A természetes számoktól a kvaterniókig

SIMONOVITS ANDRÁS

Ebben az írásban a számfogalom bővüléséről írok, nem matematikusoknak, kitérve a történeti vonatkozásokra is. A kisebb természetes számokat már az óvodások megismerik. Racionális számokkal az általános iskola alsó tagozatosai találkoznak. A negatív számokkal az én időmben csak a 8. osztályban ismerkedtünk meg, ma már korábban. Irracionális számokkal a középiskolában találkozunk, amikor kiderül, hogy az egységoldalú négyzet átlója nem írható fel két természetes szám hányadosaként. A komplex számokra minden természettudományos (és gyakran társadalomtudományos) végzettségű felsőfokú szakembernek szüksége lehet. A kvaterniókat viszont inkább csak a „pihent agyú" matematikusok és fizikusok használják. Az elmondottak zöme részenként a Wikipédiáról is letölthető, de számos megállapításunk elkerülte még a nemzetközi hírnevű népszerűsítő szerzők figyelmét is, tehát ebben az értelemben nem magától értetődőek.

Természetes és racionális számok

A *természetes számok* tárgyak felsorolásakor keletkeznek: $n = 1, 2, 3,\ldots.$ Nem sok magyarázatra szorulnak, az emberiség több tízezer éve használja őket. Újabban a *nullát* is idesorolják. A nulla igazi matematikai találmány, amely meglepően későn, a kora középkorban keletkezett. Két szerepe is van: egyrészt az első nem pozitív egész szám, másrészt a 10-edik számjegy. Ez utóbbi szerepben lehetővé tette a helyértékes számolást. (A babilóniaiak is ismerték a helyértékeket, de nulla hiányában nem tudtak különbséget tenni a 10 és a 100, vagy még inkább a 60 és a 3600 között, hiszen 60-as rendszerben számoltak.)

Kicsit bonyolultabbak a pozitív *racionális számok*, amelyek természetes számok osztásakor keletkeznek. (Vigyázat: a latinban a ratio nemcsak észt, hanem hányadost is jelent!) Hogyan oszthatunk el két csokoládét igazságosan háromfelé? Mindegyiket megharmadoljuk, és mindenki kap két harmadot. Itt megjelennek az ókori egyiptomiak kedvenc *reciprokjai*: az $1/n$ alakú számok, és ezek segítségével bármely racionális szám egy egész és egy reciprok szorzataként írható fel: $m/n = m \cdot 1/n$. A beavatatlannak érdekes lehet, hogy több különböző reciprok összege egész lehet, például 1/2 +1/3 +1/6 = 1.

(A hatvanas számrendszerben ez egyszerű: 30 perc + 20 perc + 10 perc = 60 perc.)

Negatív számok

A XVIII. században bevezetett Celsius-féle hőmérsékleti skálát használva ma már a tévéhíradókat figyelő hatéves gyermek is rájöhet arra, hogyha a hőmérséklet 2 fokról 3 fokot csökken, akkor –1 fok lesz. Az, hogy kisebb természetes (vagy pozitív racionális) számból nagyobb természetes (vagy pozitív racionális) szám is kivonható, nem is olyan bonyolult, azonban a különc britek még ma is inkább piros számmal írják le a veszteséget, mintsem hogy egy mínuszjelet tegyenek ki. Az ázsiai úttörőktől jócskán elmaradva, az európai matematikusok a *negatív számokat* csak a XVI. században, a komplex számokkal együtt fogadták be. És hiába fedezte fel 1630 körül Descartes és Fermat az analitikus geometriát, még nekik sem jutott eszükbe a vízszintes és függőleges negatív féltengely bevezetése!

Kitérő: kíváncsi vagyok, hány nem matematikus képzettségű olvasó tudja megindokolni, hogy miért igaz, hogy $(-1) \cdot (-1) = 1$. [Két magyarázatot is adok: a) A –1-gyel való szorzás minden számot a 0-ra tükrözi: 1 képe –1, –1 képe 1. b) Szeretnénk, ha új számainkra is igaz lenne a disztributivitás: $(a + b)\ c = ac + bc$. Ha $a = c = -1$ és $b = 1$, akkor $0 \cdot (-1) = (-1) \cdot (-1) - 1$, azaz $(-1) \cdot (-1) = 1$.]

