

# A prímszámok zenéje

**M**arcus du Sautoy a matematikai ismeretterjesztés mestere. A BBC-nek készített tévéműsorai, valamint tudománypopularizáló könyvei alapján méltán lehetett az Oxfordi Egyetemen Richard Dawkins utóda a Simonyi Károly által alapított professzori állásban, amelynek célja a tudomány terjesztése (*Charles Simonyi chair in the public understanding of science*).

A prímszámok fogalma a matematikában a legalapvetőbbek egyike. Ezek azok az egész számok, amelyeket nem lehet két kisebb egész szám szorzataként felírni. A prímszámok sorozata meglehetősen szabálytalanak látszik: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ... Ezek a számok egyrészt – meghatározásuk szerint – teljesen determináltak, ugyanakkor véletlenszerű tulajdonságokat mutatnak, mintha pénzfeldobással lehetne eldönteni, hogy egy szám prímszám legyen-e. Ha sorban haladunk, akkor előfordul, hogy hosszú ideig nem ütközünk újabb prímszámba, máskor viszont egymás közelében találunk prímszámokat. Gauss ismerte fel, hogy egy  $N$  számig elmenve nagyjából  $N/\ln N$  prímszámot találunk ( $\ln N$  az  $N$  szám ún. természetes logaritmus); ezt egy évszázaddal később, 1896-ban sikerült Hadamard-nak és de la Vallée-Poussinnek bebizonyítani. A prímszámok eloszlásának pontosabb leírásához egy komplex változós függvény, a zéta-függvény nullhelyeinek ismerete nyújthat segítséget. Riemann már 1859-ben megfogalmazta, hogy ezeknek a nullhelyeknek a valós része várhatóan mindig  $1/2$ . Ma már a számítógépek segítségével  $10^{13}$  nullhelyet számítottak ki, és mindegyiküknek a valós része  $1/2$ -nek adódott. A matematikusoknak azonban ennyi nem elég, ők bizonyítást akarnak látni arra, hogy a végtelen sok nullhely egyike sem lesz kivétel. Ez a híres Riemann-sejtés, amely a Clay Intézet által kitűzött hét „millenniumi probléma” egyike, és megoldásáért egymillió dollár a kitűzött jutalom. Du Sautoy nagyszerű könyvének középpontjában a Riemann-sejtés áll, de ennek kapcsán széleskörű betekintést kap az olvasó a prímszámok és a velük foglalkozó matematikusok világába is.

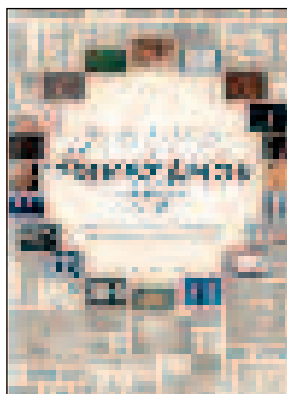
A súlyos matematikai tartalmat könnyed stílusban írja le a szerző. Képletek alig fordulnak elő a könyvben, inkább metaforák segítségével érzékelteti az olvasóval mondanivalóját: például a zéta-függvény nullhelyeiről sokszor mint a zéta-vidék tengerszinten levő pontjairól

beszél. A matematika történetének számos szereplőjével ismerkedünk meg a könyv lapjain, akiknek nemcsak tudományos, hanem emberi arclét is felrajzolja a szerző. Megismerjük küzdelmeiket, örömeiket, különbségeiket. Láthatjuk, hogy mennyire különböző karakterű emberek szentelik életüket a prímszámok titkainak ki-fürkészésére. De a könyv nem marad a matematika elefántcsonttornyán belül, kitekint a prímszámoknak más területekkel való kapcsolatára is. Megtudhatjuk, hogy még az internetes vásárlás biztonsága is a prímszámokon nyugszik. Sőt, irodalmi, filmművészeti, rovarani és más érdekességek is színesítik a könyvet. És vajon mi lehet a rejtett összefüggés a fizikusok által tanulmányozott kvantumkáosz és a Riemann-sejtés között, amit a közelmúltban nyert számítási eredmények sejtetnek?

