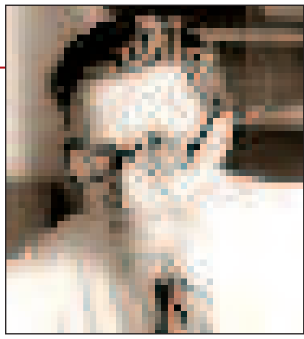
FREUD RÓBERT

# Komplex kalandozások Fried Ervin emlékére



**Fried Ervin (1929-2013)**

A nemrég elhunyt Fried Ervin professzorral való kapcsolatom végigkísérte pályafutásomat: az egyetemen több éven át tanított az algebra különböző fejezeteire, majd végzés után hosszú ideig vezettem gyakorlatokat az előadásaihoz, később tanszékvezetőként a főnököm volt. Diákkal, kollégával, beosztottal egyaránt mindig kedvesen, közvetlenül viselkedett, érdekelték az emberek problémái és véleménye, szívesen beszélgetett nem csak matematikai témákról.

Évfolyamunk egyik kedvenc oktatója volt. Nem kész anyagot közölt velünk, hanem minket is maximálisan bevont a gondolkodási, alkotási folyamatba; később elmesélte, hogy ezt a módszert Turán Páltól (a XX. század egyik legnagyobb magyar matematikusától) tanulta. Gyakran kérdezte az órákon (miközben a folyton kioldódó cipőfűzőjét igazította), hogy ,,most mire gondolok?'', és mi megpróbáltuk kitalálni, milyen újabb matematikai kérdés adódik az éppen bizonyított tétel kapcsán, vagy milyen újabb ötlettel lehetne megoldani egy-egy nehezebb problémát, esetleg szabad asszociációval vetettünk fel további matematikai kérdéseket. Azt is megtanultuk, hogy általában nemcsak egyféleképpen lehet továbbhaladni, hanem sokszor több irányban is lehet és érdemes elindulni, szabad elkalandozni, és számos esetben közösen jártunk be ilyen kitérőket.

Fried Ervin szelleméhez híven most ilyen csapongó kalandozásra invitálom az Olvasót, éspedig az általa művelt és oktatott algebra egyik fontos építőkövéből, a komplex számokból kiindulva. Könnyebb és nehezebb problémákat fogok bemutatni a matematika különböző területeiről, közülük többnek látszólag semmi köze sincs a komplex számokhoz, mégis a természetes kezelési módjuk ehhez a számkörhöz kötődik. A jobb érthetőség és a lényeges gondolatok kiemelése kedvéért le kell mondanunk a teljes precizitásról és az aprólékos formális levezetésekről, de reméljük, hogy mindezért kárpótlást nyújtanak majd az út során szerzett szép szellemi élmények.

A komplex számok olyan $a+bi$ alakú kifejezések, ahol $a$ és $b$ valós számok, és ezekkel „értelemszerűen" végezzük a műveleteket, az egyetlen számolási szabály, amit meg kell jegyezni, hogy $i^2=-1$. Tehát például $(3+5i)+(-2+8i)=1+13i$, [redacted]. Osztani is tudunk: $(3+5i)/(-2+8i)$ esetén a nevezőben az $i$-t a $-1$ négyzetgyökének képzelve gyöktelenítünk:

$$\frac{3+5i}{-2+8i}=\frac{(3+5i)(-2-8i)}{(-2+8i)(-2-8i)}=$$
$$=\frac{34-34i}{68}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\,.$$

A komplex számok születése a matematikatörténet egy érdekes fejezetéhez kapcsolódik. A másodfokú egyenlet középiskolában tanult (és utált) megoldóképletét lényegében már a babiloniak is ismerték majdnem 4000 évvel ezelőtt, azonban a harmadfokú egyenlet sokáig ellenállt a próbálkozásoknak. Végül 1535-ben Tartaglia találta meg a ma Cardano-képletnek nevezett formulát: az $x^3+px+q=0$ harmadfokú egyenlet megoldását az

