HÁGEN ANDRÁS

# A háborúk modellezése
# Matematika a hadviselésben

A 2022-es évben az ukránok és az oroszok közötti kommunikációs háború valós konfliktussá alakult. Az oroszok számbeli és technikai fölényét többé-kevésbé sikerült Ukrajnának kivédenie. De vajon milyen technikával mit alkalmaztak az ukránok az oroszokkal szemben, hogy sikeres legyen a honvédő háborújuk. Nem elég a nyugati haditechnikai segítség, mert azt a nagy számok törvénye értelmében az oroszok felülírnák.

Az emberiség történetében már voltak nagy emberáldozatot követelő csaták, és ezek felhasználásával matematikai formába öntötték a múltban alkalmazott harcászati modelleket. A következőkben ezeket fogom ismertetni.

A nagy emberáldozatot követelő háborúkban célszerű matematikai úton előrejelzést készíteni a csata alakulásáról. A Lanchester-féle (1913) négyzetes törvény a mai hadviselésnek azt a jellemzőjét tükrözi, hogy egy harcoló egység sok ellenséggel végezhet, miközben egyszerre több oldalról támadják. Ha a közelharcban minden katona csak egy katonával harcol, akkor nem érvényesül a négyzetes törvény. Abban az esetben, ha a közelharc összecsapáshoz hasonlít, ahol a támadók küzdenek az ellenféllel szemben, akkor érvényesül a szabály.

Lanchester-féle alapmodellből kiindulva Willard és Fain modelljeikben a kisebb harctéri csapatok összecsapását tartják fontosnak. Ugyancsak a Lanchester-modellből kiindulva a Gerilla-modell lényege a „rejtőzködő” partizán hadviselés (irreguláris), amelyet a Willard-, és a Fain-modellhez hasonlóan nagy létszámú hadsereggel nem lehet végezni.

A Kevert-modellt ötvözték a Gerilla-, és Lanchester-modellel. E modellben a frontális összecsapást erőltető hadseregek és a Gerilla harcmodort (irreguláris erők) gyakorló csapatok matematikai tulajdonságait mutatja be.

*(A modellezés története)* Közel 1914 óta tartják fontosnak a harcászati vezetők a matematikai modellek bevezetését a fegyveres konfliktusokba. Fredrick William Lanchester matematikai eszközökkel kezdte tanulmányozni, hogyan lehet kapcsolódó feladatok sorozatait a leghatékonyabban megoldani, amivel matematikai bepillantást nyerhetünk a háború színházába. Lanchester az első elemzését 1916-ban állította fel, amelyek olyan egyszerű matematikai egyenlőtlenségeket mutatnak meg két hadsereg közötti összecsapásról, amelyeket katonai stratégiai szakértők napjainkban is figyelembe vesznek. A második világháború alatt az amerikai légierő alkalmazta Lanchester modelljét, annak ellenére, hogy a modell működési hatásfoka igen alacsony volt.

A digitális számítógépek hódításával egyre bonyolultabb Lanchester-típusú differenciál modelleket fejlesztettek ki (Bonder 1981), azonban ezeknek a modelleknek a hátulütője volt az, hogy nem rögzítette a sok, nem számszerűsíthető szempontokat a harctéren. De mindennek az alapja Lanchester egyszerű megfigyelése. Olyan érdekes dolgok derültek ki, amelyek megkönnyítették az egyre kifinomultabb modellezést.

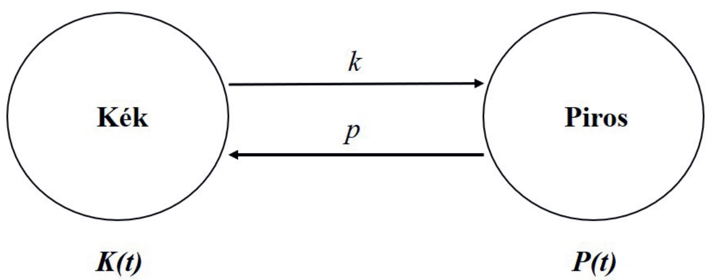
Ezt a modellt célszerű alkalmazni annak érdekében, hogy elkerüljük a nagy veszteséget. A legjobb harcászati taktika az, ha a katonai műveletet úgy tervezzük meg, hogy a megfelelő mennyiségű katona teljesíti a missziót. A taktika arra is vonatkozik, hogy megfelelően legyen elosztva az ember- és hadianyag is, ezzel is jobb minőségű harci erő alakul ki. Mivel a harci erő relatív, ezért célszerű a taktikába beleszámítani az egység erő arányát is, amivel véghez lehet vinni a küldetést.

