Magyar Állami Eötvös Loránd Geofizikai Intézet
GEOFIZIKAI KÖZLEMÉNYEK
II. kötet, 7. szám

И. Б. ХААЗ:

СВЯЗЬ МЕЖДУ ПОТЕНЦИАЛОМ ТЯГОТЕНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПРИЗМЫ И ПРОИЗВОДНЫМИ ЭТОГО ПОТЕНЦИАЛА

Автор на основе теоремы Эйлера, относящейся к однородным функциям, указывает на то, что потенциал тяготения прямоугольной призмы и первые, а также вторые производные этого потенциала находятся в простой связи. Этим же способом, применяемым для третьих производных, получается, что третьие производные не являются независимыми друг от друга.

I. B. HAÁZ:

RELATIONS BETWEEN THE POTENTIAL OF THE ATTRACTION OF THE MASS CONTAINED IN A FINITE RECTANGULAR PRISM AND ITS FIRST AND SECOND DERIVATIVES

The second derivatives of the potential of the attraction of the mass contained in a finite rectangular prism may be expressed by sufficiently simple formulae, already known long ago. Also formulae for the first derivatives are published, but they are more complicated and contain hyperbolic functions too. As for the potential itself, the author does not know any publication upon such a formula.

Starting from the Euler's theoreme of the homogeneous functions, the author proves, that the first derivatives of the potential and the potential itself may be easily computed from the second derivatives, without integrating them. Applying the followed method to the third derivatives, it follows equations, different from the derived LAPLACE equations, expressing the dependence of one of the third derivatives on two others.

The explained results may be extended upon the case of the finite inclined prism and that of infinite prisms too.

KAPCSOLAT A DERÉKSZÖGŰ HASÁB TÖMEGVONZÁSÁNAK POTENCIÁLJA ÉS E POTENCIÁL DERIVÁLTJAI KÖZÖTT

DR. HAÁZ ISTVÁN BÉLA

Ismeretes, hogy ha a V térrész ξ, η, ζ pontjának távolságát a V térrészen kívül levő x, y, z ponttól r-rel jelöljük:

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2},$$

akkor a V térrészben levő σ sűrűségű homogén test tömegvonzásának potenciálja az x, y, z helyen:

$$U = f\sigma \iiint\limits_{(V)} \frac{1}{r}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

A tömegvonzás potenciálja itt az x, y, z változóknak azt a függvényét jelenti, amelynek e változók szerint képezett *első deriváltjai* rendre megegyeznek a tömegvonzás intenzitásának, vagyis a gyorsulásnak az x, y, z irányú összetevőivel. (Más elnevezés szerint ezt a függvényt erőfüggvénynek nevezik és a — U függvényt nevezik potenciálnak.) A deriváltakat indexszel jelölve:

$$U_x = f\sigma \iiint\limits_{(V)} \left(\frac{1}{r}\right)_x d\xi\, d\eta\, d\zeta;$$

$$U_y = f\sigma \iiint\limits_{(V)} \left(\frac{1}{r}\right)_y d\xi\, d\eta\, d\zeta;$$

$$U_z = f\sigma \iiint\limits_{(V)} \left(\frac{1}{r}\right)_z d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Az intenzitás térbeli változására az intenzitásösszetevők deriváltjai, tehát *a potenciál második deriváltjai* jellemzők:

$$U_{xy} = f\sigma \iiint\limits_{(V)} \left(\frac{1}{r}\right)_{xy} d\xi\, d\eta\, d\zeta;$$

$$U_{xz} = f\sigma \iiint\limits_{(V)} \left(\frac{1}{r}\right)_{xz} d\xi\, d\eta\, d\zeta;$$

$$U_{yz} = f\sigma \iiint\limits_{(V)} \left(\frac{1}{r}\right)_{yz} d\xi\, d\eta\, d\zeta;$$

$$U_{xx} = f\sigma \iiint\limits_{(V)} \left(\frac{1}{r}\right)_{xx} d\xi\, d\eta\, d\zeta;$$

$$U_{yy} = f\sigma \iiint\limits_{(V)} \left(\frac{1}{r}\right)_{yy} d\xi\, d\eta\, d\zeta;$$

$$U_{zz} = f\sigma \iiint\limits_{(V)} \left(\frac{1}{r}\right)_{zz} d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Az $f\sigma$ tényező elkerülésére a továbbiakban a $\sigma = 1 : f$ sűrűségű homogén test tömegvonzásával foglalkozunk és ennek potenciálját U helyett u-val jelöljük:

$$u = \iiint\limits_{(V)} \frac{1}{r}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Nyilván U és deriváltjai u-nak, illetve deriváltjainak $f\sigma$-szorosai.