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

képlet adja. Például az $x^3+15x-124=0$ egyenlet megoldása

$$\sqrt[3]{62+\sqrt{(62)^2+(5)^3}}+\sqrt[3]{62-\sqrt{(62)^2+(5)^3}}=$$
$$=\sqrt[3]{62+63}+\sqrt[3]{62-63}=5-1=4.$$

Ha azonban az $(x-1)(x-2)(x+3)=x^3-7x+6=0$ egyenletre próbáljuk alkalmazni a képletet, akkor az nem működik, mert a négyzetgyökjel alatt negatív szám áll, miközben az egyenletnek jól láthatóan három megoldása is van. Ha azonban az $a+b\sqrt{-1}$ alakú valamikkel megpróbálunk értelemszerűen számolni, akkor a képlet alapján is megkapjuk a megoldásokat. Így születtek meg (a gyanakvó ellenállást csak lassan legyőzve) a komplex számok. Vegyük észre, hogy itt egy valós számokra vonatkozó feladatról volt szó, ahol az egyenlet gyökei is valós számok; mégis a megoldáshoz a komplex számok segítségével tudtunk eljutni.

Kezdjük kalandozásunkat egy egyszerű számelméleti feladattal: mutassuk meg, hogy ha két pozitív egész szám mindegyike felírható két négyzetszám összegeként, akkor ez a szorzatukra is igaz. Itt egy egyszerű középiskolás trükkel is boldogulhatunk. Ha $k=a^2+b^2$ és $m=c^2+d^2$, akkor $km=(ac)^2+(bd)^2+(ad)^2+(bc)^2$.

Csempésszük be itt a $2abcd$ tagot az első két négyzetszám közé negatív, az utolsó két négyzetszám közé pedig pozitív előjellel, ekkor $km=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$ adódik, amivel az állítást beláttuk.

Nézzük most, hogyan használhatók a komplex számok ezen feladat megoldásához. Az osztásnál, a nevező gyöktelenítésénél az $(u+vi)(u-vi)=u^2+v^2$ azonosság segített, most is ennek alapján kapjuk, hogy

$$km=(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(a+bi)(c+di)(a-bi)(c-di)=$$
$$=((ac-bd)+(ad+bc)i)((ac-bd)-(ad+bc)i)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2.$$

Érdemes megjegyezni, hogy kettő helyett három négyzetszám összegére nem érvényes hasonló állítás: pl. $3=1^2+1^2+1^2$, $5=0^2+1^2+2^2$, azonban $3\cdot 5=15$ nem áll elő három négyzetszám összegeként (miért?). Ha tovább növeljük a tagszámot, akkor látszólag érdektelenné válik a probléma, mivel Lagrange nevezetes tétele szerint minden pozitív egész (és így bármely két egész szorzata is) felírható négy négyzetszám összegeként. Azonban nagyon is érdekes kérdéshez jutunk, ha egy kicsit átfogalmazzuk az eddigieket.

Két tag esetén az

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2 \qquad (1)$$

azonosság volt a megoldás kulcsa. Ehhez hasonló azonosság három tag esetén már nem állhat fenn, hiszen akkor ebbe a megfelelő értékeket behelyettesítve a $3 \cdot 5 = 15$ is három négyzetszám összege lenne. Általánosan azt kérdezhetjük, hogy milyen tagszám esetén lesz érvényes ilyen típusú azonosság. Négy tag esetén ismét pozitív a válasz:

$$\begin{aligned}(a^2+b^2+c^2+d^2)(A^2+B^2+C^2+D^2) &= \\ &= (aA+bB+cC+dD)^2+(aB-bA+cD-dC)^2+ \\ &+ (aC-cA-bD+dB)^2+(aD-dA+bC-cB)^2. \quad (2)\end{aligned}$$

Ezt az (1)-nél jóval bonyolultabb egyenlőséget persze a beszorzások elvégzésével egyszerűen bebizonyíthatjuk, azonban az igazi kérdés az, hogyan lehetett a dologra rájönni. Ebben a komplex számok bizonyos értelmű kiterjesztéseként bevezetett $a+bi+cj+dk$ alakú ún. kvaterniók segítenek, a műveletek megfelelő értelmezésével kapott $(a+bi+cj+dk)(a-bi-cj-dk)=a^2+b^2+c^2+d^2$ azonosság a kulcs (2) „kitalálásához''. Újabb „duplázással'' kiderül, hogy nyolc tagra is fennáll (1)-gyel és (2)-vel analóg összefüggés. Meglepő módon ezzel vége is van a lehetőségeknek, mert bebizonyítható, hogy (1,) 2, 4 és 8 az összes tagszám, amelyre érvényes ilyen jellegű azonosság.