Irracionális számok

Az időrendi fejlődést átugrottuk, amikor kihagytuk az *irracionális számokat*. Most pótoljuk a hiányt. A görög fénykorban (i.e. V. század körül) a bölcsek már nemcsak tudták, hanem bizonyították is, hogy az egységoldalú négyzet átlója nem írható föl két természetes szám hányadosaként. Például ha 1000 stadion lenne a négyzet oldala, akkor az átlója 1 414 és 1 415 stadion között lenne. (Érdekes, hogy a babilóniaiaknak ez eszükben sem jutott, de csodálatos számolástechnikájuknak köszönhetően – mai írásmódban – 5 tizedes jegy pontossággal meghatározták ezt a számot: 1,41422..)

Emlékeztetünk a klasszikus bizonyításra: indirekt úton tegyük föl az állítás ellenkezőjét: $\sqrt{2} = m/n$, ahol m és n természetes szám, 1-nél nagyobb közös osztó nélkül. Ekkor négyzetre emelve az egyenlőséget és rendezve: $2\ n^2 = m^2$. Ebből következik, hogy m páros, majd hogy n is páros, azaz legalább a 2 közös osztójuk, s ez ellentmondás. El kell mondanunk, hogy ez a felfedezés nagyon nagy nehézségeket okozott a szabatosságra törekvő görög matematikusoknak, és csak a XIX. század második felében találták meg a modern matematikusok a megoldást.

Újabb kitérő: a *tizedes törtek*. Ma már a legtöbb országban a legtöbb fizikai és pénzügyi mértékegység a tízes számrendszeren alapul, és ennek természetes folyománya a tizedes tört. Ha 1 km = 1000 m, akkor 1 m = = 0,001 km. De nem így volt ezer évig! 1585 előtt csak a racionális számokkal dolgoztak, és még pár évvel ezelőtt is a felezéses logika rabjaként bankárok a százalékok 1/16-odában mérték a kamatlábakat. Csak a számítógépek kényszerítették ki a tizedes törtek, bocsánat, a bázispontok használatát. 1585 óta írunk 1/4 helyett 0,25-ot, és közelítjük az 1/3-ot 0,333-mal. De 1972-ig kellett várni, hogy a brit pénzegység megszabaduljon a 12-es és 20-as váltástól. Csak 41 éve szorította ki az 1 font = = 20 schilling és 1 schilling =12 penny szörnyűséget az 1 font = 100 penny.

Általános iskolából ismert, hogy kétféle tizedes tört létezik: véges és végtelen. Az elsőre példa az 1/2 = 0,5, a másodikra az 1/3 = = 0,333…. vagy 1/7 = 0,142856.. . (Sajnos, a véges tizedes törtek is felírhatók végtelen alakban: 1/2 =0,4999… , de ez nem okoz igazi zavart.) Látszólag semmi gond sincs a végtelen tizedes törtekkel, de matematikailag szabatos leírásuk a matematikusok belügye.

Komplex számok

Elérkeztünk a *komplex számokhoz*, amelyekről számos olvasó most hall először, legalább is érdemben. Mindenekelőtt felelevenítjük az $x^2 + p\,x + q = 0$ (q nem 0) másodfokú egyenletet. Több ezer éve ismert a másodfokú egyenlet megoldó képlete. Megengedve a negatív együtthatókat és gyököket, és feltéve, hogy a $D = p^2 - 4\ q$ diszkrimináns nem negatív, két valós gyököt kapunk; $x_{1,2} = (-p \pm \sqrt{D})/2$. ($D = 0$ esetén az $x_{1,2} = -p\ /2$ gyököt kettősnek nevezzük.)

De mi történik, ha a diszkrimináns negatív: $D = p^2 - 4\ q < 0$? Nézzük először a legegyszerűbb esetet, amikor $x^2 + 1 = 0$! Történetietlen módon azt mondhatnánk, hogy ahogyan az $x + 1 = 0$ egyenlet gyökének nevezzük a –1-et, ugyanúgy az $x^2 + 1 = 0$ egyenlet gyökeinek nevezzük az $i = \sqrt{-1}$-et és ellentettjét, a $-i = -\sqrt{-1}$-et. Tehát akármit jelentsen is ez a *képzetesnek* nevezett gyök, a négyzete –1: $i^2 = -1$. Ugyanígy $(-i)^2 = (-1)^2\, i^2 = -1$. De hát valós (racionális vagy irracionális) szám négyzete nem lehet negatív! Igen, de mi kilépünk a valós számok köréből, és bevezetjük a komplex számokat.

Nagyon rövidre fogva népszerűsítő bevezetésünket: legyen x és y két valós szám, amelyből a $z = x + iy$ komplex számot képezzük: x a valós rész és y a képzetes rész. Először megadjuk az összeadási szabályt:

ha $z' = x' + iy'$,
akkor $z + z' = (x + x') + i(y + y')$.