További egyszerűsítésül helyezzük a kezdőpontot az x, y, z pontba és jelöljük a ξ, η, ζ pont koordinátáit erre a kezdőpontra vonatkozóan a, b, c-vel:

$$\xi - x = a;$$
$$\eta - y = b;$$
$$\zeta - z = c.$$

Ezzel a jelöléssel r így alakul:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Nyilvánvaló, hogy az x, y, z szerint képezett első deriváltak rendre az a, b, c szerint képezett első deriváltak —1-szeresével, az x, y, z szerint képezett második deriváltak a megfelelő a, b, c szerint képezett második deriváltakkal, a ξ, η, ζ szerint képezett háromszoros integrál pedig az a, b, c szerint képezett háromszoros integrállal egyenlő. Tehát:

$$u = \iiint\limits_{(V)} \frac{1}{r}\, da\, db\, dc;$$

$$u_x = -\iiint\limits_{(V)} \left(\frac{1}{r}\right)_a da\, db\, dc;$$

$$u_y = -\iiint\limits_{(V)} \left(\frac{1}{r}\right)_b da\, db\, dc;$$

$$u_z = -\iiint\limits_{(V)} \left(\frac{1}{r}\right)_c da\, db\, dc;$$

$$u_{xy} = \iiint\limits_{(V)} \left(\frac{1}{r}\right)_{ab} da\, db\, dc;$$

$$u_{xz} = \iiint\limits_{(V)} \left(\frac{1}{r}\right)_{ae} da\, db\, dc;$$

$$u_{yz} = \iiint\limits_{(V)} \left(\frac{1}{r}\right)_{bc} da\, db\, dc;$$

$$u_{xx} = \iiint\limits_{(V)} \left(\frac{1}{r}\right)_{aa} da\, db\, dc;$$

$$u_{yy} = \iiint\limits_{(V)} \left(\frac{1}{r}\right)_{bb} da\, db\, dc;$$

$$u_{zz} = \iiint\limits_{(V)} \left(\frac{1}{r}\right)_{cc} da\, db\, dc.$$

Ezeknek az integráloknak a meghatározása akkor a legegyszerűbb, ha a V térrész határfelületei a koordináta-síkokkal párhuzamos síkok, tehát, ha az integráció tartománya *a tengelyekkel párhuzamos élű derékszögű hasáb* (derékszögű parallelepipedon). Ebben az esetben az egyes változók szerint végrehajtott integrálások határai egymástól függetlenek, továbbá akkor itt is van értelme a határozatlan integrál vagy *primitív függvény* fogalmának és a határozott integrál ennek a primitív függvénynek az integráció határain vett helyettesítési értékeiből határozható meg.

Primitív függvénynek most azt a függvényt nevezzük, amelynek az integrálás a, b, c változói szerint képezett harmadik deriváltja az integrálandó függvénnyel egyenlő. A $F(a, b, c)$ függvény a $f(a, b, c)$ függvény primitív függvénye, ha

$$F_{abc} = \frac{\partial^3 F(a, b, c)}{\partial a\, \partial b\, \partial c} = f(a, b, c).$$

Ebből az F függvényből az f függvény háromszoros integrálja az a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 határok meghatározta derékszögű hasábra vonatkozóan a következőképpen adódik:[1]

$$\int_{a_1}^{a_2}\int_{b_1}^{b_2}\int_{c_1}^{c_2} f(a, b, c)\, da\, db\, dc = [F(a, b, c)]_{a_1\, b_1\, c_1}^{a_2\, b_2\, c_2} =$$

$$= F(a_2, b_2, c_2) + F(a_2, b_1, c_1) + F(a_1, b_2, c_1) + F(a_1, b_1, c_2) -$$
$$- F(a_1, b_1, c_1) - F(a_1, b_2, c_2) - F(a_2, b_1, c_2) - F(a_2, b_2, c_1).$$

Rövidebb jelöléssel:

$$[F]_{111}^{222} = F_{222} + F_{211} + F_{121} + F_{112} - F_{111} - F_{122} - F_{212} - F_{221}.$$

Itt az 1, 2, 3 számok, mint indexek az ugyanolyan indexű a, b, c határok behelyettesítését jelentik.

