I. MÜLLER

DETERMINATION OF MEAN GRAVITY VALUES FOR THE COMPUTATION OF THE ORTHOMETRIC HEIGHTS

According to the decision of the Committee of the International Geodetic and Geophysical Union occupied with the high order levellings, it is advisable to compute the orthometric height of some point A_i from the following formula:

$$H_i = \frac{C_i}{\bar{G}_i}$$

where C_i is the geopotential value of the point in question, whereas $\bar{G}_i$ is the mean gravitational acceleration between the geoid and the physical surface upon the plumb-line traversing this point.

Until the above Committee made certain rules for the determination of the value C_i, the development of the method of determining the $\bar{G}_i$ mean gravity was left to the individual member-states.

Author is discussing in connection therewith the wellknown methods for determining the mean gravity $\bar{G}_i$ necessary for the computation, i. e. the processes of Niethammer, Baeschlin, Helmert, Vignal, Ledersteger, Baranov and Ramsayer, further is he introducing the method suggested by himself. According to author

$$\bar{G}_i = \frac{1}{2}(g_i + g_i^0), \quad \text{where}$$

g_i is the value of gravity measured in the point in question,

$$g_i^0 = [\gamma_{i0} + \text{Bouguer-anomaly} - (0{,}3086 - 0{,}0418\,\sigma_i)\,u_i - 0{,}0418\,\sigma_i z_i'] \; 10^{-3} \text{ cm sec}^{-2}$$

$$(z_i' \text{ in meters, } \sigma_i \text{ gcm}^{-3})$$

where u_i is the geoid undulation

σ_i the local soil density

z_i' the rough height.

Author demonstrates the single processes even by means of numerical examples and proves with the same that the method suggested is among all methods coming closest to the orthometric heights of Niethammer considered as far the best, but not applied because of their complicated method of computation.

A kézirat 1955. november 11-én érkezett be.

KÖZEPES NEHÉZSÉG ÉRTÉKEK MEGHATÁROZÁSA AZ ORTOMÉTERES MAGASSÁGOK KISZÁMÍTÁSÁHOZ

MÜLLER IVÁN

1. Bevezetés

Valamely földi pont *magasságán* mindig egy alapul választott szintfelülettől egy bizonyos függővonalon mért távolságot értünk.

Valamely földi pont *ortométeres magasságán* annak a geoidtól, a ponton átmenő függővonalon mért távolságát értjük.

Az I. U. G. G. európai felsőrendű szintezések kiegyenlítésével foglalkozó nemzetközi Bizottságnak 1955. évi firenzei határozata alapján valamely pont ortométeres magasságát a következő képletből célszerű számítani [1]:

$$H_i = \frac{C_i}{\overline{G}_i}, \tag{1}$$

ahol C_i a szóbanforgó pontnak a Bizottság által «cote géo-potentielle»-nek nevezett «unite géo-potentielle» (u. g. p.) egységben (10 m² sec⁻²) kifejezett értéke, $\overline{G}_i$ pedig az átlagos nehézség a pont függővonalán, a geoid és a fizikai felszín között kilogalban (10 m sec⁻²). A C_i értéket *Tárczy Hornoch Antal* akadémikus javaslata alapján *geopotenciális érték*nek fogjuk nevezni.

A geopotenciális érték számítására a Bizottság a következő formulát ajánlja:

$$C_i = \sum_{k=1}^{k=i} \overline{g}_k \, \Delta z_k, \tag{2}$$

ahol Δz_k a szintezési vonal két szomszédos pontjának nyers magasságkülönbsége méterben. (Nyers magasságkülönbség alatt a két pont közötti oda-vissza szintezés számtani közepét értjük, melyet még a léckomparálási javítással látunk el.) $\overline{g}_k$ pedig a két ponton mért nehézség számtani közepe kilogalban (10 m sec⁻²). Az ily módon számított képlet a geopotenciális értéket u. g. p. egységben adja meg.

Nem kívánjuk a geopotenciális érték kiszámítását tovább részletezni, csupán annyit jegyzünk még meg, hogy valamely pont u. g. p. egységben kifejezett geopotenciális értéke számszerűleg mintegy 2%-on belül megegyezik a pont ortométeres magasságával.

Ezután rátérünk tulajdonképpeni feladatunkra, az (1) képletben a C_i érték mellett szereplő $\overline{G}_i$ közepes nehézség meghatározásának ismertetésére. Ezzel kapcsolatban előljáróban csak annyit célszerű még megjegyezni, hogy a fent említett Bizottság ennek meghatározási módját az egyes államokra bízta. Az alábbiak ismertetik az e tárgyban kialakult eddigi eljárásokat és javaslatunkat is.

2. A $\bar{G}_i$ közepes nehézség meghatározása

2.1. A $\bar{G}_i$ közepes nehézség értelmezése

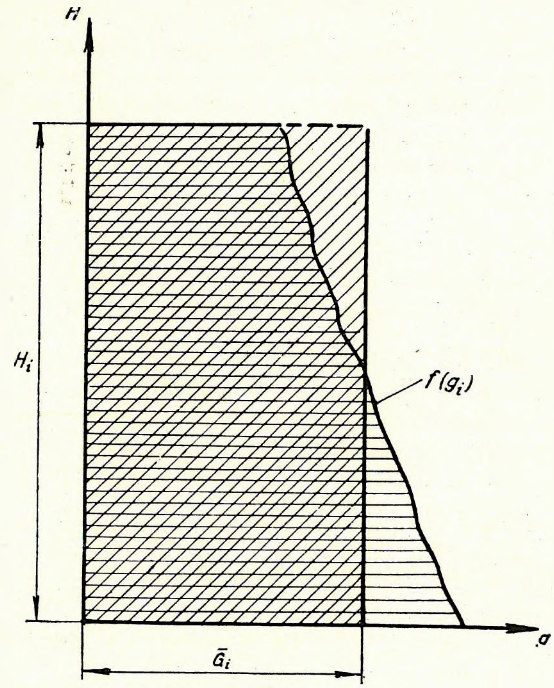
A $\bar{G}_i$ közepes nehézséget a következőképpen kívánjuk értelmezni: azt a $\bar{G}_i$ értéket tekintjük valamely A_i ponton áthaladó függővonalnak a tengerszint és a térszíni pont között levő szakasza mentén átlagos értéknek, amellyel szemben 1 gramm tömegnek a tengerszinttől az A_i pontig terjedő H_i hosszon való átviteléhez szükséges munka éppen egyenlő a függővonal mentén levő tényleges nehézséggel szemben elvégzendő munkával. Ez a munkaegyenlőség a következőképpen fejezhető ki:

$$\bar{G}_i H_i = \int_0^{H_i} f(g)_i \, \mathrm{d}H \,, \quad \text{ahonnan}$$

$$\bar{G}_i = \frac{1}{H_i} \int_0^{H_i} f(g)_i \, \mathrm{d}H \qquad (3)$$

az integrál jel alatti $f(g)_i$ szimbólum, a nehézség függővonalmenti eloszlásának törvényét fejezi ki az A_i pont alatt.

