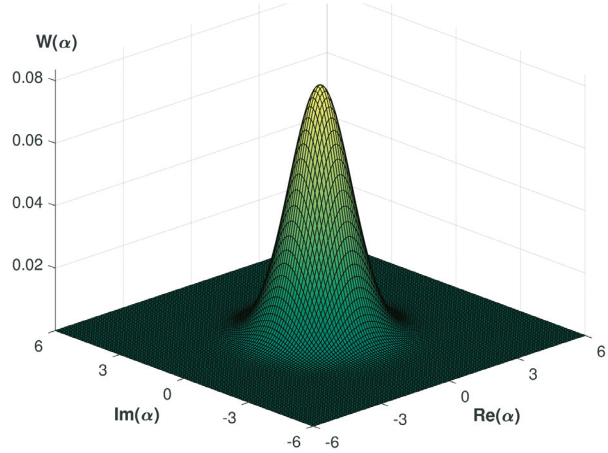
KONIORCZYK MÁTYÁS – KISS TAMÁS – ÁDÁM PÉTER

Wigner-függvények a kvantumoptikában

Wigner Jenő kutatói pályájának kezdete egybeesett a modern kvantumechanika elméletének megszületésével. Wigner 1925-ben fejezte be tanulmányait és szerezte meg doktorátusát Berlinben a Technische Hochschulén, ugyanabban az évben, amikor Werner Heisenberg híres, a mátrixmechanikát bevezető cikke megjelent. A következő években az idős Hilbert asszisztenseként dolgozott Göttingenben, majd 1930 és 1933 között megosztotta az idejét Princeton (USA) és Berlin között. Ezekben az években sok jelentős hozzájárulást tett a kvantummechanika elméleti megalapozásához. Közöttük van a klasszikus statisztikus fizikát és a kvantummechanikát hasonló matematikai alapon tárgyaló Wigner-függvény bevezetése. Írásunkban megkíséreljük bemutatni a Wigner-függvény elméleti hátterét és az utóbbi évtizedekben a kvantumoptikában játszott jelentős szerepét.

A fizika egyik fő feladata a jóslás. Milyen kezdősebességgel és milyen irányban kell egy billiárd- vagy egy puskagolyót elindítani, hogy a kívánt helyre érkezzen? Newton törvényei alapján, ha egy pontszerű test egy egyenes mentén mozoghat, és a rá ható erőket ismerjük, akkor egy adott időpontbeli helye és impulzusa (lendülete) ismeretében meghatározhatjuk, hogyan fog mozogni a továbbiakban, vagy más szóval egy adott idő után hol lesz és milyen sebességgel halad éppen. A mozgásállapot ismerete tehát azt jelenti, hogy minden időpillanatban ismerjük a test helyét és impulzusát, ami a példában szereplő esetben két számmal megadható. Ezt a számpárt ábrázolhatjuk a síkban úgy, hogy az egyik (pl. vízszintes) koordináta a hely legyen, a másik (pl. függőleges) pedig a lendület: ekkor a sík minden pontja egy lehetséges mozgásállapot. A síkot ekkor *fázistérnek* nevezzük. Ha a test térben mozoghat, már nehezebb elképzelni a fázisteret, mivel három koordináta adja meg a helyet, az impulzusnak pedig szintén három komponense van (vagyis a rendszernek három szabadsági foka van), az ábrázoláshoz már hat független irány kell, a fázistér tehát hat dimenziós. Ha több, mondjuk N darab, pontszerű test mozog a térben, egyenesen 6N dimenziós teret kell használnunk, amit elképzelni nyilván nem tudunk, de használata sok előnnyel jár: ilyenkor a teljes rendszer mozgásállapotát egyetlen pont pontosan leírja. Ha valamilyen okból nem tudjuk a rendszer pontos állapotát, ami a *statisztikus fizikában* jellegzetes eset, akkor az állapot helyett csak a különböző állapotok valószínűségét adhatjuk meg: egy fázistérbeli *valószínűségsűrűség-függvényt*. Ebből az egyes szabadsági fokok valószínűségsűrűség-függvénye is meghatározható.