Tudni szeretnék, hogyan változik a harcban álló felek egységeinek alakulása az idő múlásával. Az egységek lehetnek például katonák, tankok vagy ágyúk. Lanchester még két hatékonyságot mérő változót is bevezetett, azokra az egységekre, amelyeket az ellenfél képes elpusztítani. Feltételezte, hogy az egységek fogyása mindkét oldalon arányos a szemben álló egységek számával és hatékonyságával. E szisztémával képet kaphatunk az egységünk létszámáról, vagyis, hogy szükséges e erősítés ahhoz, hogy elvégezze katonai egységünk a missziót.

**Lanchester-féle modell**

Lanchester modelljének célja az emberveszteség lemorzsolódásának dinamikus modellezése. Ennek vizsgálatához azt vette alapul, hogy a két tábor homogén (hasonlóak a fegyverek mindkét táborban) erőket vetett be.

Legyenek az egyik oldalon a kékek, míg a másik oldalon a pirosak. Az időt onnan kezdjük mérni ($t = 0$ időponttól) amikor összecsap a két tábor. Tudni szeretnénk, hogyan változik a harcban álló felek egységeinek a száma az idő múlásával. Ezt *K(t)*-vel és *P(t)*-vel jelöljük (1. ábra).




**1. ábra Lanchester-modell a harcban (Johnson 1989)**

Lanchester még két hatékonyságmérő változót vezetett be. Jelölje az 1. ábra alapján k és p azon egységek számát, amennyit az ellenfél el tud pusztítani. Azt feltételezzük, hogy a szembenálló egységek fogyása mindkét oldalon arányos a szembenálló egységek számával és hatékonyságával. Ezt leírhatjuk differenciálegyenlet formájában.

$$\frac{dP}{dt} = -k \times K \qquad (1)$$

$$\frac{dK}{dt} = -p \times P \qquad (2)$$

A két egyenlet összevonásával a következő összefüggést kapjuk:

$$p \times P^2 - k \times K^2 = D \tag{3}$$

ahol *D* állandó mennyiség.

Ez a képlet megmutatja, hogy az oldalak összes hadereje a bennük lévő egységek számával négyzetesen, a hatékonyságukkal pedig egyenesen arányos. E szerint meg kell négyszerezni egyes katonák vagy hadi eszközök hatékonyságát, ha az ellenfélnek kétszer annyi egysége van. Ebből az is következik, hogy az ellenfél erőit kisebb csoportokra szórjuk, illetve megakadályozzuk, hogy ismét egységes haderő legyen.

A Lanchester-féle négyzetes törvény napjaink hadviselésének jellemzőit is tükrözi. Mégpedig azt, hogy egy harcoló egység sok ellenséggel végezhet, miközben több oldalról támadják. Ha olyan közelharc alakul ki, hogy minden katona csak egy ellenféllel küzd meg, akkor a végeredmény a $pP$ és $kK$ közötti különbségtől függ, nem a $pP^2$ és $kK^2$ közötti differenciáltól. Amikor mindenki küzd minden ellenféllel szemben, akkor érvényesül a négyzetes törvény. Ha az ellenfélnél van a túlerő, azt el kell kerülni, legalábbis abban az esetben, ha a két haderő fegyverzete ténylegesen homogén.

Nézzük meg a gyakorlatban, hogyan működik a négyzetes törvény. A csata kezdetén a *p, P, k* és *K* számokból ki lehet számolni a *D* állandót. Ha pozitív, $pP^2$-nek mindig nagyobbnak kell lennie $kK^2$-nél, és *P* soha nem csökkenhet nullára. A csata végén, ha az egységek egyformán hatékonyak ($p$=$k$), a túlélők száma az egyes oldalakon lévő egységek négyzetének különbségének négyzetgyöke lesz (Barrow 2015). Ha például $P$=3 és $K$=2, akkor ($3^2$–$2^2$ = 5, aminek a négyzetgyöke ~) 2,24 túlélő lesz.

## Willard-féle modell

A hatékony és sikeres katonai műveletek miatt számos kutató és elemző foglalkozott ezen teória igazolásával és továbbfejlesztésével.

Willard (1962) egy elég átfogó és időben is kiterjedő elemzéssel figyelte meg Lanchester négyzetes törvényét. A szárazföldi csatákat vizsgálta meg 1618-tól egészen 1905-ig bezáróan. A katonai adatokból próbált következtetni, hogy a Lanchester-féle modell milyen általános tulajdonságát mutatja meg a csatának.

Az elemzések során Willard két különböző kategóriába sorolta a csatákat, amelyek közül az elsőbe sorolta az előcsapatok általi agressziót, míg a másodikba a megerősített pozíciós harcokat. A történelmi adatok szerint Willard okfejtése ezekre a kategóriákra épül. Willard egyenlete a Lanchester-féle egyenletre épül, néhány matematikai manipulációval. A kidolgozott egyenlet:

$$\log\left(\frac{nc}{mc}\right) = \log E + y \times \log\left(\frac{mo}{no}\right) \tag{4}$$

Ahol *nc* a kékek vesztesége, *mc* a pirosak vesztesége, *no* a kékek létszáma az elején, *mo* a pirosak száma az elején, *E* a halálozások számát jelöli a harc közben, és $\gamma$ ez határozza meg a megfelelő törvényre hasznosított paramétert.