$\bar{G}_i$ értelme grafikusan szemléletessé is tehető. Rajzoljunk egy koordinátarendszert H és g tengelyekkel és ábrázoljuk ebben az $f(g)_i$ fiktív görbét (1. ábra).



1. ábra.

A görbe és a koordinátatengelyek által bezárt — vízszintes vonalkázással jelölt — terület éppen a

$$\int_0^{H_i} f(g)_i \, \mathrm{d}H$$

munkával lesz egyenlő. A $\bar{G}_i$-t úgy kell megválasztani, hogy az azt ábrázoló egyenes és a koordinátatengelyek által bezárt — ferde vonalkázással jelölt — $\bar{G}_i H_i$ munkaterület éppen egyenlő legyen az előző területtel.

Az $f(g)_i$ görbére olyan matematikai formulát, amely a tényleges eloszlást tükrözné — a bonyolult fizikai viszonyok miatt — mind ez ideig találni nem sikerült. Pontonként előállítani is csak úgy lehetne, ha a Föld mélyében méréseket tudnánk végrehajtani. Ez azonban — bár elvileg lehetséges — gyakorlatilag olyan mértékben, amennyire az szükséges, nem megoldható feladat. Ezért a $\bar{G}_i$ meghatározásánál bizonyos feltevésekre vagyunk utalva.

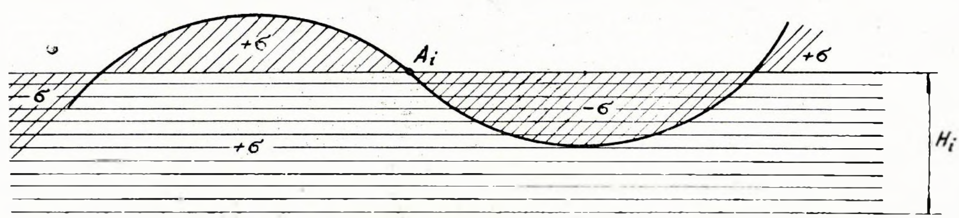
Minél jobban megközelíti a feltevés a valóságot, annál jobb eredményt kapunk az ortométeres javítás kiszámításánál.

2.2. *A $\bar{G}_i$ közepes nehézség számítására szolgáló ismert eljárások*

A. A $\bar{G}_i$ kiszámításának eddigi legpontosabb módszerét *Niethammer* dolgozta ki [2].

Niethammer abból indult ki, hogy a $\bar{G}_i$ közepes érték a függővonalszakasz közepén $\frac{H_i}{2}$ magasságban levő nehézségi erő értékkel egyenlő.

Feltételezte továbbá, hogy a tengerszint és a Föld fizikai felszíne között levő tömegek két részből állnak (2. ábra), egyrészt az A_i ponton



2. ábra.

átmenő vízszintes síknak tekinthető szintfelület és tengerszint között elhelyezkedő $+\sigma$ sűrűségű sík lemezből (vízszintes vonalkázás); másrészt pedig az ezen sík fölé emelkedő $+\sigma$ sűrűségű tömegekből és az A_i pontnál alacsonyabban fekvő $-\sigma$ sűrűségű tömeghiányokból (ferde vonalkázás).

Az A_i pontból kiindulva Niethammer első lépésként a felszíni g_i értéket megjavítja a terephatás $\Delta g_i''$ értékével, azaz a ponton átmenő sík felett levő tömegeket eltávolítja, illetőleg a hiányokat kitölti. Ezután a pontot leviszi $\frac{H_i}{2}$ mélységre a Δg_i szabad levegő redukció segítségével, majd a felette levő $\frac{H_i}{2}$ vastag sík lemez hatását veszi figyelembe a kétszeres $\Delta g_i'$ Bouguer-redukcióval. Még egy hatással számol, éspedig azzal, amelyet az előbbi $\Delta g_i''$ terephatást okozó tömegek gyakorolnak a most már $\frac{H_i}{2}$ magasságban levő pontra. Ezt a «*nehézségi erő közepes értéke topográfiai korrekciójának*» nevezi és $\Delta\bar{g}_i''$-vel jelöli. Végeredményben a keresett Niethammer-féle közepes nehézség ($\bar{G}_i^N$) a következő formulából számítható:

$$\bar{G}_i^N = g_i + \Delta g_i + 2\,\Delta g_i' + (\Delta g_i'' - \Delta\bar{g}_i'') =$$

$$= \Big[g_i + 0{,}3086\,\frac{H_i}{2} - 2\times 0{,}0418\,\sigma_i\,\frac{H_i}{2} + (\Delta g_i'' - \qquad 10^{-3}\ \mathrm{cm\,sec^{-2}}$$

$\sigma_i = 2{,}7$ g cm^{-3} értéket helyettesítve be, az ismeretlen H_i-t a z_i' nyers magassággal[1] cserélve fel, összevonás után a végleges képlet:

$$G_i^N = [g_i + 0{,}0414\, z_i' + (\Delta g_i'' - \Delta\bar{g}_i'')]\, 10^{-3}\,\text{cm sec}^{-2}\,(z_i'\text{ méterben}) \tag{4}$$

Az utolsó zárójelben levő kifejezés kiszámítására Niethammer egy 25 darabból álló nomogrammsorozatot szerkesztett, amelyekből az A_i állomást környező tereppont magassági és távolsági adatai segítségével mind a $\Delta g_i''$, mind pedig a $\Delta\bar{g}_i''$ érték megkapható.

Az eljárás — bár az ismert munkák közül a legpontosabb eredményt adja — hosszadalmas volta miatt gyakorlati alkalmazásra csak egy esetben tarthat számot, éspedig akkor, ha a felszíni g_i értékeket izogamma térképből számítjuk. Ebben az esetben ugyanis mindenképpen szükséges a $\Delta g_i''$ terephatás kiszámítása és ha ez megvan, a $\Delta\bar{g}_i''$ érték meghatározása már nem jelent nagy többletmunkát.