Második feladatunk az $\binom{n}{k}$ (olvasd $n$ alatt a $k$) binomiális együtthatóval kapcsolatos. Ennek jelentése, hogy egy $n$ elemű halmaznak hány $k$ elemű részhalmaza van.

Például $\binom{4}{2}=6$, mert az $\{a,b,c,d\}$ négyelemű halmaznak 6 kételemű részhalmaza van: $\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\}$. Nem túl nehéz $\binom{n}{k}$-ra egy általános képletet levezetni, de erre nem lesz szükségünk. Az elnevezés a kéttagú összeg hatványozására vonatkozó ún. binomiális tételből származik:

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + b^n. \quad (3)$$

Ugyanis az $n$-tényezős $(a+b)(a+b)\ldots(a+b)$ szorzat kiszámolásánál minden lehetséges módon kell mindegyik zárójeles tényezőből az egyik tagot véve ezeket összeszorozni, majd az így kapott $n$-tényezős szorzatokat összeadni. Ha $k$ zárójelből veszünk $b$-t és a többi $n-k$ zárójelből $a$-t, akkor ilyen $a^{n-k}b^k$ tagot annyiféleképpen kapunk, ahányféleképpen a $b$-ket vehetjük az egyes zárójelekből, azaz ahány $k$ elemű részhalmaza van az $n$ darab $(a+b)$-ből álló halmaznak. Így $a^{n-k}b^k$ együtthatója valóban $\binom{n}{k}$.

Ha (3)-ba $a=b=1$-et helyettesítünk, akkor a binomiális együtthatók összegére a

$$2^n = 1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + 1$$

azonosságot nyerjük. Ez egyébként a binomiális tétel nélkül is igazolható, hiszen mindkét oldalon egy $n$ elemű halmaz összes részhalmazainak a száma áll; a bal oldalon ez onnan adódik, hogy mind az $n$ elemnél egymástól függetlenül vagy „beválasztjuk'' azt az elemet a részhalmazba, vagy sem, tehát ez $2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n$ lehetőséget jelent a részhalmazok képzésére. Ha most (3)-ba $a = 1$, $b = -1$-et helyettesítünk, akkor a binomiális együtthatók váltakozó előjelű összegére ($n > 1$ esetén)

$$0 = 1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} \pm \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1} + (-1)^n$$

adódik. Kicsit továbblépve most az

$$1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} \pm \ldots + (-1)^k\binom{n}{2k} + \ldots \quad (4)$$

váltakozó előjelű összeget szeretnénk kiszámítani. Itt megint a komplex számok segítenek, mégpedig az $(1+i)^n$ kétféle kiszámítása. A (3) binomiális tétel alapján

$$(1+i)^n = 1 + \binom{n}{1}i + \binom{n}{2}i^2 + \ldots + i^n. \quad (5)$$

Számoljuk ki $i$ hatványait; $i^2=-1$, $i^3=(-1)i=-i$, $i^4=1$, $i^5=i$, $i^6=-1$ stb., azaz az $i$ hatványai négyes periódus szerint rendre az $1, i, -1, -i$ értékeket veszik fel. Ezt (5)-be beírva

$$(1+i)^n = 1 + \binom{n}{1}i - \binom{n}{2} - \binom{n}{3}i + \binom{n}{4} + \binom{n}{5}i - \binom{n}{6} + \ldots$$

adódik, azaz $(1+i)^n$-t $A+Bi$ alakban írva $A$ éppen a (4)-beli összeg. Ha tehát $A+Bi$-t valahogy máshogy közvetlenül is meg tudjuk határozni, akkor megkapjuk, hogy a (4) összeg értéke éppen ez az $A$. Vegyük észre, hogy $(1+i)^2=2i$, tehát

$(1+i)^{2m} = 2^m i^m$, és így

$$(1+i)^{2m+1} = 2^m i^m(1+i) = 2^m i^m + 2^m i^{m+1},$$

ahonnan $(1+i)^n = A+Bi$ bármely $n$-re könnyen adódik.

