

SURÁNYI LÁSZLÓ

A matematika levegője és a légszomj

róluk majd később) ugyanis azt írják az előszavukban, hogy a feladatok részben „matematikai folyóiratokból, néha azok legfrissebb számaiból származnak”. A könyv 1954-ben jelent meg oroszul, s kb. kétharmada kombinatorikai és elemi valószínűségszámítási feladatokról áll. (Itt érdemes megjegyezni, hogy gráfelméleti feladatok csak elvétve és csak „áruhában” szerepelnek.) Egy további fejezet az integrálszámítás elemeibe vezet be. S valóban: mindez abban az időben nagyon modernnek számított. Akkoriban még szokás volt – főleg Európa keleti, ún. „szocialista” részén – például a kombinatorikát nehéz, a középiskolában nem tanítandó anyagnak tartani. És épp a fenti emlékeim is jól illusztrálják, hogy nálunk még ennél is kedvezőtlenebb volt a helyzet. A kombinatorika és a gráfelmélet még az egyetemi szinten is – meglehetősen atavisztikus és abszurd módon – „nonkonformnak” számított. A kombinatorikához való akkori retrográd viszony következményeit még ma is nyögjük, a középiskolai tananyag még ma sem igazán lép túl azon a hiedelmen, hogy a kombinatorika tanítása a skatulyaelv legegyszerűbb formáinak, majd a variáció, a kombináció és a permutáció fogalmának és képleteinek megtanításával letudható. Jaglomék könyvében viszont – s a valódi kombinatorikai szemléletünknek ez felel meg – bőven szerepelnek például a kombinatorikai geometriából vett feladatok is. (Bőven szerepelnek a binomiális együtthatókra vonatkozó feladatok is – ezek így önmagukban kissé száraznak tűnnek. Ezt ellensúlyozza, hogy több ilyen összefüggést a nálunk kevésbé ismert *faktoriális binomiális tétel*ből vezetnek le a szerzők.)

A két Jaglom

S most még egy pillanatra visszatérve a múltba és a „Jaglom” névhez: *I. M. Jaglom* nevét nálunk az ún. „Sklyarszkij-Csencov-Jaglom” feladatgyűjtemény-sor tette ismertté. A híres feladatgyűjtemények valahogy így jöttek sorba időben: a(z Eötvös, majd 1945 után) Kürschák-versenyek feladatait és megoldásait tartalmazó Kürschák–Neukomm–Ha-



jós–Surányi-féle *Matematikai versenytételek*, aztán az országos középiskolai matematikai versenyek évente-kétévente megjelenő ismertetései, s utána jöttek ezek a szovjet feladatgyűjtemények, amelyeket néha csak Sklyarszkijként, néha csak Csencov–Jaglomként emlegettek. (A magyar Wikipédia ma sem tud egyik névről sem!) Jó ideig e felsoroltak voltak a legszínvonalasabb verseny-felkészítő feladatgyűjtemények. Az sem csupán legenda volt, hogy aki a Sklyarszkij–Csencov–Jaglom feladatait „végigcsinálja”, annak jó esélye van az OKTV-n az első tízbe kerülni. Kevésbé közismert *Iszaak Mojszejevics Jaglomnak* egy másik, magyarul is megjelent könyve, *A Galilei-elv és egy nemeuklideszi geometria*. A most – több, mint hatvan év késéssel – magyarul megjelent feladatgyűjteményt azonban nem egy, hanem két Jaglom jegyzi, atyai nevük alapján is láthatóan testvérpárról, valójában ikerpárról van szó. Itt tehát az ikerpár matematikailag súlyosabb „másik” tagja is társszerző (s ennek felel meg a feladatok némelyikének „súlyossága” is). Mint a fordító, *Schultz György* is megjegyzi előszavában, a kötet feladatainak jó része más felosztásban szerepelt egy, a mi időnkben használt, az *Elemi matematika* címet

viselő egyetemi jegyzetsorozat IV. és V. kötetében, ez a két jegyzet azonban ma már nehezen elérhető.