A legutóbbi időben *Baeschlin* az eljárást az izosztázia elve alapján kiegészítette oly módon, hogy számításában — az ábrán ábrázolt — vízszintesnek tekintett tengerszint és szóbanforgó ponton átmenő szintfelület közé zárt tömegeken kívül, a tengerszint alatt levő izosztatikus kompenzáló tömegek és az említett szintfelületek vízszintestől való eltérésének hatását is figyelembe vette. A számítás a Pratt-féle elmélet alapján történik, természetesen semmivel sem egyszerűbb formában, mint az eredeti Niethammer-féle eljárásnál [3].

B. Egy másik — időrendben korábbi — $\bar{G}_i$ meghatározását célzó eljárás *Helmert* «hegyi» redukciójához fűződik [4].

Helmert feltevései megegyeznek Niethammeréivel. A módszer lényegében abban különbözik az előzőtől, hogy Helmert a $\bar{G}_i$ kiszámításánál a $\Delta g_i''$ és $\Delta\bar{g}_i''$ terepjavításokat nem veszi figyelembe. A $\bar{G}_i$ értékét megadó *Helmert*-féle képlet a következő:

$$G_i^H = g_i\left(1 + \frac{K_i}{R} z_i'\right) 10^{-3}\ \text{cm sec}^{-2}\ (z_i'\text{ méterben}) \tag{5}$$

ahol $K_i = 1 - \dfrac{3}{2}\dfrac{\sigma_i}{\sigma_m}$;

σ_i a helyi sűrűség;

σ_m a Föld közepes sűrűsége;

R a közepes Föld-sugár.

---

[1] A nyers magasságot a következő egyenlőségből nyerhetjük:

$$z_i' = \text{a szintezés kezdőpontjának ortométeres magassága} + \sum_{k=1}^{k=i} \Delta z_k$$

Bizonyítható, hogy $\sigma_i = 2{,}7$ g cm^{-3} és $\sigma_m = 5{,}17$ g cm^{-3} esetén

$$\frac{K_i}{R} \sim \frac{0{,}0414}{g_i}.$$

Ezt az (5) képletbe helyettesítve, a következő kifejezést kapjuk:

$$\bar{G}_i^H = g_i \left(1 + \frac{0{,}0414}{g_i} z_i'\right) 10^{-3} \text{ cm sec}^{-2} \ (z_i' \text{ méterben}), \text{ kifejtve:}$$

$$\bar{G}_i^H = (g_i + 0{,}0414\, z_i')\ 10^{-3} \text{ cm sec}^{-2} \ (z_i' \text{ méterben}) \qquad (5a)$$

azaz valóban a Niethammer-féle képlethez jutottunk abban a speciális esetben, amikor $\Delta g_i'' - \Delta \bar{g}_i'' = 0$.

C. A *Vignal*-féle ortométeres magasság számításánál a $\bar{G}_i$ közepes nehézséget úgy határozzák meg, hogy az A_i pont függővonalának a tengerszinttel való döféspontjában érvényes γ_{i0} normális nehézség értékét a szabad levegő redukció segítségével felviszik $\frac{H_i}{2}$ magasságra, azaz az ismeretlen H_i értékét a z_i' nyers magassággal helyettesítve:

$$\boxed{\bar{G}_i^V = \left(\gamma_{i0} - 0{,}3086 \frac{z_i'}{2}\right) 10^{-3} \text{ cm sec}^{-2} \ (z_i' \text{ méterben})} \qquad (6)$$

Tekintettel arra, hogy az eljárás a tényleges fizikai viszonyokat nem tükrözi, valamint számítása semmivel sem egyszerűbb a Helmert-félénél, nem igen alkalmazzák [5].

D. Az ortométeres magasságok kiszámítására 1951-ben *Baranov Vladimir* is tett javaslatot. Ő a közepes $\bar{G}_i$ nehézség értékét úgy határozta meg, hogy a felszíni g_i és az A_i pont alatt a tengerszinten érvényes γ_{i0} normális nehézség értékek számtani közepét vette [6].

$$\boxed{\bar{G}_i^B = \frac{1}{2}(g_i + \gamma_{i0})} \qquad (7)$$

Ez a formula úgy is értelmezhető, hogy a $\bar{G}_i^B$ közepes nehézség nem más, mint a felszíni és a szabadlevegő redukcióval $\frac{H_i}{2}$ mélységre redukált $\left(g_i + 0{,}3086 \frac{H_i}{2}\right)$ nehézség, valamint a tengerszinti és a szabad levegő redukcióval $\frac{H_i}{2}$ magasságra redukált $\left(\gamma_{i0} - 0{,}3086 \frac{H_i}{2}\right)$ normális nehézségnek a számtani közepe. Ilyen értelmezésben:

$$\bar{G}_i^B = \frac{1}{2}\left[\left(g_i + 0{,}3086 \frac{H_i}{2}\right) + \left(\gamma_{i0} - 0{,}3086 \frac{H_i}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}(g_i + \gamma_{i0})$$

Ez az eljárás is igen kevéssé tükrözi a valóságos fizikai helyzetet. Az előző módszernél jobb eredményt ad, mivel figyelembe veszi a mért g_i nehézséget.

E. Karl Ledersteger a $\bar{G}_i$ közepes nehézséget a következő formulából számítja [7]:

$$\boxed{\bar{G}_i^L = \left(g_{m0} - 0{,}3086\,\frac{z_i'}{2}\right) 10^{-3}\ \mathrm{cm\,sec^{-2}}\ (z_i'\ \text{méterben})} \tag{8}$$

ahol

$$g_{m0} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n}(g_i + 0{,}3086\,z_i')\,10^{-3}\ \mathrm{cm\,sec^{-2}}\ (z_i'\ \text{méterben}),$$

vagyis a szabadlevegő redukcióval a tengerszintre redukált felszíni nehézség értékek számtani közepe.

A formula hasonló a (6) Vignal-féle képlethez, csak míg ott a tengerszinti nehézségként a γ_{i0} normális nehézség szerepel, addig itt a felszíni észlelt értékekből számítható g_{m0} átlagos érték.

Lederstegernek ezen eljárás bevezetésével az volt a célja, hogy az ortométeres magasságok a szintezés nyers eredményeitől alig különbözzenek.