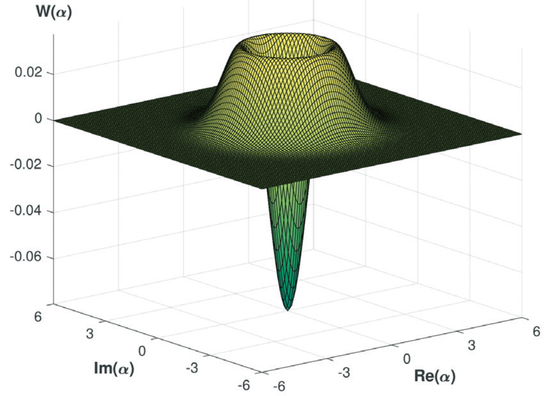
A fázistér azonban nem csak tömegpontok, pontrendszerek esetén hasznos megközelítés. A fényhullámok kapcsán általában a hullámok térbeli leírása az adott geometria (pl. lézer rezonátor-ürege, haladó fényhullámok) alapján meghatározható módusfüggvényekkel történik. A módusfüggvények a klasszikus Maxwell-egyenletek megoldásai, amelyek kielégítik a határfeltételeket és polarizációs tulajdonságaik is rögzítettek. Ha ezeket meghatároztuk, minden egyes ún. módushoz már csak az időbeliséget kell tárgyalni, ami matematikailag azonos egy pontszerű, vonal mentén adott frekvenciával rezgő test tárgyalásával, ahol a hely és az impulzus szerepét a módus úgynevezett *kvadratúrái* töltik be, mint mérhető mennyiségek. A módushoz tartozó két kvadratúrát gyakran egy komplex szám valós és képzetes részének tekintik, ez a fényhullám komplex amplitúdója. A komplex amplitúdó (ez általában *görög alfával* jelölik) abszolút értékének négyzete a fénymódus energiája, ami arányos a fény intenzitásával. A sok módusú fény sok szabadsági fok leírására vezethető vissza. A fázistér használata ebben is hasznosnak bizonyul, ilyenkor egy módus fázisterét azonosíthatjuk a komplex számok síkjával.



1. ábra. A vákuum Wigner-függvénye a fázistérben

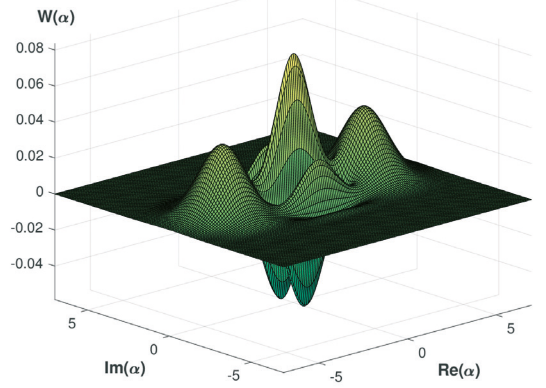
A XX. század korszakalkotó felfedezése, a kvantummechanika, megváltoztatta a fizikában addig általánosan elfogadott determinisztikus világképet. A véletlen jelenségeket korábban inkább pontatlanságból eredő bizonytalanságnak tekintették, azonban a Max Born által javasolt szabály szerint a rendszert legjobban leíró hullámfüggvény csak mérési eredmények valószínűségét tudja megjósolni. Wigner Jenő közvetlenül a kvantummechanika alapösszefüggéseinek kidolgozása után, 1932-ben javasolt egy matematikai képletet egy fázistérben értelmezett függvényre [1], amelyről lábjegyzetben megjegyezte, hogy „*E matematikai kifejezést Szilárd Leó és a jelen szerző közösen találták néhány évvel ezelőtt, más célból.*”. A javasolt függvényt később Wignerről nevezték el, bár ő élete végéig szerényen tiltakozott nevének ilyen használata ellen. A Wigner-függvény nagyon hasonlít egy fázistérbeli valószínűségsűrűség-függvényre. Egy pontszerű, egy dimenziós potenciálban mozgó részecske esetén a szokásos módon számítható ki belőle annak a valószínűsége, hogy a részecske egy adott hely közelében tartózkodik (görbe alatti terület, egy vertikális végtelen sávban), vagy, hogy egy adott impulzusérték körül van a lendülete (görbe alatti terület egy horizontális végtelen sávban). Ha azonban az előbbi két kérdést egyszerre tennénk fel, akkor a két sáv metszetét alkotó kis téglalapban kellene megkeresnünk a görbe alatti területet. Ekkor azonban egy matematikainak tűnő problémába ütközünk: a Wigner-függvény lehet negatív is, ezáltal pedig egy megfelelően kicsi téglalapot kiválasztva a görbe alatti terület is negatív lesz. Vagyis, ha egyszerre szeretnénk nagyon pontosan rákérdezi a részecske helyének és impulzusának az értékére, akkor ellentmondásra jutunk. A kvantummechanikában ez egy jól ismert jelenség, ugyanezt fejezi ki a Heisenberg-féle határozatlansági reláció: a kvantummechanika nem enged meg olyan eljárást, amivel egy részecske helyét és impulzusát egyszerre nagyon pontosan megmérhetnénk. Ugyanakkor, ha szélesebb sávokat választunk, vagyis megfelelően nagy bizonytalanságot engedünk meg a hely illetve az impulzus mérésekor, akkor az így keletkező nagyobb téglalapon a Wigner függvény negatív és pozitív részei kiegyenlítik egymást és összességében pozitív görbe alatti területet kapunk. Ez összhangban van azzal, hogy a Heisenberg-féle határozatlansági reláció nagyobb bizonytalanságú közös hely- és impulzusmérést már megenged, egy ilyen mérés eredményének a valószínűségét adja meg az előbbi szám.