A címről

A kötet címe tehát: *Nem elemi feladatok elemi tárgyalásban*. És valóban sok olyan feladatot találunk a könyvben, amelyet még ma sem neveznénk eleminek. Így például a befejező részben a szerzők részletesen ismertetik Csebisev híres tételeit a prímszámok eloszlásáról és Mertensnek a prímszámok reciprokösszegeivel kapcsolatos tételeit. Utóbbiakat nálunk név nélkül szokták közölni és bizonyítani. Már itt is látszik a cím problematikus volta: *Csebisev* és *Mertens* tételei „súlyos” tételek, csak komoly megszorításokkal nevezhetők „feladatok”. Ennek megfelelően a második részben kaptak helyet, amely maguk a szerzők szerint sem tekintendő feladatgyűjteménynek. Éppen ezért mindenképp érdemes ezekenél először a könyv végén található útmutatókat elolvasni: a bizonyítás alapötleteit itt foglalják össze a szerzők. Magában a részletesen kiírt megoldásban a technikai számolásokat részletezik, innen az igazi ötletek nehezen volnának kiolvashatók. Csebisev láthatóan – és tegyük hozzá: joggal – a szerzők kedvencei közé tartozik: külön fejezetben foglalkoznak a legkisebb abszolútértékű polinomokról szóló tételével.

A cím a másik oldalról is problémás ma. A kötetben nagy hangsúllyal szerepel a valószínűségszámítás; ennek elemeit Jaglomék részletesen ismertetik a feladatsor előtt. Ma már meglepődünk, hogy hány itt szereplő fogalom és feladat számított a könyv megjelenésének idején „nem eleminek”. Nálunk sem volt más a helyzet: az ötvenes években mifelénk még arról sem lehetett szó, hogy a valószínűségszámításnak legalább az elemei szerepeljenek a középiskolákban. Tudtommal csak a hatvanas években indult el egyáltalán a küzdelem ezeknek az iskolai oktatásba való felvételéért. Az eredmény féloldalas: ma szerepel ugyan némi valószínűségszámítás a tananyagban, de a statisztikával összemossa és egyoldalúan csupán kombinatorikai szemlélet alapján.



A Kürschák–Neumann–Hajós–Surányi-féle Matematikai versenytételek I–II. kötet



A Surányi János-féle III. kötet

Az igazi valószínűség-számítási szemlélet meghonosítása még ma is várat magára. (Itt utalhatok *Virág Bálint*nak egy tavalyi tagozatos továbbképzésen elhangzott előadására, amelyet aztán *Gyenes Zoltánnal* szakkörön ki is próbáltunk, az eredményt lásd itt: http://www.cs.elte.hu/~jpet/specmat/Kinai_etterem.pdf.) Csakúgy, mint a valódi statisztikai szemlélet meghonosítása.

Történetileg tehát jól érthető, hogy a feladatgyűjtemény részletesen foglalkozik a valószínűség-számítás alapelemeivel, olyanokkal is, amik ma már szerepelnek a középszintű érettségi anyagban is. S ugyanakkor *ma* zavarba ejtő „nem elemi feladatok” között olvasni az itt szereplő feladatok jó részét. Szintén *történetileg* érthető, hogy számtalan olyan kombinatorika feladat szerepel, amiket ma már rengeteg más feladatgyűjteményből ismerünk. Így például a Catalan-számokra vezető feladatok hosszú sorának részletes ismertetése ma már több összefoglaló cikkben elérhető akár a világhálón is. Annak idején persze sem internet nem volt, sem e feladatok nem voltak közismertek. Ennek megfelelően a kötetben egyáltalán nem szerepel a „Catalan-szám” kifejezés, viszont szerepel – több helyre elszórva – néhány olyan feladat is, amelynek megoldását épp a Catalan-számok adják.

Egy megjegyzés a „számolásról”

Meglepő számomra, hogy az első Catalan-szamos feladat megoldásánál nem valamelyik elegáns és szellemes „megfeleltető” megoldást mutatják be a szerzők, hanem egy nagyon „számolós” megoldást választanak. A számolásra általában is nagy hangsúlyt fektetnek. Több, főleg az additív számelmélethez tartozó feladat megoldása nem több lélekölő esetszétválasztásnál – ma ilyen feladattal inkább csak a kedvét lehet elvenni a diákoknak a matematikától. De megvan annak is a mondanivalója és jelentősége, hogy a jó matematikusnak számító szerzők az ilyen megoldásoktól sem riadnak vissza, inkább csak ezek arányáról lehetne vitatkozni.

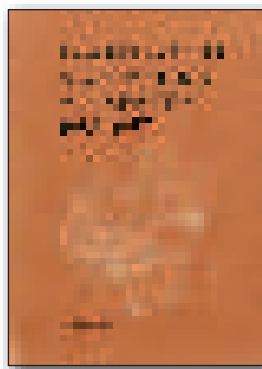
Integrálszámítás? Határértékszámítás? Topológia?

