

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

A LEGGYENÉBB FUNDAMENTÁLIS KÖLCSÖNHATÁS LÉPTÉKE

## A newtoni vagy univerzális gravitációs állandó

A gravitációs állandó ( $G$ ), melyet newtoni vagy univerzális gravitációs állandónak is neveznek, a természet egyik fundamentális állandója. Pontos értékére egyaránt szüksége van a gravimetriának, a kozmológiának, a részecskefizikának, a geofizikának és a csillagászatnak. Ugyanakkor, bár értékének meghatározására mindenedig kétszáznál is több kísérlet keretében került sor, napjainkban sem rendelkezünk még megfelelőnek mondható pontosságú értékével.

Ennek a helyzetnek mindenekelőtt az az oka, hogy a  $G$  meghatározása során használt gravitációs hatás rendkívül gyenge, a leggyengébb a négy ismert fundamentális erőhatás (erős, gyenge, elektromágneses valamint gravitációs kölcsönhatások) közül, és nem árnyékolható a kísérlet környezetében lévő objektumok (pl. épület) hatásától. A két évszázada folyó kísérletek ellenére a gravitációs állandó még mindig a legkevésbé ismert fundamentális állandó (**1. táblázat**), és 0,05% eltérés tapasztalható a különböző kutatócsoportok által meghatározott értékek között. Az eltérések valószínű oka eddig még fel nem tárt szisztematikus hatásokban keresendő.

Newton beszámolója alapján az univerzális gravitációval kapcsolatos elképzeléseit az 1665-1666 közötti időszakban fogalmazta meg. Bár nem ő volt az egyetlen, aki megállapította, hogy a gravitációs tömegvonzás a távolság négyzetével fordítottan arányos, hiszen kortársai Halley és Hooke is hasonló következtetésre jutottak, de ők nem tudták feltételezéseiket igazolni. Newton a gravitációs hatás természetének igazolását először egy rövidebb, kilenc oldalas, Halley kérésére írt értekezésben, a „*De motu corporum in gyrum*” („Forgó testek mozgásáról”)

adta meg (1684), mely ebben a kérdésben előfutára lett az 1687-ben — Halley aktív támogató közreműködésének köszönhetően — megjelent 550 oldal terjedelmű „*Philosophie naturalis principia mathematica*”-nak („A természetfilozófia matematikai alapelvei”). E mű harmadik része tartalmazza az egyetemes gravitáció törvényével kapcsolatos kutatásokat és magát a gravitációs törvényt. Ez azt a megállapítást tartalmazza, hogy a két test között ható  $F$  gravitációs vonzóerő egyenesen arányos azok tömegének ( $m_1$  és  $m_2$ ) szorzatával és fordítottan arányos a köztük lévő távolság ( $r$ ) négyzetével:

$$F = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

ahol Newton azért vezette be a  $G$  értéket, hogy összhangba kerüljön az erő, a tömeg és a távolság dimenziója. A Föld  $M$  tömegére és  $G$  meghatározására Newton két módszert javasolt:

- a függővonalnak egy hegy irányába történő elhajlásának meghatározása
- két test kölcsönös tömegvonzásának meghatározása laboratóriumban.

Az állandó neve	Értéke	Relatív hibája
Gravitációs állandó	$6,674\ 30 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$	$2,2 \times 10^{-5}$
Fénysebesség	$299\ 792\ 458 \text{ m s}^{-1}$	pontos érték
Proton nyugalmi tömege	$1,672\ 621\ 923\ 69 \times 10^{-27} \text{ kg}$	$3,1 \times 10^{-10}$
Neutron nyugalmi tömege	$1,674\ 927\ 498\ 04 \times 10^{-27} \text{ kg}$	$5,7 \times 10^{-10}$
Elektron tömege	$9,1093837015 \times 10^{-31} \text{ kg}$	$3,0 \times 10^{-10}$
Elemi töltés	$1,602176634 \times 10^{-19} \text{ C}$	pontos érték
Planck állandó	$6,62607015 \times 10^{-34} \text{ J Hz}^{-1}$	pontos érték
Boltzmann állandó	$1,380649 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$	pontos érték
Rydberg állandó	$10973731,568160 \text{ m}^{-1}$	$1,9 \times 10^{-12}$
Avogadro állandó	$6,022\ 140\ 76 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$	pontos érték
Faraday állandó	$96485,33212 \text{ mol}^{-1}$	pontos érték