Ezek szerint a koordinátatengelyekkel párhuzamos élű derékszögű hasábban foglalt $1 : f$ sűrűségű homogén test tömegvonzása potenciáljának és e potenciál deriváltjainak meghatározására elegendő $1 : r$-nek és deriváltjainak primitív függvényét meghatározni.

Jelöljük $1 : r$ primitív függvényét φ-vel, azaz legyen

$$\varphi_{abc} = \frac{1}{r}.$$

Nyilvánvaló, hogy $1 : r$ deriváltjainak primitív függvényei $1 : r$ primitív függvényének megfelelő deriváltjaival, a φ_x, φ_y, φ_z; φ_{xy}, φ_{xz}, φ_{yz}; φ_{xx}, φ_{yy}, φ_{zz} függvényekkel egyenlők. Ezek szerint a deriváltak primitív függvényeinek meghatározásával nem is kellene külön foglalkozni: teljesen elegendő lenne $1 : r$ primitív függvényét az x, y, z változók függvényeként meghatározni.

Azonban $1 : r$ primitív függvényének meghatározása nehezebb feladat, mint a deriváltak primitív függvényének meghatározása és nincs is

[1] L. pl. SUTÁK: A differenciál és integrálszámítás elmélete. 2. kiadás. Budapest, 1922. 313. old.

tudomásom arról, hogy a derékszögű hasábra vonatkozóan $1 : r$ primitív függvénye, illetve maga az *u potenciál* ismeretes lenne.

Az első deriváltak primitív függvényeinek, illetve maguknak az u_x u_y, u_z integráloknak a meghatározását derékszögű hasábra vonatkozóan, ANSEL közölte.[2] Eredményei azonban igen bonyolultak, mert az e tárgykörbe tartozó integrálok megszokott *log* és *arc tg* függvényein kívül hiperbolikus függvényeket is tartalmaznak.

A második deriváltak primitív függvényeinek és ezzel együtt maguknak az u_{xy}, u_{xz}, u_{yz}; u_{xx}, u_{yy}, u_{zz} integráloknak a meghatározása sokkal egyszerűbb és ezek az Eötvös-ingával történő mérések alkalmazásának irodalmában régen ismeretesek is.[3]

A primitív függvények ez esetben igen egyszerűek:

$$\begin{aligned}
\varphi_{xy} &= \log (c + r);\\
\varphi_{xz} &= \log (b + r);\\
\varphi_{yz} &= \log (a + r);\\
\varphi_{xx} &= -\operatorname{arctg} \frac{b}{a}\frac{c}{r};\\
\varphi_{yy} &= -\operatorname{arctg} \frac{c}{b}\frac{a}{r};\\
\varphi_{zz} &= -\operatorname{arctg} \frac{a}{c}\frac{b}{r}.
\end{aligned}$$

Az u_{xy}, u_{xz}, u_{yz}; u_{xx}, u_{yy}, u_{zz} integrálok ezekből a primitív függvényekből az a_1, a_2; b_1, b_2; c_1, c_2 határok behelyettesítésével a közölt módon számíthatók ki.

A következőkben megmutatom, hogyan lehet ezekből a második deriváltakat előállító primitív függvényekből újabb integrálás nélkül az első deriváltak és a potenciál primitív függvényeit (tehát az első deriváltakat és a potenciált kifejező határozott integrálokat is) igen egyszerűen meghatározni.

Kiindulunk abból, hogy $1 : r$-nek φ-vel jelölt primitív függvénye azt a függvényt jelenti, amelynek az a, b, c változók szerint képezett harmadik deriváltja $1 : r$, azaz:

$$\varphi_{abc} = \frac{1}{r}.$$

Ebből következik, hogy $1 : r$ x szerint képezett deriváltjának primitív függvénye az a φ_x függvény, amelynek a, b, c szerint képezett harmadik deriváltja $\left(\frac{1}{r}\right)_x$:

$$\varphi_{xabc} = \left(\frac{1}{r}\right)_x = -\left(\frac{1}{r}\right)_a = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}^{\,3}}.$$

---

[2] E. A. ANSEL: Massenanziehung begrenzter homogener Körper von rechteckigem Querschnitt und des Kreiszylinders. Beitr. d. angew. Geophysik. Bd. 5., 1936.