Említettem, hogy egy fejezet, szintén a nem feladatgyűjteménynek szánt második részben, bevezeti a határozott integrál fogalmát, anélkül, hogy alaposan körüljárja. Mindössze a hatványfüggvény és az exponenciális függvény határozott integrálját tárgyalják. Nyilvánvaló, hogy ez tankönyvnek kevés, viszont tényleg nem feladatgyűjteménybe való. Ha feltételezzük, hogy nem tévedésből járnak el így – márpedig nehéz

lenne az ellenkezőjét feltételezni a szerzőkről –, akkor ennek oka csakis az lehet, hogy az utána következő számelméleti tételek bizonyításához szükségük van az integrálbecslésekre. Vagyis szükségmegoldásról van szó. Ám ha már szükségük van erre a szükségmegoldásra, akkor a reciprokfüggvény integráljára bemutatják azt a szép megoldást, amelyet *Simonovits András*, a szerkesztő is lelkesen említi az előszavában. Megfontolandó, hogy a középiskolában az integrálbecsléses bizonyításokra, például a harmonikus sor aszimptotikus becslésére csak akkor kerítünk sort – ha egyáltalán, s nyilván csak nagyon erős csoportokban vagy szakkörön –, amikor már az integrálfogalmat aránylag alaposan vettük, a jelen könyv felépítése viszont a fordított utat sugallja. Nevezetesen azt, hogy az ilyen bizonyítás is segíthet az integrálfogalom szervezesebb megértéséhez. Szintén inkább tankönyvként, mint feladatsorként olvasandó a *Néhány nevezetes határérték* című fejezet, bár *Urbán János Határértékszámítás* c. könyve e témában pótolhatatlan.

Külön érdekesség a *Topológiai feladatok* című egy mindössze öt feladatból álló fejezet élén. Arra számítanánk, hogy az integrálszámításhoz vagy a valószínűség-számításhoz hasonlóan a topológia alapfogalmait is bevezetik a szerzők. Erről azonban nincs szó, ugyanis maguk a feladatok valójában csak érintkeznek a topológiával, inkább kombina-

A Középiskolai Matematikai Versenyek néhány kötete

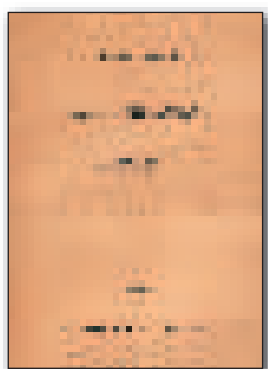




A Skljarszkij–Csencov–
Jaglom feladatgyűjtemény
első kötete



Az Elemi matematika egyetemi jegyzetsorozat
„Jaglom-kötetei”



Urbán János
könyve

torika jellegűnek mondhatóak. Az egyik itt szereplő háromszögelési feladatot *Sperner* valóban topológiai tételek bizonyításához találta, ezek a tételek azonban a kötetben nem szerepelnek. Az a gyanúm, hogy a cím inkább a szovjet matematikai élet „belpolitikai” vagy talán „külpolitikai” céljait szolgálta, a cím ugyanis a szerzőknek alkalmat nyújt rá, hogy megdicsérik a szovjet topológiai iskolát – és meglepő, s a Szovjetunióban inkább merésznek számító módon a francia topológiai iskolát is mintegy „társiskolaként” emelik ki.

A kötet 1954-es orosz nyelvű megjelenése óta eltelt hat évtized miatt nagy feladat hárult nemcsak a kötet fordítójára, hanem szerkesztőjére is. Az akkor még megoldatlan problémák egy része – így például a négyszinsejtés – azóta megoldódott. Emellett meg kellett magyarázni olyan kifejezéseket, amelyek a szovjet rendszerrel együtt elmúltak – például az államkötvények sorsolását, aminek nálunk a békekölcsön felett meg-, pótolnia kellett olyan adatokat, amelyeket a szerzők kifejtettek. Nagy feladatot jelentett emellett a rengeteg orosz nyelvről, ma nálunk elérhetetlen könyvre való hivatkozás is. Ha ezek magyarul megjelentek, akkor – talán egyedül a magyarul csak kis példányszámban terjesztett Jaglom–Boltjanszkij: *Konvex alakzatok* kivételével – a magyar kiadás szerepelteti a magyarul elérhető fordítást. Nem szokás, és aránytalanul nagy munka is lett volna minden hivatkozáshoz megkeresni a magyar nyelven elérhető „megfelelőjét”, ahol közvetlen magyar fordítás nem létezik, viszont ahol volt angol fordítás, ott szerencsére ezt is idézik.

Amiért a cím ma is aktuális

Ha össze akarom foglalni benyomásaimat Jaglomék kötetéről, akkor egyszerűen kétségtelen a történeti érdekessége. Az is világosan kiderül, hogy a matematika melyik területei állnak a szerzők szívéhez igazán közel.