1. táblázat. Néhány fizikai állandó értéke és azok relatív hibája (CODATA, 2018)

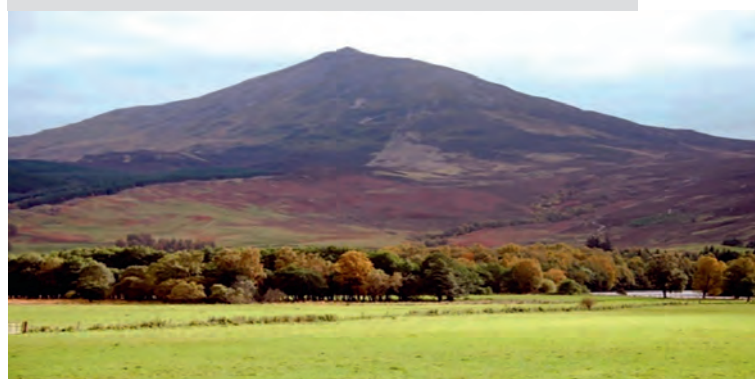
A gravitációs állandó értékének kísérleti meghatározását Newton a földi viszonyok között nem tartotta lehetségesnek, bár erre vonatkozóan tett egy becslést, miszerint a Föld sűrűsége ötször vagy hatszor nagyobb a vízénél (Principia, Propositio X), amiből a formálisan adódó érték  $(6,05\text{-}7,50) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ . Természetesen a földi tömegek között fellépő gravitációs kölcsönhatás nagyon kicsi. A tudomány művelői évtizedekig ezen túlmenően azért is tartózkodtak a  $G$  meghatározás megkísérlésétől, mert a Principia-ban Newton egy szorzási hiba áldozatává vált. Arra az eredményre jutott, hogy két egyforma, kb. 30 centiméter átmérőjű gömböt, melyek sűrűsége a Földével megegyező, egymástól 0,6 centiméter távolságra helyezve egy hónap múlva ütköznek össze, holott a valóságban ez kevesebb, mint négy perc alatt bekövetkezik, azaz a várható gravitációs hatás tízezerszer nagyobb a Newton által feltételezettnél.

Ezért a gravitációs törvény megszületésétől közel fél évszázadnak kellett eltelnie a  $G$  terepen történő első megmérésének megkísérléséig. Erre egy francia matematikus és geofizikus, Bouguer vállalkozott a XVIII. század harmincas éveiben. Méréseihez az Andok hegyeinek tömegét használta fel. Ingamérések alapján meghatározta a gravitációs gyorsulás értékét a tenger szintjén az Esmeralda folyó Inka nevű szigetén ( $g_1$ ), majd Quitóban 2860 méterrel a tenger szintje fölött ( $g_2$ ). Ha a  $\rho'$  tengerszint és a 2860 méter közötti kőzetek sűrűsége és  $\bar{\rho}$  a Föld átlagsűrűsége, akkor

$$\frac{g_2 - g_1}{g_1} = \frac{h}{r} \left( \frac{3\rho'}{2\bar{\rho}} - 2 \right)$$