A módszer fizikai tartalmát igen nehéz megmagyarázni. Helyes eredményt csak olyan helyen adhatna, ahol a szintezés területe alatt a tengerszinten a nehézség értéke mindenütt g_{m0} és a tenger szintje fölött levő tömegek sűrűsége zérus. Ilyen esetben ugyanis a tengerszint feletti fél magasságban a nehézség értéke valóban a (8) képlettel számítható.

F. 1953-ban *Karl Ramsayer* a $\bar{G}_i$ közepes nehézség kiszámítására három különböző új képletet vezetett be [8].

Az *első képlet* fizikai tartalma az, hogy — feltételezve, hogy a nehézség a függővonal mentén lineárisan változik — a közepes nehézséget a felszíni észlelt és a tengerszinti számított nehézségek számtani közepeként kiszámíthatjuk. A tengerszinti nehézség értékét Ramsayer úgy határozta meg, hogy a felszíni észlelt értéket a szabad levegő és a Bouguer-redukciók segítségével a tengerszintre redukálta. Ez egyúttal a számítás fizikai értelemben vett hibája is, mert ezzel az eljárással a tenger szintje fölött levő tömegek hatását a tengerszinti nehézségre figyelmen kívül hagyta, azaz úgy tekintette, mintha azt csak a geoidba zárt tömegek okoznák.

A Ramsayer-féle első képlet a következő:

$$\boxed{\bar{G}_i^{R1} = \frac{1}{2}(g_i + g_{i0})} \tag{9a}$$

ahol

$g_{i_0} = (g_i + 0{,}3086\,z_i' - 0{,}0418\,\sigma_i z_i')\,10^{-3}\,\mathrm{cm\,sec^{-2}}$ (z_i' méterben, σ_i g $\mathrm{cm^{-3}}$-ban).

A *második képlet az elsőhöz hasonlít*, de egy korrekciós tagot is tartalmaz, amelyik az előbb említett hibán igyekszik segíteni:

$$\bar{G}_i^{R2} = \frac{1}{2}(g_i + g_{i_0}) - (g_{i_0} - g_{A_0})\frac{z'_m}{z'_i} \tag{9b}$$

ahol az ismert jelölésen kívül

g_{A0} a szintezés kezdőpontjában észlelt nehézség értékének a szabad levegő és Bouguer-redukciókkal a tengerszintre redukált értéke.

z'_m a szintezés területének átlagos nyers magassága.

A *harmadik képlet* a Vignal-féle formulához hasonló, csak míg az a tengerszinti normális nehézséget a kérdéses pont függővonalának felezőpontjára a szabadlevegő redukcióval viszi fel, addig ez a Bouguer-hatást is számításba veszi.

$$\bar{G}_i^{R3} = \gamma_{i_0} - \frac{1}{2}(g_{i_0} - g_i) \tag{9c}$$

a képlet a (9a) formulánál elmondottak alapján, mivel $g_{i0} - g_i = (0{,}3086\ z'_i - 0{,}0418\ \sigma_i z'_i)\ 10^{-3}\,\text{cm sec}^{-2}$, a következő alakba is írható:

$$\bar{G}_i^{R3} = \left(\gamma_{i_0} - 0{,}3086\frac{z'_i}{2} + 0{,}0418\ \sigma_i\frac{z'_i}{2}\right)10^{-3}\,\text{cm sec}^{-2}$$

(z'_i méterben, σ_i g cm^{-3}-ban)

Ez az eljárás is — mind a tengerszinti nehézségnek a normális nehézséggel való helyettesítése miatt, mind pedig a tengerszint feletti félmagasságra való redukciónál alkalmazott logikátlan eljárás miatt (csak a félmagasság alatt levő tömegek hatásával számol) — a valóságtól igen elütő eredményt ad.

A módszer kidolgozásánál — Lederstegerhez hasonlóan — Ramsayert is az a cél vezette, hogy a nyers szintezési eredményeknek és az ortométeres magasságoknak a különbségeit a minimumra csökkentse. Ebből a szempontból (9b) képletét tartja a legjobbnak.

2.3. A $\bar{G}_i$ közepes nehézség számítására javasolt eljárás

A $\bar{G}_i$ közepes nehézség meghatározásával kapcsolatban 3 feltevést teszünk:

1. A nehézség a Föld kérgének vizsgálatunkban szereplő szakaszán a mélységgel lineárisan változik. Ezen feltevésünk reálisnak mondható. Bányaaknák, vagy fúrólyukakban végzett nehézségmérések ezt kellőleg alátámasztják. Facsinay László és Haázné Rózsás Hajnal végeztek újabban — kőzetsűrűség meghatározás céljából — egy Pécs környéki bánya

aknájában a felszíntől számított 325 m mélységig ilyen méréseket és azt találták, hogy a nehézség csaknem teljesen lineárisan változik. Az arányossági tényezőre vonatkozólag nem teszünk feltevést [9].

2. A nehézséget a tengerszinten — a Bouguer-féle anomáliák segítségével — elméleti úton meg lehet határozni.

3. Feltételezzük, hogy a szintezés területén a geoid undulációk és a talajsűrűségek állandók, éspedig a helyi közepes geoid undulációval, illetve talajsűrűséggel egyenlők.

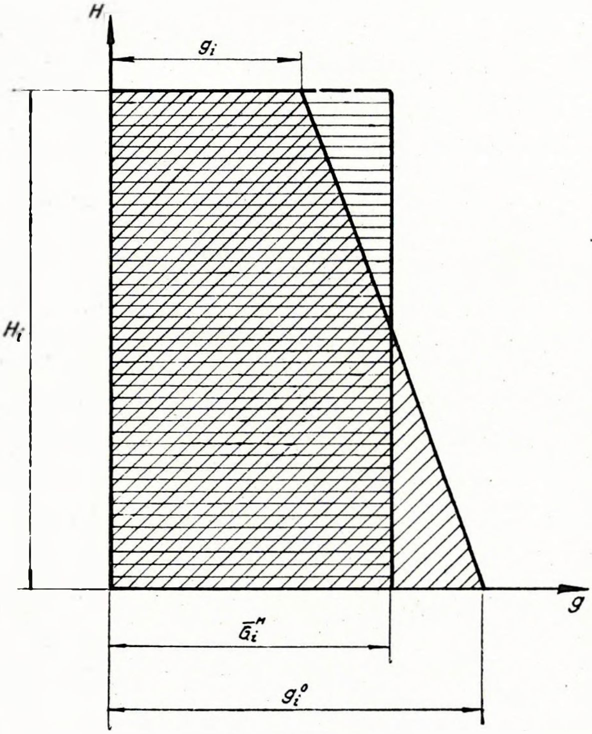
A nehézség eloszlásáról feltételeztük, hogy az a felszíni észlelt g_i értékből kiindulva a mélységgel lineárisan nő, egészen a tengerszinti g_i^0 értékig (3. ábra).

