150 SOR A TUDOMÁNYRÓL

A gyorsuló idő

Manapság egy ember annyi változást ér meg élete folyamán, amennyit az ókori Mezopotámiában csak száz egymást váltó nemzedék tapasztalhatott. Mai világunk gyorsan alakuló, dinamikus benyomást kelt. A mai ember természetes környezete a napról napra megfigyelt változás. Talán végzetként veszik sokan tudomásul a fokozódó iramot. A ma tapasztalt népességnövekedési expanzió nem azonos a társadalmi fejlődéssel, csupán tünete annak. A gyorsulás motorja a civilizációs haladás. Emlékszem, hogy 1943-ban, első elemista koromban a megtanulandó betűket és számokat a kis palatáblánkra palavesszővel írtuk, s el sem képzeltük, hogy életünk vége felé, a komputerek világában, a számítógépek vagy a kis mobiltelefonok használati eszközeink lesznek. Rohan az idő. Korunkban a tanítók, tanárok és oktatók állnak a legkritikusabb poszton. A tankönyvek ötévenként cserélődnek. Mindenki elmaradhat a gyorsuló világban, de a tanítók soha. Az ő munkájuktól függ, milyen lesz néhány évtized múlva a termelékenység, életszínvonal, milyen lesz népünk helyezése a nemzetek versenyében.

A továbbiakban a matematika fejlődéséből ragadnék ki néhány mozzanatot. Ezek közül is csak egy kis szeletet, amelyek katalizátorként hatottak a kutatásokra. Ilyenek azok a problémák, amelyek az idők folyamán felvetődtek, de igazolásukat nem sikerült rövid időn belül megadni. Évszázadoknak kellett eltelnie ahhoz, hogy valamilyen feleletet tudjunk adni. De még ma sem mindegyikre. Sokuk közül, a négy leghíresebbet említeném meg: 1) az euklideszi párhuzamossági axióma, 2) a nagy Fermat-sejtés, 3) a Goldbach-sejtés, 4) a Riemann-hipotézis.

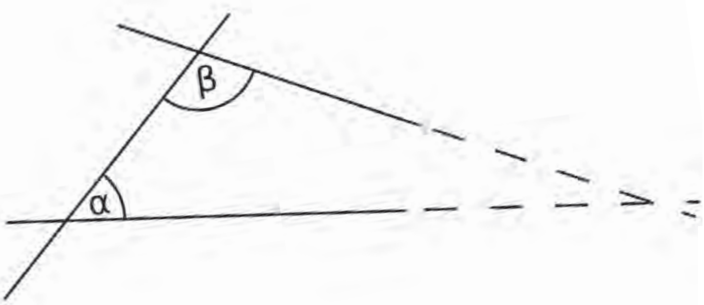
Az első kérdéskör tisztázása több mint 2000 évet vett igénybe. Kr. e. 300 évvel Euklidesz görög matematikus megírja Elemek című munkáját, mely az egyetemes matematikairodalom egyik leghíresebb alkotása. Ebben posztulátumként szerepel egy kijelentés, mely a síkbeli párhuzamos egyenesekre vonatkozik. Ez a kijelentés, melyet ma euklideszi párhuzamossági axiómaként emlegetünk, a vele egyenértékű legegyszerűbb megfogalmazásban így szól: a síkban, bármely rajta kívüli ponton át csak egy őt nem metsző (párhuzamos) egyenest húzhatunk. Mivel ez egy nem azonnal belátható kijelentés, idővel megpróbálták bizonyítani. Az ezzel kapcsolatos erőfeszítések nyomán számos új matematikai felfedezés született, de maga az állítás igazolása makacsul ellenállt. Észrevehető, hogy ahogyan teltek az évszázadok, és közeledtünk a kérdés tisztázásához, a bizonyítási kísérletek száma egyre nagyobb és nagyobb lett. Voltak, akik azzal a tudattal haltak meg, hogy bebizonyították Euklidesz állítását, de haláluk után kiderült, hogy hibásak voltak az érveik. De voltak olyanok is, akik már életükben kénytelenek voltak belátni, hogy próbálkozásaik kudarcba fulladtak. Ilyen volt például Bolyai Farkas is, aki látva sikertelenségét, reményt vesztve jelentette ki: *én a paralelákat akarva megtudni, tudatlan maradtam, életem és időm virágját mind ez vette el*". De Bolyai Farkas, aki fiát, Bolyai Jánost a kezdetektől tanította, igyekezett mindig ezt a kérdést elkerülni. De egyszer mégis elszólta magát. Azt mondta fiának: *„aki ezt a problémát megoldja, akkora gyémántot érdemelne, mint a Föld"*. Az apa akkor nem mérte fel kijelentésének súlyát, de gyermeke lelkében mély nyomot hagyott. Később Farkas valósággal megrémül, amikor a bécsi hadmérnöki akadémián tanuló 18 éves fia az egyik levelében azt írja, hogy ő is foglalkozik a *„paralelák problémájával"*.