felhasználásával Bouguer esetében  $\frac{\bar{\rho}}{\rho'} = 4,5$  érték adódott, ami  $G = 8 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$  értéknek felel meg. Bár Bouguer elmélete helyes volt, az általa kapott arány irreális voltát ő is elismerte. Ennek ellenére munkája fontos előrelépést jelentett, mert megmutatta, hogy a Föld átlagos sűrűsége lényegesen meghaladja a Kordillerákat alkotó kőzetekét és egy használható eljárást adott a tudománynak a  $G$  meghatározására. A hiba oka mintegy 100 évvel később lelt magyarázatra, amikor a XIX. század közepén Pratt és Airy kimutatták, hogy a hegységek tömege azok „gyökerei” által kompenzáltak, azaz az alacsony sűrűségű kőzettömegek nagyobb mélységre terjednek ki, mint magasságuk. Ez az izosztatikus hatás nem játszott szerepet, amikor az 1770-es években Maskelyne angol királyi csillagász a skóciai Schiehallion-hegy esetében alkalmazta Bouguer eljárását. Az így kapott  $8,216 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$  értékét a terepi eredmények újrafeldolgozásával Hutton  $7,492 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$

1. ábra. Az 1083 méter magas Schiehallion-hegy



értékre módosította, így a Schiehallion-hegyen végzett mérésekből megszületett a valóságost most már közelítő érték.

A fejlődés következő lépését a gravitációs állandó laboratóriumi meghatározása jelentette. Mielőtt erről szót ejtenénk, fontos megemlíteni, hogy a  $G$  meghatározások földtani szerkezetek felhasználásával a laboratóriumi meghatározások későbbi térhódítása idején is folytatódtak. Ebben a vonatkozásban elsősorban Airy tevékenységéről kell említést tenni, aki az 1850-es években a Föld felszínén és  $z$  mélységben végzett (bányákban) kapott  $g(0)$  és  $g(z)$  gravitációs gyorsulás érték felhasználásával határozta meg a  $G$  értékét a következő egyenletek felhasználásával (2. ábra):

$$g(0) = GM/R^2 \text{ és } g(z) = G(M - \Delta M)/(R - z)^2$$

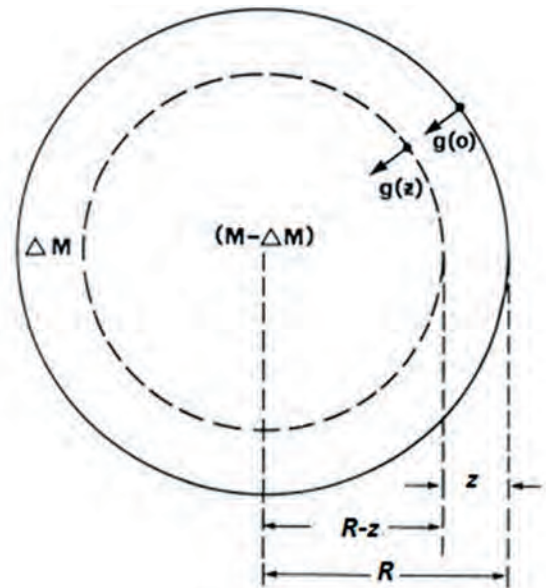
(ahol  $R$  a gömbnek tekintett Föld sugara). Mivel  $z \ll R$ ;  $\Delta M \ll M$  a  $z$  mélység feletti közet sűrűség értékét ( $\rho'$ ) felhasználva adódik a  $G$  meghatározására szolgáló egyenlet:

$$g(z) - g(0) = 2g(0) \cdot \frac{z}{R} - 4\pi G\rho'z$$

A XX. századi Airy módszerével meghatározott  $G$  értékeinek átlaga  $(6,747 \pm 0,012) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ . Megjegyzendő, hogy az Airy-féle eljárásnak 1960 után a bányabeli mérések mellett több változatát is alkalmazták a gravitációs állandó meghatározására. Így felhasználták a tengerek felszínén és a tengerfenéken végzett méréseket, a víztárolókon létrehozott szintingadozások okozta gravitációs változásokat.