A $\bar{G}_i^M$ közepes értéket úgy kell megválasztani, hogy a 3. ábra $\frac{1}{2}(g_i+g_i^0)\,H_i$ — ferde vonalkázással jelölt — munkaterülete egyenlő legyen a $\bar{G}_i^M H_i$ — vízszintes vonalkázással jelölt — munkaterülettel.

Ezek szerint:

$$\bar{G}_i^M H_i = \frac{g_i+g_i^0}{2} H_i, \text{ ahonnan}$$

$$\boxed{\bar{G}_i^M = \frac{1}{2}(g_i+g_i^0)} \qquad (10)$$



3. ábra.

ahol a g_i a nehézség észlelt értéke a H_i magasságú A_i pontban.

g_i^0 a nehézség számított értéke az A_i pont függővonalán, a tengerszint magasságában (a geoidon).

Vizsgáljuk meg azt a kérdést, *hogyan lehet kiszámítani a g_i^0 értékét?*

Tételezzük fel, hogy az A_i pont függővonalának a földi ellipszoiddal való metszéspontjában a nehézség értéke g_i^e.

Tételezzük fel továbbá, hogy ez a g_i^e érték két komponensből tevődik össze: $g_i^{e_1}$ komponensből, amelyik a földi ellipszoidba zárt tömegek hatásából származik és a $-g_i^{e_2}$ komponensből, amelyik a földi ellipszoidon kívüli tömegek hatásából keletkezik.

Ezek szerint

$$g_i^e = g_i^{e_1} - g_i^{e_2}$$

Ha most ezt a földi ellipszoidon levő nehézségi erő értéket az A_i pont függővonala mentén felvisszük a geoid felületére, tehát a tengerszintre, akkor eredményül éppen a keresett g_i^0 értékét kapjuk. Ez a tengerszintre való redukálás — közelítőleg — mint ismeretes, a free-air redukció és a geoid és ellipszoid felületek közé zárt u_i vastagságú tömegek hatását kifejező kétszeres Bouguer-redukció segítségével történhet, tehát

$$g_i^0 = (g_i^e - 0{,}3086\, u_i + 2\times 0{,}0418\, \sigma_i u_i)\ 10^{-3}\ \text{cm sec}^{-2} \tag{11}$$

(u_i méterben, σ_i g cm^{-3}-ban),

ahol az ismert jelöléseken kívül u_i a geoid unduláció az A_i pontban. A (11) képletbe helyettesítsük g_i^e fenti kifejezését:

$$g_i^0 = (g_i^{e_1} - g_i^{e_2} - 0{,}3086\, u_i + 2\times 0{,}0418\, \sigma_i u_i)\ 10^{-3}\,\text{cm sec}^{-2} \tag{11a}$$

(u_i méterben, σ_i g cm^{-3}-ban)

Az ellipszoid feletti $(H_i + u_i)$ magasságú tömegek hatását kifejező $g_i^{e_2}$ nehézségi erőről feltételezzük, hogy az a Bouguer-hatással kifejezhető, azaz

$$g_i^{e_2} = 0{,}0418\, \sigma_i\, (H_i + u_i)\ 10^{-3}\,\text{cm sec}^{-2}$$

(H_i és u_i méterben, σ_i g cm^{-3}-ban)

és ezzel

$$\begin{aligned} g_i^0 &= g_i^{e_1} - 0{,}0418\, \sigma_i\, (H_i + u_i) - 0{,}3086\, u_i + 2\times 0{,}0418\, \sigma_i u_i = \\ &= g_i^{e_1} - 0{,}0418\, \sigma_i H_i - 0{,}3086\, u_i + 0{,}0418\, \sigma_i u_i = \\ &= [g_i^{e_1} - (0{,}3086 - 0{,}0418\, \sigma_i)\, u_i - 0{,}0418\, \sigma_i H_i]\ 10^{-3}\ \text{cm sec}^{-2} \end{aligned} \tag{11b}$$

(H_i és u_i méterben, σ_i g cm^{-3}-ban)

A képlet jobboldalának — a szintezés (a poligon) egész területére nézve harmadik feltételünk szerint — állandónak tekinthető második tagja és a harmadik tag egyszerűen számítható.

A földi ellipszoid belsejébe zárt tömegek hatását kifejező legvalószínűbb $g_i^{e_1}$ értéket úgy számíthatjuk ki, hogy a nehézségi erő Cassinis-féle:

$$\gamma_{i_0} = 978{,}049\,(1 + 0{,}0052884 \sin^2 \varphi_i - 0{,}0000059 \sin^2 2\,\varphi_i)$$

normális értékét megjavítjuk a nehézségi zavar értékével, mégpedig — mivel csak a földi ellipszoid belsejébe zárt tömegek hatásáról van szó — a Bouguer-anomáliával.[1]

Ilyen módon:

$$g_i^{e_1} = \gamma_{i_0} + \text{Bouguer-anomália}$$

[1] Bouguer anomália alatt a térszíni, a szabad levegő és a Bouguer-hatással megjavított mért nehézség és a normális nehézség különbségét értjük.

Ezt az értéket a (11b) képletbe és az ismeretlen H_i ortométeres magasságot a z_i' nyers magassággal helyettesítve:

$$g_i^0 = [\gamma_{i_0} + \text{Bouguer anomália} - (0{,}3086 - 0{,}0418\,\sigma_i)\,u_i - $$
$$- 0{,}0418\,\sigma_i z_i'] \; 10^{-3} \text{ cm sec}^{-2} \qquad (12)$$

(z_i' és u_i méterben, σ_i g cm^{-3}-ben)

Ha pl. *Svájc területére* kívánjuk kiszámítani az ott érvényes képletet, akkor a (12) formulába $u_i = 40$ m és $\sigma_i = 2{,}7$ g cm^{-3} értéket helyettesítünk:

$$g_i^0 = (\gamma_{i_0} + \text{Bouguer-anomália} - 0{,}11286\,z_i' - 8) \; 10^{-3} \text{ cm sec}^{-2} \qquad (13)$$

Magyarországon például az Alföld területére $u_i = 30$ m és $\sigma_i = 1{,}9$ g cm^{-3} értékkel számolva a következő formulát kapjuk:

$$g_i^0 = (\gamma_{i_0} + \text{Bouguer-anomália} - 0{,}07942\,z_i' - 7) \; 10^{-3} \text{ cm sec}^{-2} \qquad (13a)$$

Természetesen a képletek annál jobb eredményt adnak, minél jobban megközelítik a számításba vett u_i és σ_i értékek a tényleges helyi értékeket. Célszerű minden poligonra a képlet állandóit külön meghatározni.