Az egyik legegyszerűbb, érdekes fizikai rendszer a harmonikus oszcillátor. Például, ha a kitéréssel arányos visszatérítő erő hat egy tömegpontra, mondjuk egy rugóra erősített testre, amikor egyensúlyi helyzete körül rezeg. A rezgő elektromágneses mező, így a fény egy módusát is egy harmonikus oszcillátorral írhatjuk le általános esetben szabad térben. Ilyenkor a hely és a lendület szerepét a kvadratúrák veszik át. A következőkben vizsgáljuk meg néhány érdekes állapot Wigner függvényét. Az **1. ábrán** a vákuum Wigner függvénye látható: egy harang alakú görbe. A kvadratúrák mérésekor tehát véletlen értékeket kapunk, átlagosan nulla intenzitásértékkel, de jól meghatározott zajjal mindkét kvadratúrában. Hasonló, véletlen zajjal rendelkező klasszikus statisztikus állapotot is el tudunk képzelni. Ugyanakkor a klasszikus fizikához szokott észjárással meglepő, hogy a vákuumban sem pontosan nulla a mennyiségek értéke: itt is jelen van az említett zaj: az úgynevezett vákuum-fluktuáció. A lézerfény kvantumállapota egy hasonló harang alakú függvény, de már nem a nulla amplitúdóérték körül: középpontja éppen a fény komplex amplitúdója. Ez az ún. koherens állapot, amely még mindig értelmezhető klasszikusan is. A következő, **2. ábrán** az egyfoton állapot Wigner-függvényét ábrázoltuk. (Ez a



2. ábra. Egy foton Wigner-függvénye

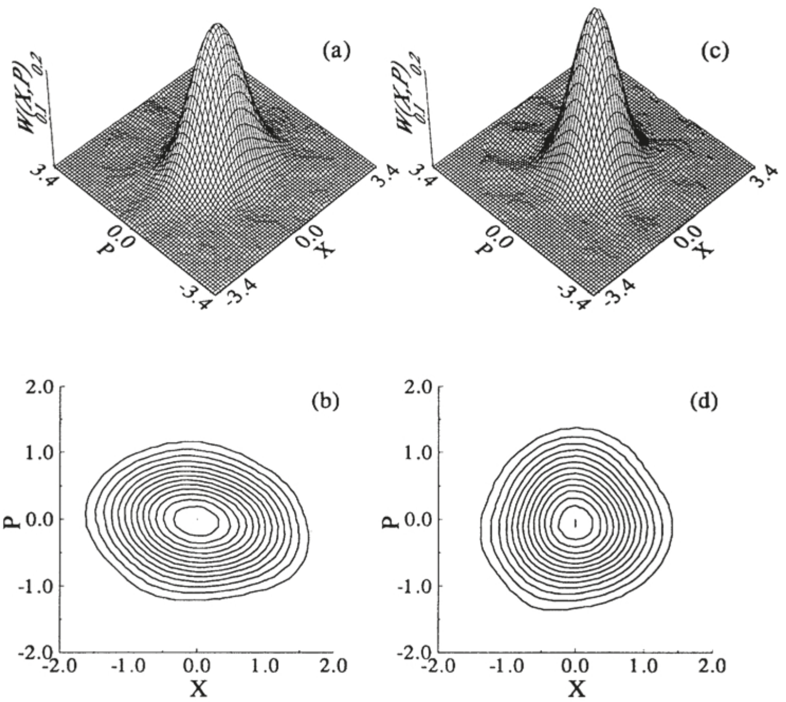
fény azon kvantumállapota, amiről tudjuk, hogy a módusban pontosan egy fényrészecske, *foton* található.) Jól látható, hogy a függvény negatív értékeket vesz föl az origó körül, vagyis ilyen valószínűségsűrűséggel leírható klasszikus állapot nem létezhet. A nemklasszikus kvantumállapotok előállítása fontos feladat a kvantumoptikában. Az elmúlt néhány évtizedben folyamatosan fejlődtek az ilyen irányú kísérletek, de a jól meghatározott fotonszámú, stabil és kontrollált fényforrás megalkotása ma is kihívást jelent. Egy