[3] E. LANCASTER—JONES: Computation of Eötvös Gravity Effects. Geophysical Prospecting, 1929. Amer. Inst. of. Min. and Metallurg. Engrs. New-York.

Ez azt mutatja, hogy $\varphi_{x\,abc}$ az a, b, c változók -2-edfokú homogén függvénye. Tehát a homogén függvényekre vonatkozó Euler-féle tétel szerint e $\varphi_{x\,abc}$ függvény a, b és c szerint képezett deriváltjainak és az a, b, c változóknak a kompozíciója (szorzatösszege) a $\varphi_{x\,abc}$ függvény -2-szeresével egyenlő:

$$-2\varphi_{x\,abc} = a\varphi_{x\,abc\,a} + b\varphi_{x\,abc\,b} + c\varphi_{x\,abc\,c}.$$

A deriválások sorrendjét másképpen rendezve:

$$-2\varphi_{x\,abc} = a\varphi_{x\,aa\,bc} + b\varphi_{x\,bb\,ac} + c\varphi_{x\,cc\,ab}.$$

Adjuk hozzá ehhez az egyenlőséghez a következő egyenlőséget:

$$3\varphi_{x\,abc} = \varphi_{xa\,bc} + \varphi_{xb\,ac} + \varphi_{xc\,ab}.$$

Az összeadás a baloldalon függvényünk egyszereséhez, a jobboldalon pedig könnyen felismerhető szorzatok deriváltjaihoz vezet:

$$\varphi_{x\,abc} = (a\varphi_{xa})_{a\,bc} + (b\varphi_{xb})_{b\,ac} + (c\varphi_{xc})_{c\,ab}.$$

A zárójelbe tett függvények mindegyikét, a sorrendtől eltekintve, a, b és c szerint kell deriválni: e deriváltak összege nyilván függvényeink összegének a, b és c szerint képezett deriváltja. A zárójelen belül vegyük figyelembe, hogy az a, b, c változók szerint képezett első deriváltak az x, y, z szerint képezett deriváltak -1-szeresei:

$$\varphi_{x\,abc} = -(a\varphi_{xx} + b\varphi_{xy} + c\varphi_{xz})_{abc}.$$

Ez az eredményünk azt jelenti, hogy a φ_x-szel jelölt primitív függvények egyike az itt zárójelben levő függvények -1-szeres összege:

$$\varphi_x = -(a\varphi_{xx} + b\varphi_{xy} + c\varphi_{xz}) \text{ és ugyanígy:}$$
$$\varphi_y = -(a\varphi_{yx} + b\varphi_{yy} + c\varphi_{yz});$$
$$\varphi_z = -(a\varphi_{zx} + b\varphi_{zy} + c\varphi_{zz}).$$

Tehát: *a potenciál x, y, z szerint képezett első deriváltjainak primitív függvényei az ugyanolyan első indexű második deriváltak primitív függvényeinek és az a, b, c változóknak -1-szeres kompozíciói* (szorzatösszegei).

A második deriváltak primitív függvényeinek előbb közölt kifejezéseit figyelembe véve:

$$\varphi_x = a \operatorname{arctg} \frac{b}{a}\frac{c}{r} - b\log(c+r) - c\log(b+r);$$

$$\varphi_y = -a\log(c+r) + b \operatorname{arctg} \frac{c}{b}\frac{a}{r} - c\log(a+r);$$

$$\varphi_z = -a\log(b+r) - b\log(a+r) + c \operatorname{arctg} \frac{a}{c}\frac{b}{r}.$$

Természetesen az u_x, u_y, u_z határozott integrálok a φ_x, φ_y, φ_z primitív függvények e kifejezéseiből az integrálás határainak behelyettesítésével az ismertetett módon adódnak.

Látjuk tehát, hogy a potenciál első deriváltjait kifejező határozott integrálok a második deriváltak primitív függvényeiből csakugyan igen egyszerűen meghatározhatók.