Pl. $n=2013$ esetén

$$(1+i)^{2013} = 2^{1006}i^{1006} + 2^{1006}i^{2007} = -2^{1006} - 2^{1006}i,$$

azaz a (4) összeg értéke $n=2013$-ra $-2^{1006}$.

Vegyük észre, hogy a (4) összegben csak valós (sőt egész) számok szerepelnek, az $A$-ra kapott képlet is egész szám, a megoldás kulcsa mégis az volt, hogy közben kiléptünk a komplex számok körébe.

A komplex számokat a sík pontjaiként vagy vektorokként is felfoghatjuk, az $A+Bi$ komplex szám megfelel az $(A, B)$ koordinátájú pontnak, illetve vektornak a szokásos (Descartes-féle) koordináta-rendszerben. Gyakran hasznosabb, ha ezt a vektort (nem a két koordinátájával, hanem) a hosszával (vagy abszolút értékével) és az $x$-tengely pozitív feléhez képest mért irányított (vagy forgás)szögével jellemezzük. Például ekkor a $-3i$ hossza 3, a szöge $-90$ fok, a $-1+i$ hossza $\sqrt{2}$, a szöge 135 fok. A szög nem teljesen egyértelmű, mert ha valahányszor 360 fokot „körbeforgunk'', akkor ugyanahhoz a vektorhoz jutunk, így például a $-3i$ szögének a 270 vagy $-450$ fokot is vehetjük, de ez nem okoz problémát. A 0-nak értelemszerűen nincs szöge.

Ha az $A+Bi$ nem nulla komplex szám hossza $r$ és (egyik) szöge $\alpha$, akkor a szögfüggvények definíciója alapján könnyen adódik, hogy $A+Bi = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, ez a komplex szám ún. trigonometrikus alakja (az $A+Bi$ pedig az algebrai alak). A trigonometrikus alak nagyon kedvező a szorzás elvégzésénél: ekkor a hosszak összeszorzódnak, a szögek pedig összeadódnak(!). Így $n$-edik hatványra emelésnél a hosszat $n$-edik hatványra emeljük, a szöget pedig $n$-nel szorozzuk(!). (Azaz a szög úgy viselkedik, mint egy hatványkitevő, és mélyebb matematikai eszközökkel megmutatható, hogy valóban ez a helyzet.) Például ennek alapján könnyebben kiszámolhattuk volna $(1+i)^n$-t:

$$(1+i)^n = (\sqrt{2}(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ))^n = (\sqrt{2})^n(\cos(45n)^\circ + i\sin(45n)^\circ)$$

A fentiek alapján például egyszerű eljárást kapunk arra, hogyan lehet mondjuk $\cos(5x)$-et a $\cos x$-szel kifejezni. Ez a trigonometrikus eszközökkel nagyon fáradságos és csúnya feladat lenne, legalább háromszor kellene a $\cos(\alpha+\beta) = \ldots$ és

$\sin(\alpha+\beta) = \ldots$ összegzési képleteket alkalmazni, hogy a $2x$, $3x$, majd végül az $5x = 2x + 3x$ szög megfelelő szögfüggvényeit megkapjuk.

Nézzük, hogyan segítenek itt a komplex számok. Legyen $z = \cos x + i \sin x$, ekkor $z^5 = \cos(5x) + i\sin(5x)$, tehát $\cos(5x)$ a $z^5$ valós része. Ha most $z^5$-t a binomiális tétellel is kiszámoljuk, akkor a valós részre $(\cos x)^5 - 10(\cos x)^3(\sin x)^2 + 5\cos x(\sin x)^4$ adódik, és a $(\sin x)^2 = 1 - (\cos x)^2$ azonosság alapján megszabadulhatunk a (csak páros hatványon előforduló) $\sin x$-től.