A Newton által javasolt másik, két test kölcsönös tömegvonzásán alapuló laboratóriumi gravitációs állandó meghatározásra több mint egy évszázadig kellett várni. Az erre a célra szolgáló eszközt egy ma már igazságtalanul elfelejtett tudós, Michell alkotta meg az 1780-as évek elején. Michell publikálta az első tudományos munkát a földrengésekről, Asimov amerikai regényíró és kémikus ezért a „szeizmológia atyjának” nevezi; kiemelkedő eredményeket ért el a csillagászatban, elsőként végzett becslést Naprendszeren kívüli objektum távolságának meghatározására, foglalkozott a kettős csillagokkal és a fekete lyukak kérdésével. Coulombbal egy időben felfedezte a torziós ingát. Erre alapozta a  $G$  mérésekre tervezett eszközt, melyet halála után barátja, Cavendish sikerrel használt fel erre a célra (3. ábra).

Ha meghatározzuk azt a  $\theta$  szöget mellyel az inga karja a kitérítő tömeg hatására elfordul, akkor ennek, továbbá a tömegek és a kis és nagy tömegek közti távolság, valamint az ingakar hosszának ismeretében a  $G$  meghatározható. 29 mérési sorozat alapján Cavendish 1789-ben

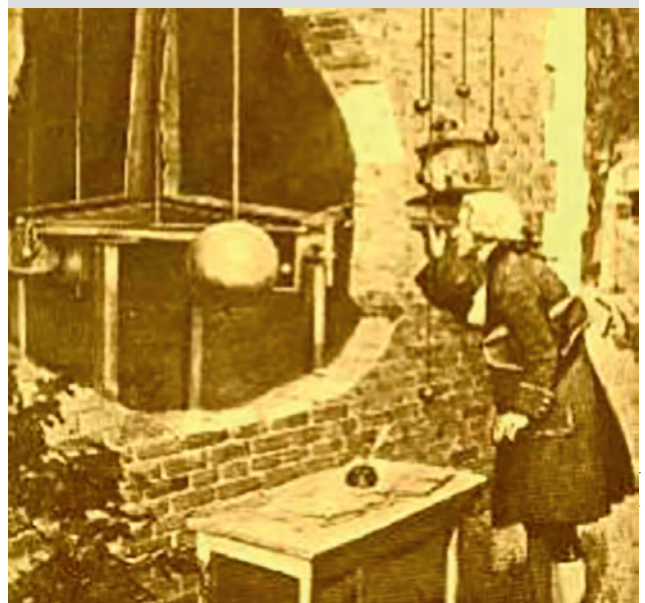


2. ábra. A gravitációs állandó meghatározásának Airy-féle módszere a gravitációs gyorsulás mélységgel történő változásán alapul

$6,7169 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$  eredményt kapott, ami az állandó első megbízható, a tudomány számára rendkívül fontos mérési eredménye volt.

A gravitációs állandó értékének további pontosabbá tétele Eötvös Loránd nevéhez fűződik, akinek először sikerült egy évszázad elteltével a Cavendish által használt statikus módszer helyett dinamikus eljárással a gravitációs állandó értékét számottevő mértékben pontosabbá tennie, és több mint harminc évig az általa meghatározott dinamikus úton kapott  $G$  érték számított a legpontosabbnak és a legelőremutóbbnak (2. táblázat). A táblázatban Boys gravitációs állandó meghatározásának hibaértéke ugyan kisebb

3. ábra. Fantáziakép Cavendish 1798. évi gravitációs méréséről Michell kísérleti eszközével. Érdekessége a képnek, hogy a megfigyelő egy az eszköz melletti szobából végzi a megfigyelést.