A fenti képletekbe helyettesítendő nehézségi zavarok értékeinél ügyelni kell arra, hogy azok a Cassinis-féle formula segítségével számítottak legyenek.

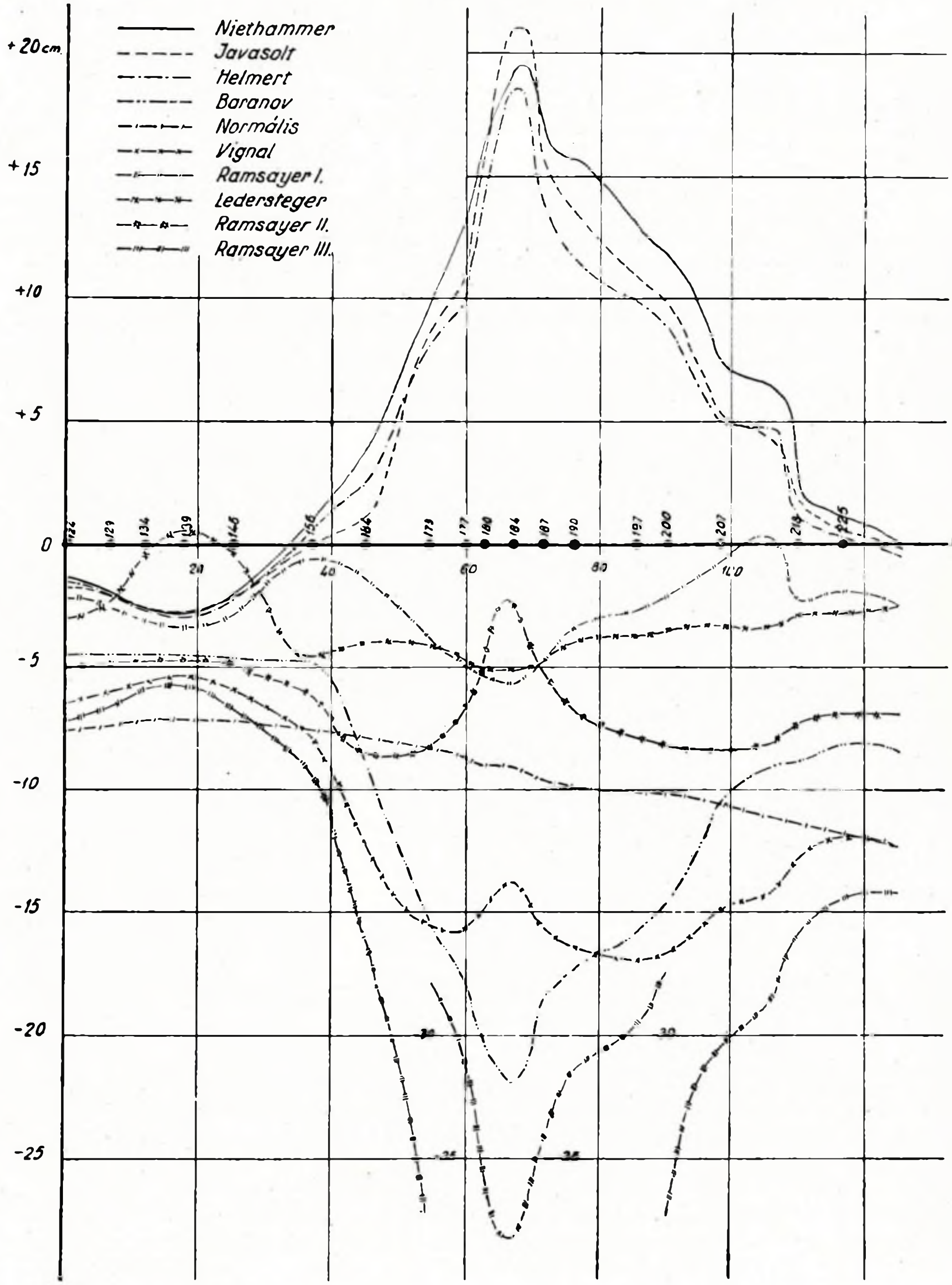
A geoid undulációk a Tanni-féle geoid-képből vehetők ki legmegbízhatóbban. A σ_i sűrűségeket geológiai térképek alapján célszerű meghatározni.

2.4. A $\bar{G}_i$ közepes nehézségek összehasonlítása

Az előzőekben ismertetett eljárásokat összehasonlítva megállapíthatjuk a következőket:

Az első két eljárás a felszíni észlelt értékekből számítja a $\bar{G}_i$ közepes nehézségeket. A *Niethammer-féle* eljárás a $\Delta g_i''$ és $\Delta \bar{g}_i''$ terepjavítások kiszámításának körülményessége miatt nem ajánlható, kivéve ha a felszíni nehézség értékeket izogamma térképből vesszük ki. Ekkor ugyanis — mint már említettük — a $\Delta g_i''$ terephatást mindenképpen ki kell számítani. Ha pedig ez megvan, akkor a $\Delta \bar{g}_i''$ érték meghatározása már nem jelent olyan nagy többletmunkát. Egyébként legjobb eredményt ez a módszer ad. — A *Helmert-módszer* a számítások egyszerűségével, valamint kielégítő pontosságával tűnik ki. Hátránya, hogy az (5a) képletben szereplő 0,0414 szorzó nem megbízható, mert kiszámításánál [l. (4) képlet] a free-air és a Bouguer-redukciók bizonytalan állandói szerepeltek.

A *Vignal-féle* $\bar{G}_i$ értéket éppen olyan egyszerűen lehet számítani, mint a Helmert-félét, azonban két hiányossága van; először az, hogy nem az észlelt felületi, hanem a tengerszinti normális nehézségi erő értékekből van számítva — másodszor az, hogy a Niethammer-féle értékektől való eltérések nagyok. Ugyanez vonatkozik nagyjából a *Baranov*-féle közepes nehézségre is.


Niethammer
Javasolt
Helmert
Baranov
Normális
Vignal
Ramsayer I.
Ledersteger
Ramsayer II.
Ramsayer III.
+20cm.
+15
+10
+5
0
-5
-10
-15
-20
-25
20
40
60
80
100

4. ábra.