De van a kötetnek aktualitása is, amennyiben egy nagyon is létező problémát lát

és igyekszik megoldani. Ezt úgy jellemezhetném, hogy a középiskolai és az egyetemi matematikát egy hatalmas, az oktatásban nem művelt, valójában azonban nagyon is termékeny terület választja el egymástól, a kötet ennek bizonyos tartományait igyekszik bejárni. Ezt jelzi a kötet címe is. Vagy másképp megfogalmazva: van egy nagy ugrás a középiskolai és az egyetemi matematikaoktatás között. Számítalan olyan területe van a matematikának, amit az előbbi szinten még nem tanítunk, az utóbbi szinten már nem, vagy ha igen, akkor épp csak átszáguldunk rajta. Ezek a „gap”-ek okozzák az egyetemre kerülő diákok jó részének „tériszonyát”, „légszomját”. Ezért érzik sokáig levegőben lógó absztrakciónak az egyetemi hallgatók az ott hallottakat. És ez – persze csak részben – magyarázza az egyre nagyobb lemorzsolódást is. Nos, Jaglomék könyve egy pár ilyen „gap”-et próbált áthidalni a maga idején. És ilyen „gap”-ek ma is bőven – sőt, a középiskolai oktatás folyamatos lebutítása folytán egyre inkább – vannak, de nem mindig egyeznek azokkal, amelyek a könyv megjelenésének idején voltak. Gondolok itt akár a többváltozós függvénytan, akár a komplex függvénytan alapelemeire. Tapasztalataink azt mutatják, hogy ezek is megközelíthetőek gimnáziumi szintű feladatok révén, csakúgy, mint az egyszerűbb csoportelméleti fogalmak: utóbbiakkal még normál osztályos szakkörön is sokáig el lehet jutni például gráfok és poliéderek automorfizmusain keresztül, ezek ugyanis szemléletesek, „megfoghatók” a diákoknak (lásd pl. *Hegedűs Pálnak* erről szóló előadását az említett továbbképzésen: <http://www.cs.elte.hu/~jpet/specmat/HegedusPal.pdf>). Bizonyos egyszerű testbővítések is szerves folytatásai lehetnek a ma is (még) tanított gyöktelenítésnek, a valószínűség-számításon belüli problémára részben már utaltam, de matematika tagozaton a játékelmélet elemei is élvezetesen taníthatók, mint azt pl. *Juhász István* kísérletei tanúsítják. Ami pedig a topoló-

giát illeti, még a fundamentális csoportok egyszerűbb esetei is bevihetők szemléletes „csomózási” feladatokon keresztül, erre vonatkozóan is folynak tanulságos kísérletek. Viszont minden ilyen újításnak didaktikailag alaposan kidolgozottnak, tanulóbarátnak kell lennie. Nem szabad engedni a kísértésnek, hogy a tanár közvetlenül az egyetemi tananyaggal „öntse nyakon” a diákokat. Hogy ennek a veszélye fennáll, ha eddig nem-tanított területeket próbálunk bevinni az órára, ennek kísértését minden lelkes matematika tagozatos tanár – főleg az oktatás első éveiben – átéli. Itt tehát továbbra is folyamatos és komoly didaktikai munkára van szükség.

Nem véletlenül kerül szóba a matematika tagozat, és nem csak azért, mert e recenzio írója maga is ott tanított három évtizedig. Az sem véletlen, hogy a kötet elején szerepel olyan kockaszínezési feladat, ami éppen középiskolai matematika tagozatos felvételin is szerepelt, míg a kötet végén olyan tételeket olvasunk, amelyek követése a legjobb középiskolai diákok számára is komoly feladat. Mert az említett „gap”-eknek a szűkítése, a középiskolai és egyetemi matematika közötti „köztes” területek „bejárása” az, amire az alapszintű oktatásban nyilván nincs idő; erre kis részben a középiskolai emelt szintű matematikaoktatás, de igazából a matematika tagozat lehet alkalmas. Utóbbiaknak eredetileg ez volna az egyik funkciójuk. Leginkább tehát az erősebb tagozatos diákoknak és a velük egyenlő szintű diákoknak, illetve az egyetemi hallgatók közül azoknak ajánlható a könyv, akik az itt található témákkal akarnak behatóbban megismerkedni. De a kötet igazi pozitív hatása az volna, ha ihletésére a fentebb említett és más „köztes területek” bejárását segítő, didaktikailag is alaposan átgondolt tematikus kötetek születnének.

(*Akiva Mojszejevics Jaglom – Iszaak Mojszejevics Jaglom: Nem elemi feladatok elemi tárgyalásban. Fordította Schultz György, kontrollszerkesztő Simonovits András. Typotex, 2015*)