* * *

Lássuk most magának a potenciálnak a meghatározását. Térjünk vissza ismét a φ függvényt értelmező egyenlőségünkhöz:

$$\varphi_{abc} = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Ez azt mutatja, hogy φ_{abc} az a, b, c változók -1-edfokú homogén függvénye. Tehát ismét a homogén függvényekre vonatkozó Euler-féle tétel szerint e φ_{abc} függvény a, b és c szerint képezett deriváltjainak és az a, b, c változóknak a kompozíciója a φ_{abc} függvény -1-szeresével egyenlő:

$$-\varphi_{abc} = a\varphi_{abc\,a} + b\varphi_{abc\,b} + c\varphi_{abc\,c}.$$

A deriváltak sorrendjét máskép rendezve:

$$-\varphi_{abc} = a\varphi_{aa\,bc} + b\varphi_{bb\,ac} + c\varphi_{cc\,ab}.$$

Adjuk hozzá ehhez az egyenlőséghez a következő egyenlőséget:

$$3\varphi_{abc} = \varphi_{a\,bc} + \varphi_{b\,ac} + \varphi_{c\,ab}.$$

Az összeadás a baloldalon most függvényünk kétszereséhez, a jobboldalon pedig ismét könnyen felismerhető szorzatok deriváltjaihoz vezet:

$$2\varphi_{abc} = (a\varphi_a)_{a\,bc} + (b\varphi_b)_{b\,ac} + (c\varphi_c)_{c\,ab}.$$

Ebből ugyanúgy, mint előbb:

$$2\varphi_{abc} = -(a\varphi_x + b\varphi_y + c\varphi_z)_{abc}.$$

Ez az eredmény ismét azt jelenti, hogy a 2φ-vel jelölt primitív függvények egyike az itt zárójelben levő függvények -1-szeres összege:

$$2\varphi = -(a\varphi_x + b\varphi_y + c\varphi_z).$$

Tehát *a potenciál primitív függvényének kétszerese az első deriváltak primitív függvényeinek és az a, b, c változóknak a -1-szeres kompozíciója.*

Ezt a magábanvéve is érdekes eredményt az első deriváltakra vonatkozó eredményünkkel egybevetve a következő újabb eredményhez jutunk:

$$2\varphi = a^2\varphi_{xx} + b^2\varphi_{yy} + c^2\varphi_{zz} + 2ab\varphi_{xy} + 2bc\varphi_{yz} + 2ca\varphi_{zx}.$$

Tehát *a potenciál primitív függvényének kétszerese a második deriváltak primitív függvényeinek és az a, b, c változókból képezett négyzetek és kétszeres szorzatoknak a kompozíciója.*

A második deriváltak primitív függvényeinek közölt kifejezéseit figyelembe véve:

$$2\varphi =$$

$$-a^2 \operatorname{arctg} \frac{b}{a}\frac{c}{r} + 2ab \log(c + r);$$

$$-b^2 \operatorname{arctg} \frac{c}{b}\frac{a}{r} + 2bc \log(a + r);$$

$$-c^2 \operatorname{arctg} \frac{a}{c}\frac{b}{r} + 2ca \log(b + r).$$

Természetesen az u potenciált kifejező határozott integrál φ-nek ebből a kifejezéséből az integrálás határainak behelyettesítésével az ismertetett módon adódik.

Teljesség kedvéért ezt az eredményünket kifejezzük az a, b, c változók helyett az x, y, z; ξ, η, ζ változókkal is és a φ primitív függvényről a határok behelyettesítésének jelölésével áttérünk magának az u potenciálnak a kifejezésére:

$$u =$$

$$= \Big[(x-\xi)(y-\eta)\log(\zeta - z + r) - \frac{1}{2}(x-\xi)^2 \operatorname{arctg}\frac{\eta - y}{\xi - x}\frac{\zeta - z}{r} +$$

$$+ (y-\eta)(z-\zeta)\log(\xi - x + r) - \frac{1}{2}(y-\eta)^2 \operatorname{arctg}\frac{\zeta - z}{\eta - y}\frac{\xi - x}{r} +$$

$$+ (z-\zeta)(x-\xi)\log(\eta - y + r) - \frac{1}{2}(z-\zeta)^2 \operatorname{arctg}\frac{\xi - x}{\zeta - z}\frac{\eta - y}{r}\Big]_{\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1}^{\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2}$$

Ez az eredményünk azt is világosan kifejezi, hogy ezen az úton a potenciált az x, y, z változók függvényeként (és természetesen a derékszögű hasábot jellemző ξ_1, η_1, ζ_1; ξ_2, η_2, ζ_2 adatok függvényeként) határoztuk meg.