3. ábra. A Schrödinger-macska-állapot Wigner-függvénye

másik érdekes nemklasszikus állapot látható a **3. ábrán**. Két koherens állapot egyszerre van jelen, ún. szuperpozícióban, vagyis a Wigner-függvényük nem egyszerűen a valószínűségek összege, hanem bonyolult hullámokat vet a két haranggörbe között, negatív értékeket is fölvéve. Ez az állapot emlékeztet Erwin Schrödinger híres gondolatkísérletére, ahol egy macska az élő és a halott állapot szuperpozíciójába kerül. A két koherens állapot külön-külön ugyanis makroszkópikusan megkülönbözthethető, klasszikus állapot (v.ö. élő ill. halott macska). Ilyen állapotok előállításáért kapta meg a Nobel díjat 2012-ben Serge Haroche [2] és David J. Wineland [3]. A szuperpozíciós elv megjelenését a Wigner-függvényekben fázistérbeli interferenciának is szokták nevezni [4]. Néhány koherens állapot szuperpozíciójával a fény szinte tetszőleges kvantumállapota jól közelíthető lenne [5].

A kvantumoptikai kutatások másik fontos aspektusa az előállított nemklasszikus állapotok pontos mérése. A Wigner-függvény itt is fontos szerepet játszik, hiszen mint láttuk egyfajta vizuális névjegyet ad a kvantumállapotról. Láttuk azonban, hogy a kvantummechanika egyrészt alapvetően tartalmazza a véletlen jelenségét, másrészt bizonyos mennyiségek együttes, pontos mérését kizárja. Egy kvadratúra különböző értékeinek valószínűségét azonban megmérhetjük, elvileg tetszőleges pontossággal, és így a Wigner-függvény alatti területeket kapjuk, a megfelelő koordinátatengelyre merőleges vékony csíkokban, vagyis egy vetületet. Az állapotot kissé elforgatva újabb vetületet mérhetünk ki. Az összes vetületből meghatározható maga a Wigner-függvény is. Az eljárás teljesen analóg az orvosi tomográfiával, ahol röntgen sugarak segítségével vesznek föl vetületeket a test egy síkjáról, különböző irányokból, ezért az előbbi eljárást kvantumtomográfiának is nevezik. Az optikai kvantumtomográfia a 1990-es évek elején vált kísérletileg



4. ábra. Kvantumoptikai mérésekből rekonstruált Wigner-függvények: a) és b): összenyomott vákuumállapot, c) és d): vákuumállapot [6]

is elérhetővé. A **4. ábrán** a vákuum és egy másik érdekes állapot, az ún. összenyomott vákuum Wigner-függvényének optikai kísérletekből rekonstruált képét láthatjuk [6]. Ez utóbbi egy *torzított* haranggörbe: bár a kvadratúrák várható értéke ekkor is nulla, az egyik kvadratúra bizonytalansága csökkent, míg a másiké megnőtt, továbbra is kielégítve a Heisenberg-féle határozatlansági relációt. Az egyik mennyiség zaja tehát furcsamód még kisebb, mint vákuumban lenne! (Ennek az ára persze, hogy a másik mennyiség viszont valamivel zajosabb.) Az összenyomott állapotok kissé nemklasszikusak (Wigner-függvényük pozitív) és praktikusan optikai nemlineáris kristályokkal lézerfényből előállíthatóak. Jelentős szerepet játszanak a kvantumoptikában és a nagy pontosságú méréstechnikában. A kvantumtomográfia eredeti gondolata gyümölcsözőnek bizonyult más fizikai rendszerek állapotának megismerésében is. Különféle általánosításokkal lehetővé vált más szerkezetű kvantumrendszerek teljes állapotának feltérképezése is, amit gyakran szintén kvantumtomográfiának hívnak, bár az alkalmazott matematikai módszerek eltérőek lehetnek.