A *Ledersteger* és a *Ramsayer I. és II.* típusú módszerek — szerintünk indokolatlan — célja az, hogy az ortométeres javítások számértékét még a fizikai viszonyokhoz való hűség árán is — a minimumra csökkentsék le azért, hogy a szintezéssel közvetlenül kapható nyers magasságok kevéssel különbözzenek az ortométeres magasságoktól.

A felhasznált képletek szerkezetéből világosan kitűnik, hogy mind a Ledersteger-féle, mind pedig a *Ramsayer III.* típusú értékek a valóságos fizikai viszonyokat rosszul tükrözik. Utóbbiak különböznek egyébként — az összes módszerek közül — a legnagyobb mértékben a Niethammer-féle értékektől.

A *javasolt eljárás* a számítás egyszerűségével, a tényleges fizikai adatokhoz való hűségével és a Niethammer-féle közepes nehézségekhez való jó közelítésével tűnik ki.

3. Számpélda

Számpéldánkat a svájci elsőrendű szintezési hálózat XVII. sz. poligonjának Biasca—Reichenau szakaszán mutatjuk be.

A poligon felhasznált pontjainak adatait a [2] sz. műből vettük át. Az adatokat a II. táblázat tartalmazza.

A különböző számítási eljárásokkal kapott ortométeres magasságokat az I. táblázatban állítottuk össze. A számításnál az 1. sz. (Reichenau) pont Niethammer-féle ortométeres magasságát $H_1^N = 600{,}0000$ m-nek vettük fel. A 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 és 18 oszlopokban az eddig legjobbnak tartott Niethammer-féle magasságoktól való eltéréseket tüntettük fel.

A 4. ábra az egyes módszerekkel kiszámított azon értékeket tünteti fel, amelyeket a z_i' nyers magasságokhoz hozzá kell adni, hogy az ortométeres magasságokat kapjuk.[1] Az egyes módszerek közötti nagy különbségek világosan láthatók.

A III. táblázatban az összehasonlíthatóság kedvéért feltüntettük azokat az értékeket, amelyek elsősorban jellemzők az egyes módszereknek a Niethammer-féle eljáráshoz viszonyított megbízhatóságára. Így a 2. oszlopban a $\bar{G}_i$ közepes nehézségeknek a Niethammer-féle $\bar{G}_i$-hez viszonyított átlagos eltéréseit tüntettük fel. A 3. oszlopban a magasságok maximális eltérései, míg a 4. oszlopban ezek átlagos eltérései szerepelnek, mindkettő a Niethammer-féle magassághoz viszonyítva.

Természetesen más poligonon számolva az eredmények másképpen is alakulhatnak.

*

Köszönetemet fejezem ki Rédey István egyetemi tanár, a műszaki tudományok doktorának, Májay Péter és Oszlaczky Szilárd, a műszaki tudományok kandidátusainak értékes tanácsaikért, amelyekkel elősegítették e dolgozat megjelenését.

[1] Jelen számpéldában a z_i' érték az I. táblázatban szereplő z_i értékből a következő módon számítható:

$$z_i' = H_A + z_i = H_1^N + z_i = 600{,}0000 + z_i.$$

Az ortométeres

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Szám	Niethammer	Helmert		Vignal		Baranov		Ledersteger	
	féle ortométeres								
	m	m	cm	m	cm	m	cm	m	cm
124	301,6866	301,6841	+ 0,25	301,6355	+ 5,11	301,6545	+ 3,2	301,6487	+ 3,79
129	277,3814	277,3789	+ 0,15	277,3398	+ 4,16	277,3551	+ 2,63	277,3506	+ 3,08
134	252,3743	252,3728	+ 0,15	252,3434	+ 3,09	252,3545	+ 1,98	252,3522	+ 2,21
139	246,8705	246,8693	+ 0,12	246,8448	+ 2,57	246,8536	+ 1,69	246,8523	+ 1,82
146	301,2786	301,2756	+ 0,30	301,2399	+ 3,87	301,2525	+ 2,61	301,2497	+ 2,89
156	448,5125	448,5057	+ 0,68	448,5057	+ 9,09	448,4516	+ 6,09	448,4388	+ 7,37
164	784,3399	784,3223	+ 1,76	784,1775	+16,24	784,2143	+12,56	784,2143	+12,56
173	1433,5053	1433,4819	+ 2,34	1433,2436	+26,17	1433,2476	+25,77	1433,3167	+18,86
177	1603,8361	1603,7985	+ 3,76	1603,5417	+29,44	1603,5221	+31,40	1603,6268	+ 20,93
180	1848,7669	1848,7443	+ 2,26	1848,4501	+31,68	1848,4011	+36,58	1848,5500	+21,69
184	2059,8955	2059,8850	+ 1,05	2059,5614	+33,41	2059,4795	+41,60	2059,6770	+21,85
187	1805,9623	1805,9365	+ 2,58	1805,6418	+32,05	1805,6123	+35,00	1805,7468	+21,55
190	1617,6562	1617,6150	+ 4,12	1617,3345	+32,17	1617,3246	+33,16	1617,4302	+22,60
197	1456,7281	1456,6939	+ 3,42	1456,4309	+29,72	1456,4398	+28,83	1456,5201	+20,80
200	1358,2172	1358,1853	+ 3,19	1357,9318	+28,54	1358,9526	+26,46	1358,0163	+20,09
207	986,1714	986,1473	+ 2,41	985,9501	+22,13	986,9934	+17,80	986,0145	+15,69
214	867,7636	867,7466	+ 1,70	867,5552	+20,84	867,6071	+15,65	867,6168	+14,68
218	719,0167	719,0080	+ 0,87	718,8709	+14,58	719,9097	+10,70	719,9244	+ 9,23
225	628,4113	628,4017	+ 0,96	628,2783	+13,30	628,3170	+ 9,43	628,3279	+ 8,34
1	600,0000	599,9933	+ 0,67	599,8770	+12,30	599,9143	+ 8,57	599,9290	+ 7,10