* * *

Vizsgáljuk még meg, hogy a második és harmadik deriváltak primitív függvényei között is megállapítható-e az előbbiekhez hasonló kapcsolat. Induljunk ki pl. abból, hogy a φ_{xy} primitív függvény azt a függvényt jelenti, amelynek az a, b, c változók szerint képezett harmadik deriváltja $\left(\frac{1}{r}\right)_{xy}$:

$$\varphi_{xy\,abc} = \left(\frac{1}{r}\right)_{xy} = \left(\frac{1}{r}\right)_{ab} = \frac{3ab}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}^5}.$$

Ez azt mutatja, hogy $\varphi_{xy\,abc}$ az a, b, c változók -3-adfokú homogén függvénye. Tehát a homogén függvényekre vonatkozó Euler-féle tétel szerint e $\varphi_{xy\,abc}$ függvény a, b és c szerint képezett deriváltjainak és az a, b, c változóknak a kompozíciója most a $\varphi_{xy\,abc}$ függvény -3-szorosával egyenlő:

$$-3\varphi_{xy\,abc} = a\varphi_{xy\,abc\,a} + b\varphi_{xy\,abc\,b} + c\varphi_{xy\,abc\,c}.$$

A deriváltak sorrendjét máskép rendezve:

$$-3\varphi_{xy\,abc} = a\varphi_{xy\,aa\,bc} + b\varphi_{xy\,bb\,ac} + c\varphi_{xy\,cc\,ab}.$$

Adjuk hozzá ehhez az egyenlőséghez a következő egyenlőséget:

$$3\varphi_{xy\,abc} = \varphi_{xy\,a\,bc} + \varphi_{xy\,b\,ac} + \varphi_{xy\,c\,ab}.$$

Az összeadás a baloldalon most nullához, a jobboldalon pedig ismét könnyen felismerhető szorzatok deriváltjaihoz vezet:

$$0 = (a\varphi_{xy\,a})_{a\,bc} + (b\varphi_{xy\,b})_{b\,ac} + (c\varphi_{xy\,c})_{c\,ab}.$$

Ebből ugyanúgy, mint az előbbiekben:

$$(a\varphi_{xy\,x} + b\varphi_{xy\,y} + c\varphi_{xy\,z})_{a\,bc} = 0.$$

[4] L. pl. SUTÁK, id. mű, 230. old.

Tehát az itt zárójelben levő függvénynek az a, b, c változók szerint képezett harmadik deriváltja 0. Ez azt jelenti, hogy maga a zárójelben levő függvény a 0-tól csak oly tagok összegével különbözik, amely tagok az a, b, c változók közül legalább az egyiktől függetlenek. Az ilyen primitív függvényt 0-val egyenlőnek tekinthetjük, mert egyrészt a 0 egyike az ilyen primitív függvényeknek. másrészt az említett tagoknak az integrálás határain felvett helyettesítési értékeinek különbségei úgyis nullával egyenlők.

Ilyen értelemben tehát a következő eredményre jutottunk:

$$
\begin{aligned}
a\varphi_{xyx} + b\varphi_{xyy} + c\varphi_{xyz} &= 0 \text{ és ugyanígy:}\\
a\varphi_{yzx} + b\varphi_{yzy} + c\varphi_{yzz} &= 0;\\
a\varphi_{zxx} + b\varphi_{zxy} + c\varphi_{zxz} &= 0;\\
a\varphi_{xxx} + b\varphi_{xxy} + c\varphi_{xxz} &= 0;\\
a\varphi_{yyx} + b\varphi_{yyy} + c\varphi_{yyz} &= 0;\\
a\varphi_{zzx} + b\varphi_{zzy} + c\varphi_{zzz} &= 0.
\end{aligned}
$$

Tehát nem kaptunk kapcsolatot a második és harmadik deriváltak primitív függvényei között, hanem eljárásunk arra az eredményre vezetett, hogy *a harmadik deriváltak primitív függvényei nem függetlenek egymástól*, hanem a következő kapcsolatban állanak egymással:

Két indexben megegyező és csak a harmadik indexben különböző harmadik derivált primitív függvényének és az a, b, c változóknak a meg nem egyező indexnek megfelelően történő kompozíciója a 0-tól csak oly tagok összegével különbözik, amely tagok az a, b, c változók közül legalább az egyiktől függetlenek.