Willard egyenlete bizonyítja az egységek harci ereje és a sérülések (halálozások) közötti arányok kapcsolatát. A gamma értékének pedig bizonyos mennyiségű átváltási arányt kell hogy adjon az előbb említettek esetében.

Willard feltételezte, hogy ha a csata lineáris – azaz mindenki csak eggyel harcol – akkor $\gamma = 0$, ha viszont szabályos csetepaté alakul ki, akkor négyzetes törvény érvényesül

($\gamma$ = 1). Azonban feltételezése szerint egy-egy csatában nem alakul ki tisztán lineáris és négyzetes törvény jellegű ütközet, ezért célszerű $\gamma$ értékét 0 és 1 közé tenni.

A számításokat követően azt kapta, hogy az eredmény -0,27 és -0,87 köztes száma -0,5. Azonban Willard nem értett egyet az eredménnyel. Véleménye szerint $\gamma < 0$, a sérült csak hátráltatja az egységet, hiszen energiát von el a többiektől. Ebből következően Willard értelmezése ellenkezik Lanchester véleményével, a kisebb erők kevesebb veszteséget produkálásáról. Ebből következően Willard munkája más tekintetben volt jelentős.

### Fain-féle modell

Willardot követően Fain vizsgálta meg Lanchester-modelljét. Fain (1974) hatvan második világháborús szárazföldi csatát vizsgált meg, amelyek viszonylag rövid időtartamúak (max. 3 nap) voltak. Érvelése szerint a rövid időtartamú csatákkal sikeresebben lehet kimutatni a Lanchester-féle modellek helyességét.

Fain logikájának az volt az alapja, hogy az egységek harctéri erő aránya nem eléggé leíró, és nem számolt a többi operatív tényezővel, mint például a kibernetikai, a fizikai és az erkölcsi tényezőkkel.

Fain elemezte Willard munkáit, és kialakította a regressziós analízist, amely így néz ki:

$$\log\frac{nc}{mc} = \log E + log\frac{mo-mc}{no-nc} \tag{5}$$

A változók megegyeznek a (4) egyenlettel. Fain javult Willardhoz képest, hiszen a $\gamma$ értéke – 0,413 lett (DuPuy 1977).

### Gerilla-modell

A bemutatott három modellen kívül napjainkban egy másik nagyon népszerű harci modell is fontossá vált. E modellnek is az alapja a Lanchester-féle modell. Ezt modellt úgy is nevezik, hogy „gerilla-modell”:

$$\frac{dp(t)}{dt} = -бk \times p(t) \times k(t); p(0) = P \tag{6}$$

$$\frac{dk(t)}{dt} = -бp \times p(t) \times k(t); k(0) = K \tag{7}$$

ahol $P$ az első számú piros egységek, $p(t)$ operatív piros egységek $t$ időpontban, $\delta p$ detekciós arány egy akció kész piros egység és egy akció kész kék egység között, $K$ első számú kék egység, $k(t)$ kék egységek $t$ időpontban és $\delta k$ detekciós arány egy bevethető kék egység és egy tetszőleges piros egység között (Deitchman, S. J. 1962).

Ez a modell is két homogén harctéri egységet tárgyal. Továbbá azt mutatja meg, hogy az összes bevetett erő képes megölni az összes működő egységet. Valójában ez a modell a gerilla harcmodorra jellemző, „ha észrevesznek, akkor halott vagy” szisztémát követi. Egyetlen korlátozó felismerési jöhet számításba: a felderítés. A tűzerő és a harci morál megegyezik. Ez a modell is irreális, hiszen harci helyzetben nehéz pontos felderítést végezni a döntő tényezők alakulásáról.

A „gerilla-modellre” egyformán fontos a szemben álló és harcoló felek minősége és mennyisége.

Gyakran feltételezik, hogy ez egyfajta középértéket mutató modell. A csökkenő számú műveleti egységek esetén romlik a logikai felépítése. Ha a szervezeti egységek száma kevesebb lesz, akkor – tételezzük fel, hogy egynél kisebb – a modell összeomlik. Igaz az egységek száma nem válik negatívvá.

**Kevert-modell**

A bemutatott modellek hasznosnak bizonyulnak. Napjaink harcászati eseményei sokkal inkább hasonlítanak egyik fél részéről a Lanchester-féle modellhez és a Gerilla-modellhez.