A számelméleti, kombinatorikai és trigonometrikai alkalmazások után nézzünk egy szép geometriai feladatot: Mennyi az egységnyi sugarú körbe írt szabályos $n$-szög valamelyik csúcsából húzott összes átló és oldal hosszának a szorzata?

Ha $n$=4, akkor egy egységnyi sugarú körbe írt négyzetben két oldal és egy átló hosszának a szorzatáról van szó, ami $(\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{2}) \cdot 2 = 4$. Ha $n$=3, akkor egy megfelelő szabályos háromszög két oldalhosszának a szorzata 3. Ezen példák alapján csak nagyon félve merjük megfogalmazni azt a döbbenetes sejtést, hogy $n$-szög esetén a szóban forgó ($n$–1 tényezős) szorzat értéke $n$.

A bizonyításhoz szükségünk lesz az $x^n = 1$ egyenletnek a komplex számok körében vett megoldásaira, ezeket hívjuk $n$-edik egységgyököknek. A $w_k = \cos(360k/n)° + i\sin(360k/n)°$, $k = 1, 2, \ldots, n$ számokat $n$-edik hatványra emelve $w_k^n = \cos(360k)° + i\sin(360k)° = 1$, azaz ezek megoldásai az $x^n = 1$ egyenletnek. Mivel egy $n$-edfokú egyenletnek legfeljebb $n$ megoldása lehet, ezért ez az összes megoldás. Ennek alapján felírhatjuk az $x^n - 1 = (x - w_1)(x - w_2)\ldots(x - w_n)$ azonosságot, az ún. gyöktényezős alakot.

Térjünk most vissza a szabályos $n$-szögünkhöz, és helyezzük el úgy, hogy a középpontja az origó és egyik csúcsa az 1 legyen. Ekkor a csúcsai éppen az $n$-edik egységgyökök, az 1-ből húzott oldalak és átlók pedig az $1 - w_k$ vektorok, $k = 1, 2, \ldots, n-1$. A vektorok hossza így $|1 - w_k|$, azaz a keresett szorzat $S = |1 - w_1| \cdot |1 - w_2| \cdot \ldots \cdot |1 - w_{n-1}|$. Látjuk, hogy a hosszak szorzata a szorzat hossza, így $S = |(1 - w_1)(1 - w_2)\ldots(1 - w_{n-1})|$.

Tekintsük az $f(x) = (x - w_1)(x - w_2)\ldots(x - w_{n-1})$ polinomot, ekkor $S = |f(1)| = n$. Az $f(x)$-ben az $x^n - 1$ polinom gyöktényezői közül egyedül az $(x - 1)$ gyöktényező nem szerepel, ezért $x^n - 1 = (x-1)f(x)$. Másrészt $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + 1)$, amiről beszorzással egyszerűen meggyőződhetünk. Innen kapjuk, hogy $f(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + 1$, és így $S = |f(1)| = n$.

Befejezésül térjünk vissza a számelmélethez. A rendkívüli hatású és matematikusként, emberként egyaránt csodálatos Erdős Pál egyik kedvenc témaköre volt a pozitív számok előállítása különböző differenciájú végtelen számtani sorozatok, azaz $\{a, a+d, a+2d, \ldots\}$ típusú halmazok egyesítéseként. Ilyen előállítás például

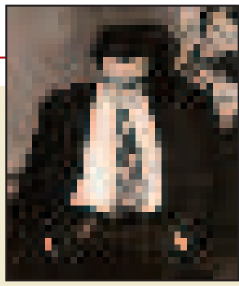
$$\{0, 2, 4, \ldots\} \cup \{0, 3, 6, \ldots\} \cup \{1, 5, 9, \ldots\} \cup \{1, 7, 13, \ldots\} \cup \{11, 23, 35, \ldots\}.$$

