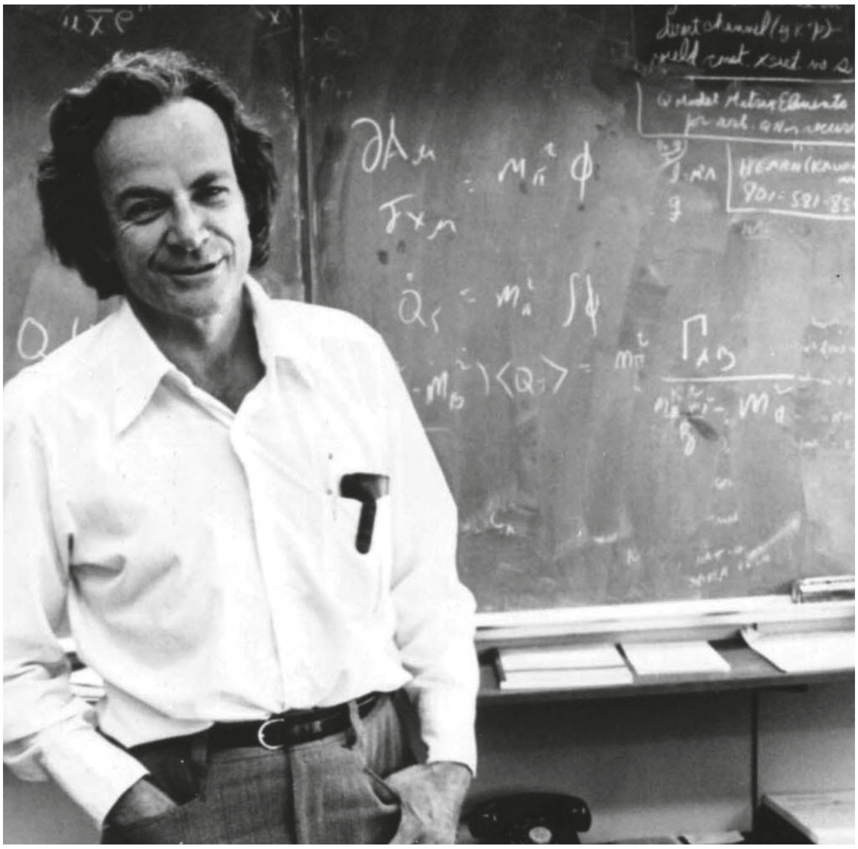
SOLT GYÖRGY

Matematika és a természettudományos megismerés

A matematika hosszú története mutatja, hogy gondolatok, melyek először csak komolytalan fantázia-szüleményeknek tűntek, végül is alkalmasnak bizonyultak egy sor valóságos, fontos probléma megoldására.
(S. Ulam)

„A matematika óriási hatékonysága a természettudományokban rejtély, amire nincs racionális magyarázat”, állapította meg *Wigner Jenő* 1960-ban megjelent írásában [1], amely – talán éppen ez volt a célja – tudományos körökben élénk visszhangot váltott ki. Tanulmányában Wigner kifejti, mennyire nehéz vagy éppen lehetetlen meggyőző magyarázatot adni arra, hogy az *emberi képzelet* alkotta, elvont fogalmakat és konstrukciókat használó matematika „meghökkentően” jól alkalmazható a valóság, a természet leírásában. A fizikus *Feynman* szerint is „teljesen elképesztő, hogy a matematikával előre meg lehet mondani, mi fog történni a világban, pedig a matematika olyan szabályokat követ, melyeknek *semmi közük* ahhoz, ami a valóságban végbemegy” [2].

Valóban elképesztő? Hiszen a korai geometria és aritmetika elemi fogalmai (számok, formák) eredetileg jórészt éppen a valóság megfigyelésén alapultak. Az is igaz, hogy a matematika több területén később is – a XIX. századi matematikus-fizikus *Fourier* szavaival – „a természet vizsgálata a matematikai felfedezések legtermékenyebb forrásának” bizonyult. (Például Newton a gravitáció és a mechanika vizsgálata során alkotta meg a differenciál- és integrálszámítást). Akkor miért ne lenne alkalmas a matematika ma is a valóság leírására?