Szerző, publikálás éve, kísérlet helye	Alkalmazott technika	$G \times 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$
H. Cavendish, 1798 Clapham, Anglia	Torziós inga, statikus	$6,67 \pm 0,07$
F. Reich, 1838, 1852 Freiburg, Németország	Torziós inga, dinamikus	$6,64 \pm 0,06$
C.V. Boys, 1895 Anglia	Statikus	$6,658 \pm 0,007$
Eötvös L., 1896 Budapest, Magyarország	Torziós inga, dinamikus	$6,657 \pm 0,013$
C. Braun, 1897 Marienstein, Ausztria	Torziós inga, statikus és dinamikus	$6,649 \pm 0,02$
P. Heil, 1930 Washington, USA	Torziós inga, dinamikus	$6,670 \pm 0,005$
P. Heyl, Chrzanowski, 1942 Washington, USA	Torziós inga, dinamikus	$6,673 \pm 0,005$
R. Rose, H. Parker, K. Lowry, A. Kuhlhan, I. Beams, 1969 Charlottesville, USA	Torziós inga, kompenzációs	$6,674 \pm 0,004$
Renner J., 1973 Budapest, Magyarország	Torziós inga, dinamikus	$6,670 \pm 0,008$
J. Gundlach, S. Markowitz, 2000 Seattle, USA	Torziós inga, dinamikus	$6,674215 \pm 0,000092$
Q. Li et al., 2018a Wuhan, Kína	Torziós inga, dinamikus	$6,674184 \pm 0,000078$
Q. Li et al., 2018b Wuhan, Kína	Torziós inga, dinamikus	$6,674184 \pm 0,000077$

2. táblázat. Néhány  $G$  érték az 1900 előtti és az azt követő időszakból

Eötvösénél, de ez nem a teljes mérési anyagon, hanem csak a legkisebb eltéréseket mutató mérési sorozatokon alapul. Az Eötvös-féle eljárás lényege, hogy nem magát az erőt, hanem annak változását vizsgálta, azaz Cavendish statikus módszerétől eltérően nem az inga kitérését, hanem lengési idejét és annak változását határozta meg. Műszerét egy kettős falú fémedényben, két 60 centiméter magas, 30 centiméter széles és 90 centiméter hosszúságú ólomlap közé állította fel (4. ábra). A Coulomb-inga lengése két egymásra merőleges irányban került megfigyelésre: a fal hosszának irányában (longitudinális állás,

az ehhez tartozó periódus  $T_L$ ) és erre merőleges helyzetben (tranzverzális állás,  $T_T$ ). A vizuális megfigyelés mellett a méréseket fotografikus úton is regisztrálták. A  $G$  érték meghatározására Eötvös által kapott egyenlet:

$$\frac{1}{T_L^2} - \frac{1}{T_T^2} = \frac{8\pi G\rho}{\pi^2} (1 - \varepsilon)$$

ahol  $\rho$  az ólom sűrűsége és  $\varepsilon \leq 1\%$  és egy a rúd méretéből és az ólomlap véges kiterjedése miatt adódó, számítással meghatározható állandó. „A lengési idők lemérése meglepő biztonsággal eszközölhetőek.

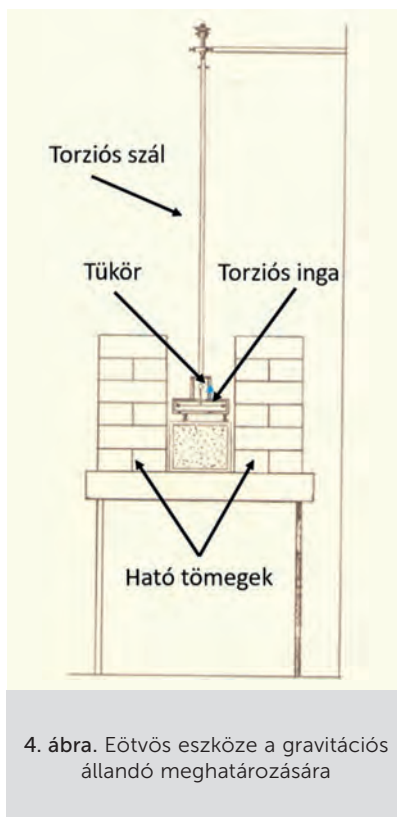
Dr. Kövesligethy Radó és Tanzl Károly urak 1891. év január 26-tól március 26-ig 59 észlelési sorozatban határozták meg  $\frac{1}{T_L^2} - \frac{1}{T_T^2}$  értékét” (Eötvös Loránd, 1896, *Mathematikai és Természettudományi Értesítő*, 14, 221-266).

