheta} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 72d_1^2}}{12d_1};$$

$d_1 = 0,066315$ -tel számolva (a négyzetgyöknek csak a + előjele használható)

$$\bar{\vartheta}_{B''} = 11^\circ 23', \quad \bar{\vartheta}_{A''} = 168^\circ 37'.$$

Az elméleti inklinációs pólusok koordinátái $\bar{\vartheta}$ felhasználásával

$$B'' \text{ koordinátái } \bar{O}\text{-ban: } \bar{\xi} = +0,980329, \bar{\eta} = 0, \bar{\zeta} = +0,197370$$

$$A'' \text{ koordinátái } \bar{O}\text{-ban: } \bar{\xi} = -0,980329, \bar{\eta} = 0, \bar{\zeta} = +0,197370.$$

A \bar{O} rendszerből a koordinátákat (41)-gyel O -ba transzformálva s földrajzi koordinátákkal kifejezve

Saját adataink:

Barta Gy. adatai:

$$B'': \Theta = 81^\circ 44' N$$

$$\Theta = 82^\circ 06' N$$

$$\lambda = 134^\circ 27' W$$

$$\lambda = 130^\circ 12' W$$

$$A'': \Theta = 68^\circ 37' S$$

$$\Theta = 69^\circ 54' S$$

$$\lambda = 133^\circ 47' E$$

$$\lambda = 130^\circ 18' E$$

Abban az esetben ha $\psi = 90^\circ 25'$ pontos értékkel akarunk számolni, a (49) transzcendens egyenletet két alakban

$$\sin \bar{\vartheta} = 3d_1 \sin (\psi + 2\bar{\vartheta})$$

$$\sin \bar{\vartheta} = 3d_1 \sin [(\pi - \psi) + 2\bar{\vartheta}]$$

megfelelő kezdő értékkel, pl $\bar{\vartheta} = 11^\circ$ -kal indulva interpolációs közelítéssel oldhatjuk meg. Így $\bar{\vartheta}_{B^*} = 10^\circ 39'$ az északi, $\bar{\vartheta}_{A^*} = 10^\circ 42'$ a déli pólustávolság.

Tehát

$$B'' \text{ koordinátái } \bar{O}\text{-ban: } \bar{\xi} = +0,982774, \bar{\eta} = 0, \bar{\zeta} = +0,184809$$

$$A'' \text{ koordinátái } \bar{O}\text{-ban: } \bar{\xi} = -0,982613, \bar{\eta} = 0, \bar{\zeta} = +0,185667.$$

Ezeket a koordinátákat (42)-vel O -ba transzformálva és földrajzi koordinátákban kifejezve

$$\begin{aligned} B'': \quad \Theta &= 81^\circ 57' N \\ &\lambda = 130^\circ 37' W \\ A'': \quad \Theta &= 69^\circ 15' S \\ &\lambda = 133^\circ 05' E \end{aligned}$$

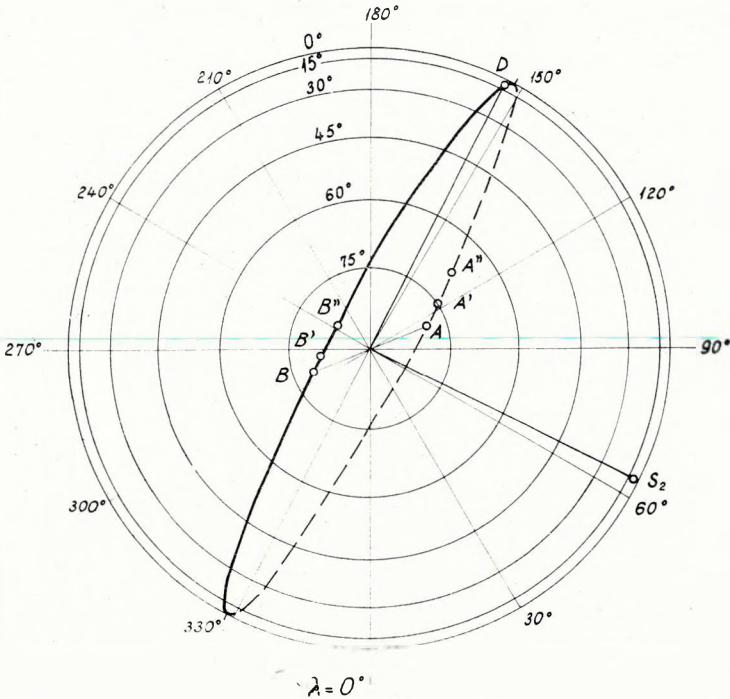
A pólusokat és dőféspontokat a mellékelt térképek egy részébe berajzoltuk. Az alkalmazott koordinátahálózat nagyfokú torzítása zavarja kölcsönös helyzetük megítélését. Ezért a 11. ábrán ortografikus azimutális projekcióban is feltüntettük őket, így a torzítás sokkal kisebb méretű.