Az egyik ma is megoldatlan probléma, hogy lehet-e mindegyik differencia páratlan, ezért Erdős 500 dollárt ajánlott fel. (Ez ma is érvényes, közeli munkatársa, Ron Graham „jótáll'' Erdős díjaiért; ez nem olyan óriási kockázat, mert ahogy Erdős mondta tréfából, fél, hogy börtönbe zárják, hiszen egy ilyen díj elnyeréséért olyan sokat kell dolgozni – ha egyáltalán sikerül megoldani a problémát –, hogy a kapott pénz messze a minimális órabér alatt marad, tehát illegális. A legnagyobb kifizetett összeg eddig 1000 dollárra rúgott, ezt Szemerédi Endre, a 2012-es év Abel-díjasa kapta mintegy 40 évvel ezelőtt.) A témakör egy másik pénzdíjas kérdése volt, lehet-e, hogy mindegyik számtani sorozat differenciája akármilyen nagy, és éppen az Erdős születésének századik évfordulójára 2013 júliusában Budapesten rendezett monstre nemzetközi konferencián jelentették be a megoldást: a válasz nemleges.

Amit a komplex egységgyökök segítségével lehet nagyon szépen bebizonyítani, az a következő: ezeknek a számtani sorozatoknak szükségképpen van közös elemük (a fenti példánkban a 6 többszörösei az első két sorozatnak, az 1, 13, 25 stb. a harmadik és negyedik sorozatnak közös elemei). Ennek a bizonyítása azonban meghaladja ennek az írásnak a kereteit.

Ezzel kalandozásunk végére értünk. A legfőbb tanulság talán az, hogy nincs külön ilyen vagy olyan matematika, az egyes ágak szoros szimbiózisban élnek egymással, és egymástól látszólag távol eső területek is hatékonyan segítik egymás, és így az egész matematika fejlődését. Erre tanított engem Fried Ervin is, és remélem, ennek egy aprócska vetületét sikerült az ő szellemében továbbadnom az Olvasónak. ✱

## Fried Ervin fogadása



Az alábbi kis történetünk Fried professzor úrral esett meg, talán 1977 telén, amikor másodéves egyetemisták voltunk. Ervin tartotta nekünk a matematikus szak reguláris algebra előadását. Volt az évfolyamunkon egy diák, kiemelkedően a legtehetségesebb köztünk, Kollár János, akit Ervin már régóta felmentett a rendes órák látogatása alól.

Mindazonáltal, Jancsi mégis bejárt az órákra, részint hogy melegedjen, másrészt, hogy elkészítse az aktuális oroszóra leckéjét. Csendben beült a leghátsó sorba, és észrevétlen maradt.

Igen ám, de történt egyszer, hogy mikor Ervin szépen előadott valamiről – a pontos témára már nem emlékszem, talán valamilyen gyűrűelméleti alapvetés lehetett –, akkor egy óvatlan pillanatban Jancsi udvariasan, de határozottan megszakította az előadást és közölte, hogy sajnos, ott a táblán, az és az, hát.... bizony, sajnos, nem igaz!

Hirtelen megfagyott a levegő a tanteremben: a légy zümmögése is hallatszott volna, ha nem télidőben járunk. Hát ilyet lehet, ez létezik? Most mi lesz?

Ervin is megdöbbent, megállt, rámeredt a megkritizált állításra, kicsit gondolkozott, majd, ragaszkodván igazához, fogadást ajánlott Jancsinak 2 forintban (ami akkor azért még pénz volt), hogy mégiscsak neki van igaza. Jancsi azonnal állta is a fogadást. Erre Ervin elkezdett csendben fel és alá sétálni a tábla előtt, fejét a földre szegezve, mélyen elgondolkodva, miközben mi feszült figyelemmel, síri csendben követtük az eseményeket.

Eltartott ez a néma fel-alá járkálás pár percig, amikor is Ervin egyszer csak megállt, mozdulatlanná dermedt, majd némán benyúlt a zsebébe, előhúzta a pénztárcáját, kivett belőle egy „bélást” és átdobta az évfolyam feje felett Jancsinak.

Ezután a táblához lépett és elmagyarázta nekünk, nyeretlen kétéveseknek, hogy miért is veszítette el a fogadást.

SIMÁNYI NÁNDOR

*Szerkesztői megjegyzés*: Simányi Nándor ma a University of Alabama at Birmingham professzora; Kollár János a Princeton University professzora, a National Academy of Sciences (USA) és az American Mathematical Society tagja, a Magyar Tudományos Akadémia külső tagja.