Bonyolultabb a szorzási szabály, de ugyanúgy járhatunk el, mint korábban a $(-1)^2 = 1$ definiálásakor, csak most az $(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd$ képletet alkalmazzuk és felhasználjuk, hogy $i^2 = -1$:

$$z\, z' = (x + iy)\,(x' + iy') = x\, x' + i\, y\, x' + i\, x\, y' + + i^2\, y\, y' = (xy - x'y') + i\,(xy' + x'y).$$

Ekkor *minden* másodfokú egyenletnek két megoldása van, vagy 2 valós vagy 2 komplex. Valóban, ha $D = p^2 - 4\,q < 0$, akkor $z_{1,2} = (-p \pm i\,\sqrt{(-D)})/2$. Viszonylag könynyen belátható, hogy e két gyök egymásnak az $y = 0$ vízszintes tengelyre vett *tükörképe,* (műszóval: *konjugáltja*): ha $z_1 = x_1 + iy_1$, akkor $z_2 = x_1 - iy_1$. A gyökök és együtthatók jól ismert összefüggése szerint összegük is, szorzatuk is valós: $z_1 + z_2 = -\,p$ és $z_1 z_2 = q$.

Érdemes megemlíteni, hogy a komplex számok körében nemcsak összeadni (kivonni) és szorozni tudunk, hanem osztani is, sőt hatványozni is, ennek részletezését azonban az olvasóra hagyjuk. Hasonlóan belátható a komplex gyökök tükörtulajdonsága a valós együtthatójú harmadfokú és magasabb fokú egyenletekre: ha egy komplex szám gyöke az egyenletnek, akkor tükörképe is gyök.

Csak a XIX. század elején mondták ki a matematikusok, hogy a komplex számok síkbeli vektoroknak is tekinthetők, amelyekre azonban nemcsak az összeadás, hanem a szorzás is értelmezve van. Képletben:

$x + i\, y = (x, y)$.

A történeti út azonban egészen más volt! Annak idején senkit sem érdekelt önmagában az olyan másodfokú egyenletek megoldása, amelyeknek a gyöke nem valósak. A középkori bölcseket nagyon is érdekelte a harmadfokú egyenletek megoldása, amelyeknek mai alakja: $x^3 + p\, x^2 + q\, x + r = 0$, r nem 0. De a XVI. századig senki sem tudta, hogyan lehet megoldani őket. Ekkor több észak-itáliai gondolkodó megtalálta a megoldást. Más írások élvezetesen leírják a kalandos történetet, mi azonban csak azt hangsúlyozzuk, hogy amikor mindhárom gyök valós, akkor a levezetett gyökképlet szükségképpen komplex számokon keresztül adja meg a valós megoldást. Itt már nem lehetett olyan kibúvót keresni, mint a másodfokú egyenletnél! Be kellett vezetni a komplex számokat!

A tudósok sokáig nem értették meg, hogy a komplex számok éppen olyan értelmes számok, mint a valós számok, de a gyakorlati alkalmazások sikere végül is elsöpörte a filozófiai ellenállást.

Kitérőként megemlítjük, hogy a negyedfokú egyenlet megoldó képlete hasonlóképpen levezethető, mint a harmadfokúé, és felfedezése is gyorsan követte elődjét. Az ötödfokú egyenlet azonban ellenállt a próbálkozásoknak, és csak a XIX. század elején derült ki, hogy algebrailag *általában* nem is oldható meg. (Speciális esetekben azonban igen: például az $x^5 = 1$ ötödfokú egyenlet 4 nem valós komplex gyöke a 4 darab ötödrendű egységgyök.) Gyakorlati jelentősége már a harmadfokú egyenlet megoldásának sem volt, hiszen numerikus megoldáshoz numerikus közelítő módszerekre van szükség, amilyeneket már az említett babilóniaiak is alkalmaztak a $\sqrt{2}$ kiszámítására. A kérdés elméleti jelentősége azonban óriási volt, hiszen ennek köszönhetjük a modern algebra, például a *csoportelmélet* születését. És itt sem csupán elméleti kérdésről van szó, hiszen a modern fizika is bőségesen merít ezekből a módszerekből.