1825 februárjában János meglátogatja a Marosvásárhelyen élő édesapját, és bemutatja neki eredményeit. Farkas azt várta, hogy fiának végül is sikerül az euklideszi párhuzamossági axióma bizonyítása. De János kijelentette: 2000 éven át azért nem tudta senki sem igazolni Euklidesz állítását, mert az nem bizonyítható! Tehát nem lehet eldönteni, hogy igaz vagy hamis. Miért nem? — kérdezhette Farkas. Eredményei alapján ezt felelhette János: azért, mert az euklideszi axióma tagadására felépített új geometria pont olyan ellentmondás nélküli, mint ezen az axiómán alapuló euklideszi mértan. Farkas akkor kétkedve fogadta fia válaszát, mivel ő is, akárcsak két évezreden át számos elődje, úgy akarta igazolni Euklidesz állítását, hogy annak tagadásából ellentmondáshoz jutnak, és így az állítás igaz. A matematika professzor Farkas természetesem jól ismerte az euklideszi geometriában gyakran használt *reductio ad absurdum* bizonyítási módszert, mely abban áll, hogy felteszem a bizonyítandó állítás tagadását és abból ellentmondáshoz jutok, tehát a bizonyítandó tétel igaz.

Egy évszázadnak kellett eltelnie ahhoz, hogy véglegesen beigazolódjon Bolyai János akkori zseniális meglátása. Ugyanis Kurt Gödel 1931-ben bebizonyította, hogy lehetetlen teljes és ellentmondásmentes matematikai rendszert felállítani. Eredményeit a következő két állítás foglalja össze: 1) Ha az axiomatikus halmazelmélet ellentmondásmentes, akkor vannak olyan állítások, amelyek nem bizonyíthatók, de nem is cáfolhatók; 2) nincs olyan konstruktív eljárás, amellyel be lehetne bizonyítani, hogy egy axiómarendszer ellentmondásmentes. Ma már a modell-módszer alkalmazásával bizonyítani tudjuk, hogy az euklideszi geometria, a Bolyai-Lobacsevszkij geometria és a valós számok halmazának elmélete közül az egyik akkor és csakis akkor ellentmondásmentes, ha a másik kettő is az. De ezzel is csak viszonylagos ellentmondás-mentességet tudunk igazolni, vagyis egyik ellentmondás-mentességét visszavezetjük a másikéra. Ma már általánosan elfogadottnak tekintjük azt az állítást, miszerint a valós számok halmazának elmélete ellentmondásmentes. A XX. század kiemelkedő matematikusa, André Weil frappáns véleményt adott erre a problémára, amit lehet, hogy a teológusok egy része is elfogad: *„Az Isten azóta létezik, mióta a matematika ellentmondásmentes, az ördög pedig azóta, amióta ezt nem tudjuk bizonyítani"*.

Pierre de Fermat francia matematikus 1637-ben Diophantosz ókori görög matematikus Aritmetika című könyvét olvasva, ennek margójára a következő latin nyelvű megjegyzést írta: *„egy köböt lehetetlen szétbontani két köbre, egy negyedik hatványt két negyedik hatványra, és általában a négyzet kivételével egy hatványt egy ugyanolyan két hatványra. Erre találtam egy csodálatos bizonyítást, de a lapszél túl keskeny ahhoz, hogy befogadja."* Mai megfogalmazásban ez pontosabban így szól: egy természetes szám 2-nél nagyobb hatványát nem lehet felírni másik két természetes szám ugyanolyan hatványú összegeként — azaz a Pitagorasz-tételt nem lehet kiterjeszteni 2-nél nagyobb egész számú hatványkitevőkre. Azóta nagyon sok matematikus kereste ezen állítás bizonyítását, de több mint 350 éven át senkinek sem sikerült megtalálnia a megoldást, pedig az idők folyamán számos pénzjutalom volt kitűzve erre a célra. Ebben az esetben is a próbálkozók több számelméleti tulajdonságot fedeztek fel, de a bizonyítandó tulajdonság makacsul ellenállt. Jelenleg úgy van, hogy az Amerikai Egyesült Államokban élő angol matematikus, Andrew Wiles több évi megfeszített és kudarcokkal is járó munka után — a bírálók szerint — 1995-ben végül is a Fermat-sejtés igazolását megadta. Maga a rendkívül hosszú bizonyítás olyan felfedezésekre épül, melyek Fermat idejében még nem voltak ismertek. Ma is sokan tűnődnek azon, hogy Fermatnak valóban sikerült-e az állítását bebizonyítani, s ha igen, hogyan. A jelenleg 65 éves Andrew Wiles ezután nagyon sok díjban részesült, így például 2016-ban ő kapta az Abel-díjat, amely mellékesen 6 millió norvég korona (kb. 200 millió forint) pénzjutalommal is jár.