A kvantumoptika kísérleti technikáinak fejlődése a XX. század végére radikális változást eredményezett a kvantummechanika jelentőségének értelmezésében. A kvantummechanika által leírható dolgok nem kézzelfoghatóak. Egy hétköznapi helyzetben csupa olyan dolgok vesznek minket körül, amelyek nagyon sok részecskéből állnak. Sokáig úgy gondolták, a kvantummechanika megfigyelhető következményeit végül mindig részecskék sokaságában kell keresni. Napjainkra azonban lehetővé vált akár egy-egy *egyszerű kvantummechanikai rendszer*: fényrészecske vagy atom *közvetlen* megfigyelése, manipulálása. Ezáltal bebizonyosodott: a kvantummechanika valóban az egyes részecskék viselkedését is helyesen leíró elmélet! Nem mellékesen ez a fejlődés alkalmazások: a kvantumtechnológiák, köztük a kvantum-kommunikáció, -titkosítás és a kvantumszámítógépek elveinek kidolgozásához is vezetett. Kvantumtitkosító eszközök már kaphatók is. Ezek olyan titkosított kommunikációt tesznek lehetővé, amelynek biztonságát lényegében a Heisenberg-féle határozatlansági reláció garantálja, vagyis lehallgatásukhoz azt kellene megsérteni. Megvalósítás szempontjából jóval nehezebb, még gyerekcipőben járó technológia a kvantumszámítógépeké, de a benne lévő ígéret is hatalmas: olyan számítások elvégzését tennék lehetővé, melyek a szokásos digitális számítógépekkel lehetetlenek. Ilyen például a nagy számok prímfaktorizációja (mellyel számos ma divatos titkosítás feltörhető lenne), vagy a különféle, gazdasági szempontból is lényeges nagyméretű optimalizálási feladatok. Fontos, részben még nyitott kérdés mindezzel kapcsolatban, hogy mi a számítások kvantumos gyorsulásának alapvető erőforrása, milyen kvantumállapotokkal és rajtuk milyen műveletekkel érhető el az. Ezzel a kérdéssel kapcsolatban a Wigner-függvények használata érdekes eredményeket hozott. (Mivel a számítógépek állapotainak halmaza véges, a Wigner-függvények bevezetése ebben az esetben speciális matematikai megfontolásokat is igényel, amelyekre itt most nem térünk ki.) Logikusnak tűnik ugyanis, hogy ha a számítást végző eszköz állapota mindvégig pozitív Wigner-függvényekkel írható le, akkor a számítás klasszikusan is szimulálható, vagyis nem számíthatunk kvantumos gyorsulásra. És valóban: a közelmúltban többen (pl. Galvão, vagy V. Veitch és mtsai., stb.) rámutattak, hogy a számítások kvantumos gyorsulásához szükség van arra, hogy a résztvevő kvantumállapotok Wigner-függvénye egyes tartományokban negatív legyen [7]. Szilárd és Wigner ötlete tehát a XXI. század kvantumtechnológiáinak megértésében is fontos szerephez jut.

Irodalom

[1] Wigner, Eugene. „On the quantum correction for thermodynamic equilibrium." Physical review 40.5 (1932): 749.

[2] Haroche, Serge. „Nobel Lecture: Controlling photons in a box and exploring the quantum to classical boundary." *Reviews of Modern Physics* 85.3 (2013): 1083.

[3] Wineland, David J. „Nobel Lecture: Superposition, entanglement, and raising Schrödinger's cat." *Reviews of Modern Physics* 85.3 (2013): 1103.

[4] Schleich, W. P. (2011). *Quantum optics in phase space*. John Wiley & Sons.

[5] Janszky, J., Domokos, P., Szabó, S., & Ádám, P. (1995). Quantum-state engineering via discrete coherent-state superpositions. *Physical Review A*, *51*(5), 4191.

[6] Smithey, D. T., Beck, M., Raymer, M. G., & Faridani, A. (1993). Measurement of the Wigner distribution and the density matrix of a light mode using optical homodyne tomography: Application to squeezed states and the vacuum. *Physical review letters*, *70*(9), 1244.

[7] Galvão, E. F. (2005). Discrete Wigner functions and quantum computational speedup. *Physical Review A*, *71*(4), 042302.; Veitch, V., Ferrie, C., Gross, D., & Emerson, J. (2012). Negative quasi-probability as a resource for quantum computation. *New Journal of Physics*, *14*(11), 113011.