Elképesztő, hogy a matematika megmondja, mi fog történni a világban... *(Richard Feymann)*

Azért, állítja Wigner, mert a modern matematika fogalmait a kíváncsi matematikus képzelete már régóta *egyedül* azzal a céllal alkotja, hogy ezek a fogalmak és a velük ötletes műveletek segítségével felépített struktúrák *matematikai értelemben szépek*, tehát érdekesek, általánosak, gondolatébresztők legyenek (Wigner *Polányi Mihályt* idézi: „a matematika legnyilvánvalóbb vonása az, hogy érdekes”.) Joggal találhatja tehát meglepőnek nemcsak a laikus, de a Nobel-díjas fizikus is, hogy egy csupán „tiszta” matematikai szempontból érdekesnek és szépnek ítélt gondolati konstrukció alkalmas lehet, mégpedig sok esetben láthatóan *egyedül* alkalmas arra, hogy megvilágítsa az atomok vagy égitestek világában, tehát a *valóságban* lejátszódó jelenségek törvényszerűségeit. És azt még inkább, hogy a „szép” formula felfedezéseket is megjósolhat. Az elektromágneses hullámok létezését előrejelző Maxwell-egyenletekről például a felfedező *H. Hertz* így ír: „… elkerülhetetlenül úgy érezzük, hogy ezek a matematikai formulák önállóan léteznek…, hogy okosabbak még felfedezőjüknél is, és hogy többet nyerünk ki belőlük, mint amennyit szerzőjük eredetileg beléjük tett” [3]. Az elemi részek fizikájában nem is egyszer ugyancsak a „formula” jósolt meg hiányzó, később felfedezett új részecskéket.

Egy matematikai érdekességéért konstruált, de végül a modern fizikában is már nélkülözhetetlen fogalom példájaként említi Wigner a komplex számokat. A gondolat a reneszánsz kori olasz matematikus, *Bombelli* fejében született. Bombelli az algebra harmadfokú egyenletének (tehát a „tiszta matematika” egy belső problémájának) vizsgálatakor jutott arra a „vad gondolatra”, hogy a megoldás érdekében érdemes a valós számok mellett új, *képzetes* számokat is *elgondolni*, amelyek ugyan négyzetre emelve negatív eredményt adnak, és ezért nyilvánvalóan „álságosak, haszontalanok”, de emellett mégis érdekesek és szépek, mert velük már minden négyzetgyökvonás elvégezhető, és ráadásul éppúgy lehet összeadni, szorozni, osztani őket, mintha „rendes” számok lennének. A kíváncsiságból, intellektuális játékból kitalált, képzetes részt is tartalmazó (komplex) számok tették lehetővé a matematikában nagyjelentőségű komplex analízis megalkotását. De a komplex számok idővel a fizikában is fontossá, sőt nélkülözhetetlenné váltak. Mégpedig nem csak mint „alkalmazott matematikai” segédeszközök, mert *alapvető* szerephez jutottak a mikrovilág jelenségeit leíró kvantumfizikában: komplex számok nélkül a kvantumelmélet egyáltalán nem létezhetne.

Az univerzum könyve a matematika nyelvén íródott... ***(Galileo Galilei)***

Hasonló a helyzet a Wigner által (nyílván szerénységből nem említett) csoportelmélettel, melynek a modern fizikában elfoglalt helyét jórészt éppen az ő munkái jelölték ki. A csoportelmélet megalkotása a XIX. század első harmadában élő matematikus, *Galois* nevéhez fűződik, aki ennek segítségével megtalálta az algebrai egyenletek megoldhatóságának századok óta intenzíven keresett, általános feltételét. Ezzel az ötöd- és magasabb fokú egyenletek kérdése megoldódott, de az elmélet a matematika több más területén is fontosnak bizonyult. És nemcsak ott, hanem a modern fizikában is: a Lorentz-csoport alapvető fogalom a relativitáselméletben, a csoportelmélet szükséges az atomspektrumok megértéséhez, nélkülözhetetlen eszköz a molekularezgések osztályozásában, a kondenzált anyag szerkezetének, dinamikájának és fázisátalakulásainak vizsgálatában, az elemi részek fizikájában egyaránt.

A tiszta matematika egy érdekesnek látszó kérdése inspirálta Galois kortársát, a matematikus-fizikus *Hamiltont* is: lehet-e a komplex számoknál is „komplexebb”, de algebrailag hasonlóan szép rendszert alkotó számokat konstruálni. Lehet, és Hamilton meg is találta a már négydimenziós *kvaterniókat* és a köztük fennálló különös műveleti szabályokat, megalkotva ezzel az újszerű, mert nemkommutatív kvaternióalgebrát (ahol az eredmény a szorzótényezők sorrendjétől is függ). Hamilton aligha gondolta, hogy csupán matematikai érdekességűnek tekintett felfedezésének és a később megtalált hasonló algebrai struktúráknak közük lehet a fizikai valósághoz, mégpedig éppen az akkor még ismeretlen, de nagyon is valóságos *elektronok* viselkedéséhez. Csak nyolc évtizeddel később, a fizikus *Pauli* és *Dirac* munkái mutatták meg, hogy azok a matematikai objektumok (kvantumfizikai operátorok), melyek az elektronspin (perdület) atomi spektrumokban látható viselkedését jellemzik, éppen ilyen nem-kommutatív algebrát valósítanak meg.