Goldbach-sejtés



Az euklideszi párhuzamossági axióma

Maradtak azonban a XXI. század matematikusai részére is szép számban megoldatlan hipotézisek, melyek között híresek a már említett Goldbach-, valamint Riemann-sejtés.

Christian Goldbach német matematikus 1742-ben Leonhard Eulernek írt levelében azt állítja, hogy minden 5-nél nagyobb természetes szám felírható három prímszám összegeként. Euler válaszában leírta, hogy ennek bizonyításához elegendő lenne belátni, hogy *minden páros szám felírható két prímszám összegeként*. Ez manapság az úgynevezett Goldbach-sejtés. Mint mondtuk, a Goldbach-sejtés ma sem bizonyított tény. Minden erőfeszítés ellenére nem találtak rá ellenpéldát, ami eldöntené a kérdés megoldását. A sejtést számítógépekkel is megvizsgálták, és roppant nagy számoknál kisebb számokra igazolták helyességét. De a természetes számok végtelen halmazának részhalmaza, a páros egyenesen helyezkednek el (ahol t valós szám, i pedig az imaginárius egység). Varázslatos jelentőségét sugallmazza az a tény is, hogy David Hilbert, aki 1943-ban halt meg, abban reménykedett, hogy a Riemann-sejtés még életében megoldást nyer, és ugyanezt nyilatkozta egy 2016-ban vele készült interjújában Andrew Wiles is. Minden esetre bízzuk ezt a kérdést a századunkban tevékenykedő matematikusokra. De hogy nem könnyű feladat, az biztos.

Megváltozott a világ. Az elliptikus görbéket — melyeket Wiles is többször használt az említett bizonyításában — manapság a kriptográfiában a modern titkosírások kapcsán használják. Napjainkban az ipari fejlődés igen gyakran a matematikai modellezésen és az optimális eljárásokon múlik. A tudomány és az ipar — főleg a hadiipar — folytonos kihívások elé állítja a matematikát. Bizonyos értelemben a matematika


Bernhard Riemann


Bolyai Farkas


Bolyai János


Christian Goldbach


Pierre de Fermat

számok halmaza is végtelen halmaz, így valamennyiükre igazolni kell a sejtést. Emiatt a Goldbach-sejtés továbbra is nyitott kérdés, annak ellenére, hogy ma sem szűkölködünk számelmélettel foglalkozó matematikusokban.

Úgy tűnik, napjainkban a matematikusok által ostromolt hipotézisek közül a legjelentősebb a Riemann-sejtés. Ezt Bernhard Riemann német matematikus fogalmazta meg 1859-ben az egyetlen számelméleti tárgyú dolgozatában, melyben a Riemann-féle zeta-függvény zérushelyeinek eloszlásával foglalkozik. Ez többek között a prímszámok lehető legegyenletesebb elosztását is állítja. E témával kapcsolatban az olvasónak külön ajánlom Staar Gyula Otthonosan a prímek világában című interjúját, melyet Pintz János matematikussal készített, és a Természet Világa 2016. júliusi számában jelent meg. A Riemann-sejtés kimondja, hogy a zeta-függvény minden nem triviális gyökének a valós része ½. Tehát a nem triviális gyökök a Gauss-féle komplex számsíkban az ½+ti alakú számokból álló, úgynevezett kritikus alkalmazottabb lett, mint valaha. Felmerül a kérdés: vajon okozhat-e ez a tény gondot a tiszta matematika számára? Időnként úgy tűnik, hogy az elméleti matematika kissé háttérbe szorul, legalábbis ami a tudományos támogatásokat illeti. De ma se feledjük David Hilbert kijelentését: *„a matematika éltető eleme a problémák”*.

Most, a legutóbbi nyár egyik délutánján betértem egy kávézóba, hogy megigyak egy hűsítőt. Nemsokára, a mellettem lévő üres asztalnál négy, húsz év alatti fiatal is helyet foglalt. Amint láttam kávét és valami italt kértek. Négyük közül hárman azonnal elővették az okostelefonjukat, és csak azzal foglalkoztak. A negyedik, hogy három társát ne zavarja, csendben figyelte őket és a kávézóba járókat. Miután megitták, amit rendeltek, egy idő után felálltak és távoztak. Kifelé menet kettő még mindig az okostelefonját nyomogatta és simogatta. Én még ülve maradtam néhány percig és elgondolkoztam: ebben a gyorsuló időben milyen lesz ez a világ és az emberek közötti kapcsolat néhány évtized múlva?

WESZELY TIBOR