Még egy megjegyzés. A harmadfokú egyenletek megoldása előtt csak pozitív együtthatójú egyenletek pozitív megoldását keresték. Ezért a másodfokú egyenletet sem a fenti módon írták föl, hanem a következő két alakban 1.) $x^2 + p\,x = q$ alakban, és ekkor egy pozitív gyök van; 2.) $x^2 + q = p\,x$ alakban, amikor két pozitív gyök is létezhet. De ez az esetszétválasztás reménytelenné vált a harmadfokú egyenlet esetében, ezért inkább bevezették a negatív számokat.

Kvaterniók

Elérkeztünk utunk utolsó állomásához, a *kvaterniókhoz.* William R. Hamilton ír származású fizikus és matematikus (a mechanika és az optika egyik legnagyobb művelője) szerette volna a kétdimenziós komplex számokat háromdimenziósra általánosítani. Sokáig eredménytelenül próbálkozott, amikor is 1843. október 16-án egy séta során megtalálta a megoldást, igaz, három helyett négy dimenzióban. Legyen az i képzetes gyökhöz hasonlóan a j és a k is ilyen gyök, a következő tulajdonságokkal: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, kiegészítve az $ij = k$, $ji = -\,k$ stb. tulajdonságokkal. Figyelem: a kvaterniókra már nem igaz a szorzás kommutativitása (felcserélhetőség): $ij = -\,ji$!

Az i, j, k alapelemekre vonatkozó szorzási szabály megértésében segíthet a két *térbeli* vektor vektoriális szorzatának körvonalazása, ezt a matematikusok mellett a fizikusok is használják, például a forgatónyomaték definiálásakor. Képletben: az $a = (a_1, a_2, a_3)$ és a $b = (b_1, b_2, b_3)$ vektor *vektoriális szorzata* $a \times b = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$.

A képletből könnyű belátni, hogy $a \times b = -\,b \times a$, tehát két vektor vektoriális szorzása nem kommutatív művelet! Első látásra furcsa lehet az is, hogy ha egy vektort önmagával szorzunk vektoriálisan, akkor nullát kapunk: $a \times a = 0$.

Visszatérve kvaternióinkhoz, az $ij = k$, $ji = -\,k$ stb. szabályokat úgy lehet szemléletesen elképzelni, mint az első két térbeli egységvektor vektoriális szorzatát. De a hasonlat sántít, mert $i^2 = -1$, míg például az i-nek megfelelő az (1, 0, 0) egységvektor önmagával vett vektorszorzata 0.

Tetszőleges kvaterniót felírhatunk

$z = a + bi + cj + dk$

alakban. Az összeadás egyszerűen elemenként értendő, de a szorzás definiálásához már 16 tagot kellene összevonnunk, ettől eltekintünk. (Egyébként itt lép be a háromdimenziós vektorok skaláris és vektoriális szorzata, a fizikai alkalmazás alapja, lásd Wikipédia). Megjegyezzük, hogy kvaterniókkal éppen úgy lehet osztani is, mint a valós vagy komplex számokkal, csak különbséget kell tenni a balról és a jobbról osztás között. Külön érdekesség, hogy a háromdimenziós fizikai alkalmazásokban a négy összetevő közül épp a valós összetevőt hagyjuk el.

Történelmi adalék, hogy Hamilton hatalmas küzdelmet folytatott a kvaterniók elismertetésért. Bármilyen nagy tudós volt egyébként, ebben valószínűleg tévedett: a kvaterniók hasznossága mindmáig messze elmarad a komplex számokétól.

Összegzés

Rövid írásunkban középiskolás szinten bemutattuk a számkörök fokozatos kialakulását. Az egyszerű természetes és racionális számoktól viszonylag gyorsan eljutottunk a negatív és az irracionális számokig. A komplex számokhoz vezető utat már csak vázoltuk, és a kvaterniókról csak éppen megemlékeztünk. Aki a kérdéskör teljes leírására kíváncsi, annak több tucat oldalt kell elolvasnia.

A modern, axiomatikus leírás azt hangsúlyozza, hogy a bemutatott számkörök elvben elménk szüleményei, bár szorosabb vagy lazább kapcsolatban állnak a természettel. Meg kell adnunk az illető struktúra axiómáit, és meg kell konstruálni a struktúra reprezentációját. Ilyen értelemben a képzetes számok ugyanolyan reálisak, mint a valós számok vagy fordítva: a valós számok ugyanolyan imagináriusak, mint a képzetes számok. A nem matematikus olvasó számára elegendő, ha leszűri magának: a legegyszerűbbnek látszó dolgok sem olyan egyszerűek, mint gondolja; de a legbonyolultabb dolgok is valamilyen szinten elmagyarázhatók. ◇