Eötvös eredménye egy új, általa kidolgozott eljárás alapján, melynek hatása volt a későbbi kísérletekben használt metodikára, annak ellenére, hogy eredményéről több mai közleményben sajnos nem történik említés.

A XX. században, mint azt a 2. táblázatban bemutatott válogatás mutatja, a gravitációs állandó meghatározások belső hibái valamelyest csökkentek (átlagosan kb.  $10^4$  ppm értékről kb.  $10^3$  ppm-re, ppm: milliomod rész), de az egyes kísérletekből meghatározott  $G$  értékek közti eltérések ezeket lényegesen meghaladták. A gravitációs állandó meghatározások belső pontossága 2000 után tovább javult és értéke hozzávetőleg 10 ppm lett.

Jelentős áttörést eredményezett a Washingtoni Egyetemen Eötvös Loránd tiszteletére Eöt-Wash-nak nevezett kutatócsoport gravitációs állandó meghatározása céljából készült munkája. Berendezésükben (5. ábra) a ható tömegek (négy darab 8,1 kg súlyú acélgolyó) forgó mozgást végeznek (öt percenként megy végbe egy teljes körfordulásuk). A torziós szálon függő sík, téglalap alakú lemezzel együtt az inga ellentétes irányban végez tengelykörüli forgást, 20 perces periódusidővel. A kísérlet során az inga és a forgótányér visszacsatolással összhangba hozott forgásának sebességét mérik. Ez volt az első eset, mikor a  $G$  meghatározás bizonytalanságának nagyságrendje 10 ppm körüli értéket vett fel.

2016-ban a gravitációs állandó értékét a CODATA (Committee on Data for Science and Technology) a tizennégy legmegbízhatóbb kísérleti eredményre támaszkodva a  $(6,67408 \pm 0,00031) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$  értékkel határozta meg. Az adat bizonytalansága 47 ppm. Fontos azonban



4. ábra. Eötvös eszköze a gravitációs állandó meghatározására

megjegyezni, hogy a legnagyobb és a legkisebb felhasznált gravitációs állandó adat közötti eltérés 550 ppm, holott a  $G$  érték hibáját korábban a legkisebb ppm-es értékkel jellemezték. Li és szerzőtársai (2018) a kísérleti eredmények közötti eltérések okát a mérések során fel nem tárt ismeretlen szisztematikus hibaforrások hatásának tulajdonították. Hogy a kérdés tisztázásához hozzájáruljanak, két teljesen eltérő, az eddigi legalacsonyabb relatív bizonytalansági tényezővel jellemezhető ingakísérletet végeztek el két különböző berendezés felhasználásával. Az első kísérletben az inga torziós oszcillációs frekvenciájának a két állásban elhelyezett tömegek hatására bekövetkezett változása alapján határozták meg a  $G$ -t három különböző kvarcszállal. A másik kísérlet során az ingák és a ható testek tömegeit változtatták. Mindezen kísérletek célja a minél pontosabb