*

Az integrandus binomiális sorba fejtésével felbontott (1) potenciálfüggvény sorának tagjai egyaránt tekinthetők nyomatókegyütthatójú polinómokkal, Legendre-gömbfüggvényekkel, multipólusokkal kifejezett részpotenciáloknak. A tagok együtthatói között a potenciálfüggvényt jellemző nyomatérendszerből eredő szükségszerű összefüggéseknek kell fennállaniuk. Ezek nélkül a sor nem lehet potenciálfüggvény sora.

Az excentrikus dipólushoz (általában a Földgömb egy bizonyos mágnesezettségéhez) tartozó $k. m.$ sor együtthatói a megkövetelt módon összefüggnek egymással, tehát a $k. m.$ sor potenciálfüggvény sor. Bármely ϑ, λ helyre kiszámított értéke (a gyakorlatban megelégszünk a sor első két tagjának összegével) egyenlő a szóban levő módon mágnesezett Földgömb potenciáljának ottani értékével. Az első két tagra szorítkozva ezt az értéket tekinthetjük anomáliamentes normálértéknek.

A $G. L.$ sor együtthatói egymástól függetlenek; a sor ugyan multipólusok sora, de ezek nem koherensek, mert dipólusaik nem azonosak, közöttük semmiféle fizikai kapcsolat nincs. Tehát a $G. L.$ sor nem potenciál függvény sor.



11. ábra. A földmágneses és az elméleti inklinációs (mágneses) pólusok, meg az excentrikus dipólus tengelyének dőféspontjai ortografikus azimutális vetületben, átlátszó földgömbön, az északi sarkról nézve.

Фиг. 11. Геомагнитные полюсы и теоретические (магнитные) полюсы наклонения, а также конечные пункты эксцентричного диполя в ортографической азимутальной проекции, смотря с северного полюса

Fig. 11. The geomagnetic and the dip-poles and the endpoints of the eccentric dipole in orthographic azimuthal-projection, on a transparent globe, seen from the geographical North pole

Valamely ϑ , λ helyre kiszámított értékének jellege a sorral megközelített észlelési adathalmaz jellegéhez igazodik; eszerint potenciálérték is lehet. Azonban első két tagjának összege ebben az esetben nem adja meg az excentrikus dipólus vagy egyéb mágnesszettség potenciálját. Mivel a legkisebb hibanégyzetösszeg elvét kényszerfeltételek nélkül alkalmazza, a megadott értékalmazt az elvnek megfelelően a legkisebb középphibával közelíti meg.

Meg kell jegyeznünk, hogy a k. m. sorral is bármely adathalmazt megközelíthetünk, mert ez a sor is konvergens gömbfüggvénysor, de a sor potenciál-függvény jellegét tekintve ilyen célra történő alkalmazása nem mondható ésszerűnek.

A k. m. sor első két tagjának összege közvetlenül, minden további számítás nélkül hiánytalanul megadja az excentrikus dipólus potenciálját. A (A_0, B_0, C_0) , (A_1, B_1, C_1) paraméterek is közvetlenül szolgáltatják a Föld mágneses középpontjának koordinátáit és a $translatio R d_1$ értékét, mert már a sor kép-

zésénél abból a fizikai szemléletből indulunk ki, hogy a koherens multipólusok folytatólagos translatioval származnak egymásból. Mivel pedig a (A_0, B_0, C_0) , (A_1, B_1, C_1) paramétereket a legkisebb hibanégyzetösszeg módszerével számítjuk ki, meghatározásukhoz és ennek folytán a mágneses középpont meghatározásához is a rendelkezésre álló észlelési adatok összességét felhasználjuk.

A G. L. sor első két tagjának összegéből, vagyis a Földdipólusból és egy nem belőle származtatott, tehát heterogén kvadrupólusból mindezeket az eredményeket hosszadalmas, külön eljárással kell kiszámítani W. Thomson vagy Ad. Schmidt szerint. A számítás kiinduló pontja mindkét esetben egy-egy önkényes matematikai művelet (transzformáció, szélső érték számítás) végrehajtása, melynek eredményét utólag értelmezzük. A meghatározás nem az adatok összességéből, hanem csak a G. L. sor első két tagjából történik és a második tag részben felhasználatlan marad (THOMSON, 1872; SCHMIDT 1934), mert a G. L. sorban a dipólus és a kvadrupólus általában nem koherensek. Csak koherens multipólusok esetén lesz az Ad. Schmidt-féle minimum zérus; ennek lehetőségét Ad. Schmidt is megemlíti, ez az eset azonban legközelebb csak körülbelül száz év múlva következik be, ha a kvadrupólust létesítő dipólus nyugati irányú vándorlásának szögsebessége állandó marad (KILCZER, 1966).