A matematika fogalmainak, módszereinek a csillagászatban, fizikában tapasztalt egyedülállóan sikeres alkalmazhatóságát már *Kepler*, *Galilei* és *Newton* is lenyűgözően csodálatosnak, de ugyanakkor *természetesnek* is tekintette. Hiszen Galilei szavaival: „… az univerzum [könyve] a matematika nyelvén íródott, … ennek a nyelvnek az ismerete nélkül egy szót sem értünk belőle”. A kulcsszó az *íródott*: a teremtésben hívő tudós számára az egész matematika már eleve létezik, *beleírva* az univerzum jelenségeibe, a szerencsés kutató csak *rátalál* ezekre a természetben már meglévő matematikai formulákra. A megtalált természeti törvények matematikai szépsége és egyszerűsége (a bolygópályák szabályos ellipszisei, az általános tömegvonzás törvénye) csak megerősítették őket ebben a hitben. „Milyen megnyugtató látni ezeket az oly szép és egyszerű törvényeket”, lelkendezett például a newtoni mechanikát továbbfejlesztő matematikus-fizikus *Maupertuis*, „ezek talán az egyedüli törvények, melyeket a dolgok teremtője alkotott azért, hogy működésben tartsa látható világunk valamennyi jelenségét”.

A matematika óriási hatékonysága rejtély... ***(Wigner Jenő)***

Maupertuis ezt bizonyára kielégítő válasznak tekintené Feynman bevezetőben idézett szavaira. A matematika és a természettudományok kapcsolatát egy ilyen (mai szóval) „intelligens tervezőre” visszavezető magyarázatait a csillagász-fizikus *Jeans* a múlt század elején röviden így foglalta össze: „az univerzum Nagy Építésze nyilvánvalóan matematikus”.

Ha azonban nem feltételezünk univerzumunkat megalkotó intelligens tervezőt, újra kell gondolnunk a természeti jelenségek és a leírásukra mindeddig jól bevált ember alkotta matematika „elképesztően” szoros viszonyát. Mert a teremtés dogmájától eltekintve is úgy tűnhet, hogy a matematika (a kortárs fizikus *Dysont* idézve) „bele van szőve” az univerzum anyagába. Ez a benyomás különösen erős akkor, amikor a matematika előresiet, amikor már jó előre készen áll az a matematikai fogalom vagy struktúra, ami egy későbbi fizikai felfedezés magyarázatához szükséges lesz. A kvantumfizika megalkotói, *Heisenberg, Born*, *Dirac* elő tudták venni a matematika meglévő fogalomtárából a számukra fontos mátrix-algebrát, *Einstein* is készen kapta az előző évszázad matematikájától az általános relativitáselmélet megalkotásához nélkülözhetetlen analitikus eszközt, a görbült terek differenciálgeometriáját. A fizikus *Weinberg* hasonlatával: „szinte kísérteties, amikor a fizikus észreveszi, hogy a matematikus már ott járt… olyan ez, mintha az űrhajóból kilépő Armstrong már ott találta volna a Hold poros talaján [a holdutazást megálmodó] *Verne Gyula* lábnyomát” [4].

Minthogy a matematikával „az esetek bámulatosan nagy részében elképesztő pontossággal írható le a jelenségek egész osztálya, nehéz elkerülni azt a benyomást, hogy itt egy csodával állunk szemben”, olvassuk Wignernél. Aki ugyanakkor mégis felvet néhány gondolatot, melyek *megkérdőjelezhetik* ennek a benyomásnak a jogosultságát, illetve segíthetnek megérteni, miben rejlik a matematika gyakran csodának tűnő alkalmazhatóságának magyarázata. A hatékonyság benyomása például illúziónak tűnhet, ha meggondoljuk, hogy a matematika hatalmas épületének csak nagyon kis része az, amelyik eddig a természeti törvények megfogalmazásában alkalmazást nyert. Ráadásul ezt a viszonylag kevés matematikai konstrukciót sem véletlenül választja ki a fizikus, hanem gyakran már maga is önállóan eljutott a megfelelő formulához (ahogyan Heisenberg is a mátrix-műveletekhez), és csak utólag tudja meg, hogy ez a matematikában jól ismert. Tény az is, hogy egy megtalált természeti törvény általában csak korlátozott érvényű közelítés, a pontosabb adatok birtokában módosításra, kiegészítésre szorul vagy újjal pótolandó.