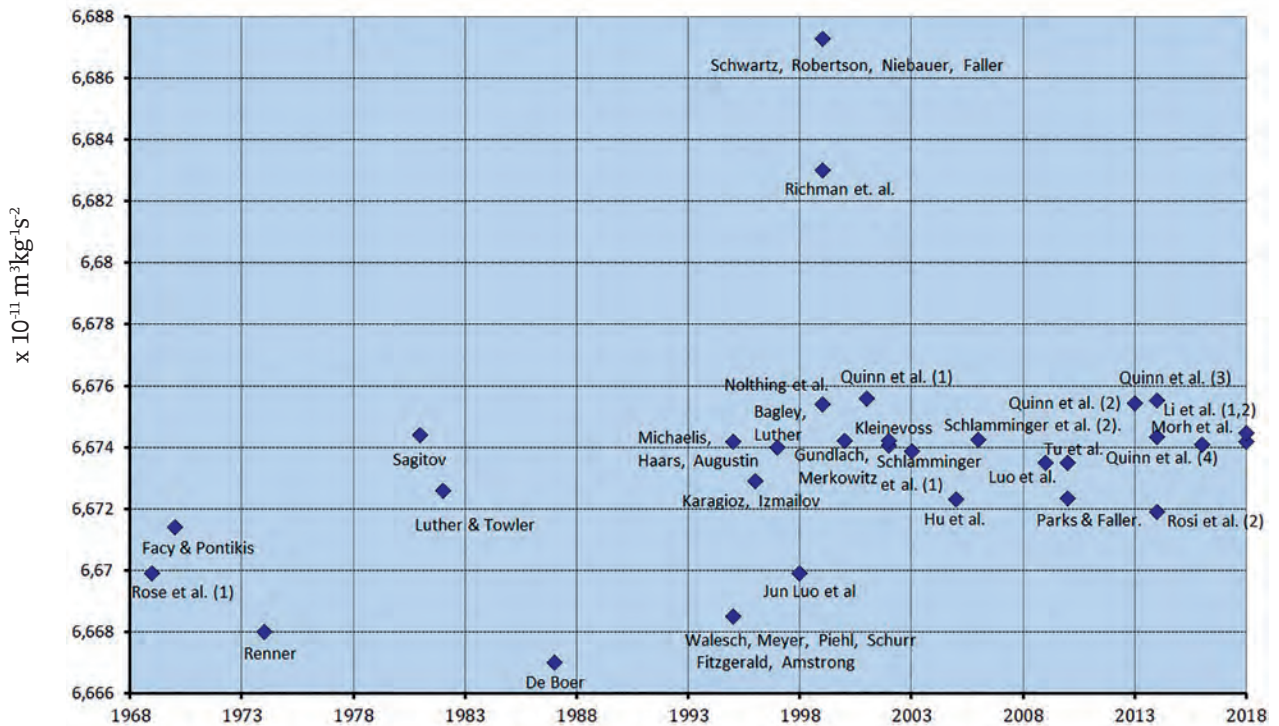
gravitációs állandó értékének meghatározása mellett az volt, hogy feltárják az esetleges feltáratlan szisztematikus hibaforrásokat.

Annak érdekében, hogy képet kapjunk a gravitációs állandó értékének reális megbízhatóságáról, összegyűjtöttük az ennek meghatározására szolgáló kísérletek eredményeit a kezdetektől napjainkig. (Természetesen a legrégebbi adatok az első szerzők (Newtontól Cavendishig) által közölt átlagos sűrűség értékből lettek számítva.)