A numerikus számítás igazolta, hogy a k. m. sor közvetlenül felhasználható a földmágneses anomáliák vizsgálatára: második tagja a dipólus potenciáljának anomáliáit fokozottan kiemeli, elkülöníti. A G. L. sor erre a célra közvetlenül nem használható és második tagja a dipólusnál mutatkozó anomáliát elsimítja.

A kifogástalan elvi alapokon nyugvó k. m. sor az excentrikus dipólus minden szempontból történő vizsgálatának legtermészetesebb eszköze, mert már a sor megalkotásánál figyelembe vesszük azt a különleges feladatot, amelynek megoldására alkalmazni akarjuk.

* * *

Ezen a helyen is köszönetet mondok DR. BARTA GYÖRGY professzornak számos gondolatébresztő megjegyzéséért, HAÁZ ISTVÁN osztályvezetőnek a szakirodalomra vonatkozó tájékoztatásaiért és K. TURI EDIT tud. munkatársnak a számolásban nyújtott értékes segítségéért. Köszönöm SZ. SLINSZKI ANNA és VÖRÖS ISTVÁN kartársaknak az ábrák tetszetős elkészítését.

IRODALOM

- BARTA GY., 1957: Földmágnesség, Akadémiai Kiadó, Budapest
 BARTA GY., 1959: A Föld mágneses sarkainak és középpontjának időbeli vándorlásáról. Geof. Közl. VIII. 1–2
 BARTA GY., 1962: A földmágneses tér excentricitásának kapcsolata a Föld háromtengelyűségével. Geof. Közl. X. 1–4
 EGYED L., 1956: A Föld fizikája. Akadémiai Kiadó, Budapest
 EGYED L., 1962: A földi mágneses tér kapcsolata a Föld belső szerkezetével, Geof. Közl. X. 1–4
 JAMES, R. W., 1967: On Recurrence Relations for Multipole Coefficients. Pure and Applied Geophysics. Vol. 68. Basel and Stuttgart
 KILCZER GY., 1964: Die geometrische Struktur des erdmagnetischen Quadrupolmoment-Tensors. Gerl. Beitr. Geoph. 73.

- KILCZER GY., 1966: Die Darstellung des erdmagnetischen Hauptfeldes durch zwei Dipolfelder. Gerl. Beitr. Geoph. 75.
- KILCZER GY., 1967: Entwicklung des erdmagnetischen Potentials durch eine Multipolreihe. Gerl. Beitr. Geoph. 76.
- LUCKE, O., 1959: Analyse der Veränderungen des erdmagnetischen Hauptfeldes. Geomagnetismus und Aeronomie. III. 11. 1. Berlin
- MAC MILLAN, W. D., 1958: The Theory of the Potential. Dover Publications, New York
- MACHT, H. G., 1951: The Representation of the Main Geomagnetic Field . . . by Means of Two Eccentric Dipoles, Trans. Amer. Geophys. Union 32.
- MAUERSBERGER, P., 1959.a: Mathematische Beschreibung der Beobachtungsergebnisse, Geomagnetismus u. Aeronomie 10. 1. Berlin
- MAUERSBERGER, P., 1959. b: Die Potentialentwicklung des Hauptfeldes. Geomagnetismus u. Aeronomie III. 10. 2. Berlin
- MAXWELL, J. C., 1954: A Treatise on Electricity and Magnetism. Dover Publications, London
- PREY, A., 1922: Darstellung der Höhen- und Tiefenverhältnisse der Erde. Abhandlungen Göttin-gen
- SCHMIDT, AD., 1934: Der magnetische Mittelpunkt der Erde. Gerl. Beitr. Geophy. 41.
- STRATTON, J. A., 1941: Electromagnetic Theory. New York—London
- TÁRCZY-HORNOCH A., 1950: A kiegyenlítő számítás. II. kiadás, Sopron
- THOMSON, SIR W., 1872—1890: Reprint of Papers, London, németül: Dr. L. L. Löwy, Dr. B. Weinstein, Berlin,
- VESTINE, E. H. — LAPORTE, L. — LANGE, J. — SCOTT, W. E., 1959: Geomagnetic Field. Publ. No. 580. Carnegie Inst. of Washington 1947-ből idézet: Geomagnetismus u. Aeronomie, III. Berlin
- ZILÁHI-SEBESS, L., 1961: On the Geomagnetic Quadrupole-Field. Acta Techn. XXXVII, Budapest