Így tehát, ha keverjük a „gerilla-modellt" és a Lanchester-féle modellt. A következő matematikai kifejezést kapjuk:

$$\frac{dp(t)}{dt} = -kK \times k(t) \qquad p(0) = P \tag{7}$$

$$\frac{dk(t)}{d(t)} = -бp \times k(t) \times p(t) \qquad k(0) = K \tag{8}$$

ahol *P* az első számú piros egységek, *p(t)* operatív piros egységek *t* időpontban $\delta_p$ detekciós arány egy akció kész piros egység és egy akció kész kék egység között, *K* első számú kék egység, *k(t)* kék egységek t időpontban $\kappa_k$ ölési szám egy kék egység számára a pirosak ellen (Christensen, T.–Clausen, S. 1984).

E modell szintén két homogén katonai egységet tárgyal. Az értelmezés szerint a pirosak nyílt terepen haladnak át és keresik a harcot a kékek ellen. A kékek védekező pozícióból támadnak vissza a pirosaknak, rejtett és álcázott pozíciójukból. A pirosak számára az egyetlen korlátozó tényező a felismerési arány, míg a kékek számára a tűzerő.

A vegyes modell a kékek számára elsősorban minőségi különbségre hegyezi ki a figyelmet a mennyiségbeli különbség nélkül, míg a pirosak számára a mennyiségi és a minőségbeli tényezők is egyaránt fontosak.

*(A modellek összegzése)* Az elméletek fő feladata, hogy elemezzék a harcászati egységek fő jellemzőit, mint például az alkalmazott eszközöket, illetve megmutatni azok várható hatását. Ezért is célszerű a hadviselés minden fázisát pontosan elemezni, ill. vizsgálni.

A bemutatott öt modell alapja minden esetben a determinisztikus Lanchester-féle modell. A NATO katonai egységei a Lanchester-féle – esetleg a Kevert-modellt – használják, bár célszerű figyelembe venni a harc alakulását, és úgy választani a meglévő modellek közül.

Az ötből három modell alapvetően mennyiségi emberi anyaggal számol, míg a Gerilla-modell alapvetően minőségbeli különbséget vizsgál. A kevert modell ötvözi a minőségi és mennyiségi kritériumokat is a harcban.

A második világháború során a legnagyobb magyar veszteség a Don-kanyarban fordult elő. Tételezzük fel, hogy mind a magyar, mind a szovjet katonai csapatok homogének voltak. Ha megvizsgáljuk e csatát a modellek szerint, akkor arra juthatunk, hogy a szovjetek nem katonai eszközökben múlták felül a magyar katonákat, hanem mennyiségben is, azaz a Lanchester-féle négyzetes modell érvényesült.

Európára – és köztük hazánkra is – a kevert modell az érvényes, hiszen a terroristák (kékek) pozíció harcot vívnak az Európai Unióval (pirosakkal), és ez egészen addig megy, amíg a pirosak fel nem számolják a kék egységeket.

Napjainkban az egyik legaktuálisabb harcászati esemény az ukrán–orosz katonai akció. Az oroszok igyekeznek a klasszikus Willard-féle modellt alkalmazni, míg az ukrán haderő a gerilla-harcmodort és a Lanchester-féle modell ötvözéséből kialakított kevert-harcmodort alkalmazza, elég nagy sikerrel.

## IRODALOM


Barrow, J. D. 2015: 100 alapvető dolog a matematikáról és a művészetről, amiről nem tudtuk, hogy nem tudjuk. – Akkord Kiadó, 183–185.

Bonder, S. 1981: Mathematical modelling of military conflict situations, in: Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, Volume 25, 1981, pp. 1–51.

Christensen, T.–Clausen, S. 1984: Defence dynamics – predictions of war outcomes and evaluation of force structures, in: R. K. Huber (ed.): Systems Analysis and Modeling in Defense, Plenum Press, New York 1984, pp. 93–112.

Deitchman, S. J. 1962: A Lanchester model of guerrilla warfare, Operations Research, Vol. 10 (1962), pp. 818–827.

DuPuy, T. N. 1977: The Lanchester Equations: Lanchester's Original Article with a Commentary by Trevor N. DuPuy. – History. Numbers. and War (Fall 1977), p 149.

Fain, J. B. 1977: Lanchester Equations and Historical Warfare. – History. Numbers. and War (Spring 1977), p 34.

Johnson, R. L. 1989: Lanchester's Square Law in Theory and Practice. – School of Advanced Military Studies United States Army Command and General Staff College Fort Leavenworth, Kansas, 55.

Lanchester, F. W. 1956: Mathematics in Warfare. – Thi World of Mathematics. New York; Simon and Schuster. v4.

Lanchester, F. W. 1916: Aircraft in Warfare: The Dawn of the Fourth Arm. – Constable and Company, London 1916.

Willard, D. A. 1962: Lanchester As A Force in History: An Analysis of Land Battles of the Years 1618–1905. McLean, Va: Research Analysis Corp.