A Wigner által felvetett tudományfilozófiai kérdésre időközben fizikusok, tudománytörténészek, filozófusok keresik a választ. Egy matematikus-fizikus konferencián például Weinberg megemlíti a rendkívüli hatékonyság „naturalista” magyarázatát [4]: „mivel a matematikus ezen a világon él, tudatosan és *nem tudatos módon* is állandóan érzékeli, hogyan működik a világ, és amikor dolgozik, ezek a nem-tudatos tapasztalatok mélyen befolyásolják”. Személyesen azonban úgy véli, hogy ezt így általánosan nehéz elfogadni, például „igazán nehéz átlátni, hogy *Galois* csoportelméleti munkája hogyan nőtt ki bármilyen olyan tapasztalatból, melyet ő az univerzumban uralkodó fizikai törvényekről szerzett”. Ezért egy másik érvelést is vázol: a fizikában megis-

Ezek a matematikai formulák önállóan léteznek... *(Heinrich Hertz)*

mert természeti törvények bizonyos egyszerűséget, szimmetriákat, rendezettséget mutatnak, és mivel a matematika egyebek között éppen a különféleképpen rendezett struktúrák tudománya, valószínű is, hogy a matematikus (Wigner által is hangsúlyozott) *nagyszámú* struktúrája közül némelyik éppen ráillik arra, amit a fizikus természeti törvényként tapasztal.

A tudományfilozófus *Mark Steiner* éppúgy, mint Wigner, csodálnivalónak tartja a matematika hatékonyságát a természetleírásban, de ennek okát nem a külvilág emberi gondolkodást befolyásoló hatásában látja [5]. Szerinte ez a hatékonyság inkább annak a jele, hogy világunk *éppen egy olyan univerzum* (a sok elképzelhető közül), amelyik fizikai tulajdonságait tekintve barátságos (*user-friendly*) az emberi megismerés számára: „amit mi szépnek és hasznos szellemi alkotásnak tartunk, ott található megvalósulva a természetben”.

(Hasonlóan „emberszempontú”, *anthropic* érvelés a kozmológiában a *fundamentális természeti állandók* (elemi töltés, fénysebesség) értékével kapcsolatban merült fel először. Mivel a fundamentális állandóknak a meglévőtől csak *alig eltérő* értékei esetén szerves molekulák, tehát élet sem jöhetett volna létre, nem kétséges, hogy „finoman hangolt” állandóival a mi univerzumunk az ember számára valóban egyedülálló módon barátságos.)

Wigner szerint a különböző teológiai, metafizikai, a gondolkodást befolyásoló külső tényezőkre vagy véletlenre hivatkozó érvelések nem változtatnak azon a tényen, hogy meggyőző természettudományos, *racionális* magyarázat híján a matematika hatékonysága a fizikus számára rejtély maradt. Márpedig a XX. század fizikájában, elsősorban a kvantumelméletben megjelenő rendkívül absztrakt matematikai konstrukciók (operátor-algebra, függvényterek) sikeres alkalmazása különösen aktuálissá teszi, hogy ezen a rejtélyen elgondolkozzunk.

Ezt a meggyőződést fejezi ki Wigner tanulmányának egyébként száraz tudományos nyelven írt szövegében a szokatlanul személyesnek ható, óvatosan optimista végkövetkeztetése: „A matematika alkalmassága a fizikai törvények megfogalmazására olyan csodálatos *ajándék*, amit nem értünk és nem is érdemlünk meg. Legyünk hálásak érte, és reméljük, hogy ez [a hatékonyság] a jövőben is megmarad, és örömünkre vagy éppen elképedésünkre kiterjeszthető lesz az emberi megismerés más területeire is.”

A cikk a szerzőnek a Természet Világa 2017. májusi számában megjelent „Miért tudják az elektronok a matematikát?” című írása alapján készült.

Irodalom

[1] A matematika meghökkentő hatékonysága a természettudományokban, Wigner Jenő válogatott írásai, szerk. Ropolyi László, Typotex, 2005.

[2] R. P. Feynman, A fizikai törvények jellege, Akkord, 2005.

[3] idézi F. J. Dyson in The Mathematical Sciences, ed. National Research Council, M.I.T.Press 1969.

[4] S. Weinberg, Notices of the American Mathematical Society, 33.5, 1986.

[5] M. Steiner, The Applicability of Mathematics as a Philosophical Problem, Harvard University Press, London 1998.