III. táblázat

Az ortométeres magasságok összehasonlítása

1.	2.	3.	4.
Név	$\overline{G_i}$ közepes nehézségek átlagos eltérése a Niethammer-féle $\overline{G_i^N}$-ből	Az ortométeres magasságok	
		maximális	*átlagos*
		eltérései a Niethammer-féle ortométeres magasságoktól	
	10^{-3} cm sec^{-2}	cm	cm
1. Helmert	+ 14,8	+ 3,76	+ 1,63
2. Vignal	+175,4	+33,41	+18,52
3. Baranov	+152,2	+41,60	+17,58
4. Ledersteger	+120,4	+22,60	+12,85
5. Ramsayer I.	+ 68,7	+25,47	+ 9,22
6. Ramsayer II.	+ 65,6	+24,80	+ 9,66
7. Ramsayer III.	+235,5	+57,98	+26,13
8. Új rendszerű	+ 13,4	+ 2,78	+ 1,22

I. táblázat

magasságok

11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.
Ramsayer I.		Ramsayer II.		Ramsayer III.		Új rendszerű	
magasság							
m	cm	m	cm	m	cm	m	cm
301,6789	+ 0,77	301,6700	+ 1,66	301,6299	+ 5,67	301,6810	+0,56
277,3747	+ 0,67	277,3777	+ 0,37	277,3353	+ 4,61	277,3774	+0,40
252,3692	+ 0,51	252,3957	+ 2,14	252,3414	+ 3,29	252,3733	+0,10
246,8657	+ 0,48	246,9054	+ 3,49	246,8413	+ 2,92	246,8705	+0,00
301,2703	+ 0,83	301,2937	+ 1,51	301,2347	+ 4,39	301,2752	+0,34
448,4942	+ 1,83	448,4535	+ 5,90	448,4091	+10,34	448,4960	+1,65
784,2863	+ 5,36	784,2575	+ 8,24	784,1423	+19,76	784,3127	+2,72
1433,3635	+14,18	1433,3577	+14,76	1433,1252	+38,01	1433,4848	+2,05
1603,6497	+18,64	1603.6513	+18,48	1603,3945	+44.16	1603,8083	+2.78
1848,5643	+22,06	1848.5501	+21,68	1848,2541	+51,28	1848,7575	+0,94
2059,6413	+25,42	2059,6475	+24,80	2059,3157	+57,98	2059,9092	+1,37
1805,7505	+21,18	1805,7523	+21,00	1805,4521	+51,02	1805,9530	+0,93
1617,4649	+19,13	1617,4583	+19,79	1617,1828	+47,34	1617,6298	+2,64
1456,5721	+15,60	1456,5617	+16,64	1456,3077	+42,04	1456,7058	+2,23
1358,0778	+13,94	1358,0634	+15,38	1357,8252	+39,20	1358,1949	+2,23
986,0920	+ 7,94	986,0658	+10,56	985,8938	+27,76	986,1492	+2,22
867,7019	+ 6,17	867,6644	+ 9,92	867,5115	+25,21	867,7403	+2,33
719,9778	+ 3,89	719,9706	+ 4,61	719,8408	+17,59	719,0138	+0,29
628,3793	+ 3,20	628,3703	+ 4,10	628.2543	+15,70	628,4035	+0,78
599,9725	+ 2,75	599,9725	+ 2,75	599,8556	+14,44	599,9963	+0,37

IRODALOM

[1]. M. KNEISSL: Die Bildung eines einheitlichen europäischen Nivellementsnetzes. IV. Kapitel: Die Florenzer Beschlüsse (1955.) der Int. Kom. f. die Ausgleichung der europäischen Nivellementsnetze. Zeitschr. f. Verm. 1955. Heft 9.

[2]. T. NIETHAMMER: Nivellement und Schwere als Mittel zur Berechnung wahrer Meereshöhen. Veröff. d. Schweizer Geod. Kommission. Basel. 1932.

[3]. C. F. BAESCHLIN: Ergänzung zur Berechnung der Mittleren Schwere, in einer Lotlinie nach Th. Niethammer, unter Berücksichtigung der Isostasie. Bayerische Akademie der Wissenschaften, math.-naturw. Klasse, Sitzungsberichte. 1955. Sonderdruck 6. München. 1955.

[4]. F. R. HELMERT: Die Schwerkraft im Hochgebirge, insbesondere in den Tyroleralpen in geodätischer und geologischer Beziehung. Preuss. Geod. Institut. Berlin. 1890.

[5]. J. VIGNAL: Nivellement et Gravité. Association Int. de Geodesie. Paris. 1952.

[6]. K. LEDERSTEGER: Die einheitliche Begründung der metrischen Höhendefinitionen. Bull. Geod. N° 32. Paris. 1954.

[7]. K. LEDERSTEGER: Die Minimalsysteme der orthometrischen Reduktion. 2. Bericht, vorgelegt der stud. Kommission «Nivellement und Schwere» der I. U. G. G. 1953.

[8]. K. RAMSAYER: Die Schwerereduktion von Nivellements. Veröff. der D. G. K. Reihe A. Nr. 6. 1953.

[9]. FACSINAY LÁSZLÓ és HAÁZNÉ RÓZSÁS HAJNAL: Kőzetsűrűségmeghatározás graviméter mérések alapján. Geof. Közl. II. kötet 4. sz. Budapest, 1953.

II. táblázat

A svájci XVII. sz. felsőrendű szintezési poligon felhasznált pontjainak adatai:

1	2	3	4	5
Szám	Név	φ	z_i	g_i
			m	cm sec^{-2}
124	Biasca	46° 21,60'	— 298,3000	980,535
129	Osogna	46° 18,74'	— 322,6000	980,554
134	Claro	46° 15,85'	— 347,6000	980,580
139	Moesabrücke	46° 13,22'	— 353,1000	.980,594
146	Roveredo	46° 14,41'	— 298,7000	980,567
156	Cabbiolo	46° 19,78'	— 151,5000	980,475
164	Mesocco	46° 23,60'	+ 184,3000	980,421
173	Mte. Viganaia	46° 26,21'	+ 833,4000	980,316
177	S. Bernardino	46° 27,76'	+1003,7000	980,291
180		46° 28,76'	+1248,6000	980,245
184	Berghaus	46° 29,78'	+1459,7000	980,207
187		46° 31,18'	+1205,8000	980,252
190	Hinterrhein	46° 31,87'	+1017,5000	980,280
197	Splügen	46° 33,21'	+ 856,6000	980,307
200	Geissrücken	46° 34,12'	+ 758,1000	980,321
207	Andeer	46° 36,02'	+ 386 1000	980,384
214	Via mala	46° 39,72'	+ 276,7000	980'394
218	Thusis	46° 41,86'	+ 119,0000	980,454
225	Realta	46° 45,37'	+ 28,4000	980,471
1	Reichenau	46° 49,52'	0	980,486