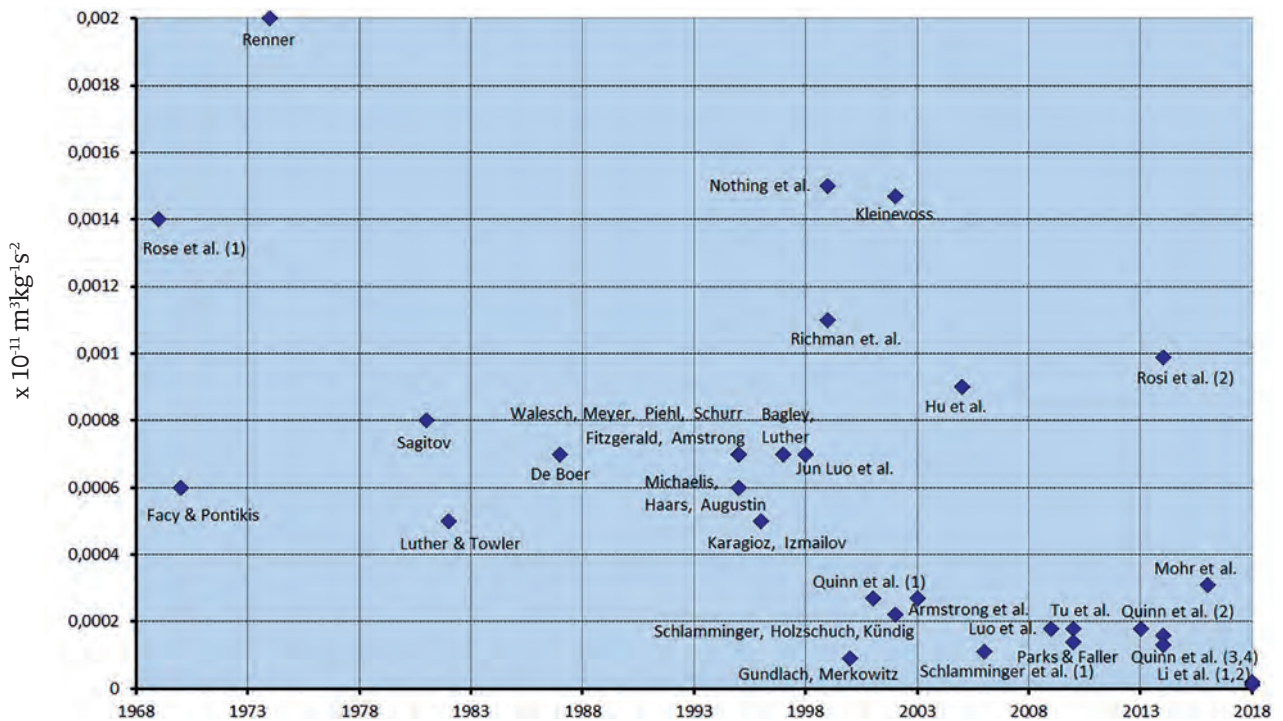
5. ábra. Az Eöt-Wash kutatócsoport által a Washingtoni Egyetemen használt eszköz



A 6. és 7. ábra az 1968 és 2018 között kapott eredmények értékeit és az ezekhez tartozó, a szerzők által számított hibaértékeket tartalmazza. Mindkét esetben az adatok jelentős szórása figyelhető meg, ami az idő múlásával csökkenő tendenciát mutat. Az 1900-tól 1968-ig terjedő időszakban kapott gravitációs állandó értékek átlaga  $6,65964 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$  volt, míg az eredmények szórása  $0,02292 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$ . Ez a két számított az 1969-1999 időszakban végzett meghatározások alapján:  $6,67547 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$  és  $0,01217 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$ . Végül 2000 és 2018 között  $G = 6,67474 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$  és



6. ábra. A gravitációs állandó meghatározására szolgáló kísérletek eredményei 1968 és 2018 között



7. ábra. Az 1968 és 2018 között meghatározott gravitációs állandók szerzők által közölt hibaértékei

a szórásra  $0,0034 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$  adódott. A gravitációs állandó meghatározások közti eltéréseket jellemző szórás értéke az utolsó vizsgált időszakban az előző kettőhöz képest jelentősen csökkent. Ugyanakkor a CODATA 2018-as adatával történő egybevetése az

általunk a 2000-2018 közötti időszakra kapott átlaggal azt valószínűsíti, hogy jelenleg a G értékének még mindig csak az első három tizedesjegye tekinthető jelenleg megbízhatónak.

VARGA PÉTER – KISZELY MÁRTA