Ez az eredmény közvetlenül is igazolható. Pl. az első összefüggésben szereplő primitív függvények a következők:

$$\varphi_{xyx} = -\iiint \left(\frac{1}{r}\right)_{aba} da\,db\,dc = -\int \left(\frac{1}{r}\right)_{a} dc = a\int \frac{1}{r^3}\,dc = \frac{a}{a^2+b^2}\frac{c}{r};$$

$$\varphi_{xyy} = -\iiint \left(\frac{1}{r}\right)_{abb} da\,db\,dc = -\int \left(\frac{1}{r}\right)_{b} dc = b\int \frac{1}{r^3}\,dc = \frac{b}{a^2+b^2}\frac{c}{r};$$

$$\varphi_{xyz} = -\iiint \left(\frac{1}{r}\right)_{abc} da\,db\,dc = -\frac{1}{r}.$$

Ezek a, b, c-szereseinek összege csakugyan 0:

$$a\varphi_{xyx} + b\varphi_{xyy} + c\varphi_{xyz} = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}\frac{c}{r} - \frac{c}{r} = \frac{c}{r} - \frac{c}{r} = 0.$$

Ugyanilyen egyszerű a második és harmadik összefüggés közvetlen igazolása is. A tiszta harmadrendű deriváltak primitív függvényeit tartalmazó összefüggések közvetlen igazolása valamivel hosszadalmasabb, de minden elvi nehézség nélkül szintén végrehajtható.

* * *

Végül röviden megemlékezünk arról az esetről, ha a ható tömeget nem derékszögű, hanem *ferdeszögű hasáb* foglalja magában. Ez esetben ferdeszögű koordináták bevezetésével, azaz homogén lineáris transzformációval elérhető, hogy az integrálás tartományát ismét a koordinátasíkokkal párhuzamos síkok határolják, tehát hogy az egyes változók szerint végrehajtott integrálások határai egymástól függetlenek legyenek és akkor a kiszámítandó integrálok ismét az integrálandó függvények primitív függvényeinek az integrálás határain felvett helyettesítési értékeiből határozhatók meg.

Ferde hasáb esetén is legegyszerűbb a potenciál második deriváltjait kifejező integrálok meghatározása. Erre vonatkozó eredmények az Eötvös-ingával történő mérések alkalmazásának irodalmában ismeretesek is.[5] — Arról nincs tudomásom, hogy (véges) ferde hasáb esetén a potenciál első deriváltjait és magát a potenciált kifejező integrálok is ismeretesek lennének.

A potenciálnak és deriváltjainak kapcsolatára vezető eljárásunk ferde hasáb esetén is alkalmazható. A ferdeszögű koordinátákat bevezető homogén lineáris transzformáció homogén függvényeinket az új változók ugyanannyiadfokú homogén függvényeibe viszi át, tehát a homogén függvényekre vonatkozó Euler-féle tételből következtetett összefüggéseink az új változókban is érvényesek. Tehát a ferde hasáb tömegvonzásának potenciálja és e potenciál deriváltjai között az új változókban ugyanolyan összefüggések érvényesek, mint amilyeneket a derékszögű hasábra és a derékszögű koordinátákra vonatkozóan kimutattunk. Ezeknek az összefüggéseknek, valamint a «két dimenziós» alakulatok hatására vonatkozó megfelelő összefüggéseknek a részletes tárgyalására esetleg más alkalommal még visszatérünk.

[5] K. MADER: Ein Beispiel der gravimetrischen Tiefenforschung im Wiener Becken mit der Drehwage. Österr. Monatsschr. für den öffent. Baudienst und das Berg- und Hüttenwesen. 1924. Heft. 9.

Felelős kiadó: Solt Sándor — Műszaki felelős: Rózsa István

Megrendelve: 1953. VI. 17. — Imprimálva 1953. VIII. 3. — Papír alakja: 70×100
A könyv azonossági száma: 1105. Ívek száma: 1/2 1/8 (3/4 1/8) — Példányszám: 500.

Ez a könyv az MNOSZ 5601—50 Á és MNOSZ 5602—50 Á szabványok szerint készült.

5329. Franklin-nyomda Budapest, VIII., Szentkirályi-utca 28.
Felelős: Ketskés János.