Minden, a matematika iránt érdeklődő olvasónak jó szívvel ajánlhatom ezt a lebilincselő könyvet. A matematikában jártasabbak szemében talán túlságosan leegyszerűsítően bánik a szerző a tudományos tartalommal, de ők is rengeteg érdekességet fognak találni a műben. Az érdeklődő diákok közül pedig nem elképzelhetetlen, hogy valaki éppen ennek a könyvnek a hatására válik majd a számelmélet elhivatott kutatójává.

Az angol kiadás 2003-ban látott napvilágot. Amikor a szerző 2013 májusában a Hay Festival keretében Budapesten tartott előadást, a magyar változat megjelenését már ószi ígérték. Most végre, 2014 áprilisában kezébe vehette az olvasó az igényes kiállítású kötetet Gyenes Zoltán remek fordításában. (Egyetlen sajtóhibát vettem csak észre: a 171. oldalon a képlet jobb oldalán lemaradt a negatív előjel, ami a 173. oldalon már a helyén van.)

Az eredeti megjelenése óta eltelt évtizedben a prímszámokkal kapcsolatban két fantasztikus eredmény született. Bár ezek nem kapcsolódnak szorosan a könyv központi témájához, a Riemann-sejtéshez, de ha ma ülne számítógépe elé a szerző, biztosan részletesen ismertetné ezeket is. 2004-ben Green és Tao igazolták, hogy a prímszámok között akármilyen hosszú számtani sorozatok találhatók. (Tao 2006-ban



Fields-éremet kapott, Green a 2014-es Fields-érem várományosai között emlegettik.) Ez a tétel rokona az Abel-díjas Szemerédi Endre 1975-ös eredményének, miszerint az egész számok minden pozitív sűrűségű részhalmazában van tetszőleges tagszámú számtani sorozat. (Vagyis itt az a feltevés, hogy minden  $N$ -re az  $1, 2, 3, \dots, N$  számoknak legalább – mondjuk – az  $1\%$ -a benne van a kiválasztott

részhalmazban. Ez a prímszámok halmazára nem teljesül, mivel azok átlagosan egyre ritkábbak, az első  $N$  számból nagyjából az  $1/\ln N$  részük prímszám.) A Green–Tao-tétel egyébként következne Erdős Pál egyik legismertebb – máig bizonyítatlan – sejtéséből, ami azt állítja, hogy minden olyan számhalmazban is található akármilyen hosszú számtani sorozatok, amelyekre a benne levő számok reciprokainak összege végtelen. Ennek a sejtésnek az igazolásáért Erdős 3000 dolláros jutalmat tűzött ki – ő nem volt olyan gazdag, mint Landon Clay.

A másik nagy visszhangot kiváltó eredményt az Egyesült Államokban dolgozó kínai matematikus, Yitang Zhang érte el 2013-ban, amikor belátta, hogy végtelen sokszor lesz két egymás utáni prímszám különbsége kisebb, mint hetven millió, ami váratlan előrelépés az ikerprím-sejtés felé. (Az ikerprím-sejtés szerint végtelen sok olyan prímszám-pár van, ahol a két szám különbsége 2, mint például 3 és 5; 5 és 7; 11 és 13; 17 és 19 stb.) Később mások ezt a korlátot néhány százra csökkentették. Zhang bizonyítása erősen támaszkodik Goldston, Pintz János és Yıldırım eredményére, akik korábban azt igazolták, hogy a különbségek végtelen sokszor lesznek jóval kisebbek mint az átlagos különbség. (Ők négyen megosztva megkapták az Amerikai Matematikai Társaság 2014-es számelméleti Cole-díját.)

*A prímszámok zenéje* megjósolható sikere talán azt is eredményezi, hogy du Sautoynak a szimmetriák varázslatos világáról szóló könyve magyar kiadására nem kell majd egy évtizedet várnunk. (Marcus du Sautoy: *A prímszámok zenéje*, Park Könyvkiadó, 2014)

PÁLFY PÉTER PÁL