BADICS TAMÁS

# Arbitrázs, kockázattal szembeni attitűd és az eszközárazás alaptétele

**Az arbitrázselmélet egyik legfőbb vonzereje abban áll, hogy explicit módon nem hivatkozik a befektetők preferenciáira. Ez azonban nem jelenti azt, hogy implicit módon nem tételez fel semmit a preferenciákról. Azt szokás mondani, hogy az arbitrázsmentesség feltétele a befektetők preferenciáira vonatkozólag csak a monotonitást követeli meg. Kevésbé ismert azonban, hogy az arbitrázsmentesség folytonos idejű modellekben használatos szigorításai, így a „nincs ingyenebéd" és a „nincs elhalványuló kockázat melletti ingyenebéd" feltételek implicit módon milyen megkötéseket tartalmaznak a befektetők preferenciáira vonatkozóan. Cikkem egyik célkitűzése, hogy áttekintse azokat az eredményeket, amelyek arról szólnak, hogy az arbitrázsmentesség feltétele – illetve annak a különféle modellekben foglalt megfelelője – milyen, a preferenciákra vonatkozó feltételekkel helyettesíthető. Az ismertetett eredmények közül az egyik legérdekesebb az az állítás, miszerint a krepsi „nincsen ingyenebéd" fogalom bizonyos értelemben kockázatkerülő befektetőt feltételez. Az eredmények puszta ismertetése mellett cikkemmel arra szeretném felhívni a figyelmet, hogy egy preferenciákon alapuló megközelítésben a pénzügyi matematika néhány klasszikus és mély matematikai állítása egészen új, közgazdasági interpretációt nyer.**

## 1. ARBITRÁZSMENTESSÉG ÉS AZ ALAPTÉTEL

Véges valószínűségi mezőt feltételezve, akkor mondjuk, hogy egy pénzpiacon nincs arbitrázs, ha nem létezik olyan kereskedési stratégia, amelynek révén zérus kezdeti vagyonból kiindulva, pozitív valószínűséggel nyerhetünk a veszteség kockázata nélkül. Mondanivalónk szempontjából kiemelt jelentőségű az ún. pénzügyi eszközök árazásának alaptétele, amely arra ad választ, hogyan tudjuk matematikailag karakterizálni azokat a modelleket, amelyekben nem létezik arbitrázs.

Az állítás kimondásához szükségünk van a martingál fogalmára, amely a sztochasztikus folyamatok egyik speciális osztályát jelöli. Egy sztochasztikus folyamat martingál, ha tetszőleges $t > s$ időpontokra teljesül, hogy a sztochasztikus folyamat $t$-edik időpillanatbeli értékének az $s$-beli információk alapján vett várható értéke megegyezik a folyamat $s$-beli értékével.

A martingáltulajdonság lényege legegyszerűbben a számegyenesen vett véletlen bolyongás fogalmából kiindulva érthető meg. Képzeljük el, hogy az origóból kiindulva, minden periódusban egyenlő valószínűséggel vagy jobbra, vagy balra lépünk egyet. Ekkor minden $t$-re a $t$-edik időpontbeli helyzetünk egy valószínűségi változó. Ha történetesen a $t$-edik időpillanatban a számegyenes $a$ pontjában vagyunk, akkor a $t$-edik időpillanatban a $t + 1$-edik pillanatbeli helyzetünk várható értéke éppen *a* lesz, és ez természetesen független attól, hogy hogyan jutottunk az *a* helyzetbe. A pénzügyi eszközök árazásának alaptétele[1] – kissé pongyolán megfogalmazva – azt állítja, hogy egy értékpapírpiacon akkor nincs „arbitrázs", ha létezik egy, az eredetivel ekvivalens valószínűségi mérték[2], amelyre vonatkozóan az értékpapírok diszkontált árait leíró folyamat egy bizonyos értelemben „martingál"; vagyis létezik olyan új valószínűségi mérték, amely alatt pénzügyi eszközök segítségével nem lehet szisztematikusan átlagban nyerni. Hogy egészen pontosak legyünk, az állítás ebben a formában inkább csak egy alapelv, amelyik akkor válik ténylegesen igazolható állítássá, ha pontosan definiáljuk az „arbitrázsmentesség" és „martingál" fogalmat. Ha a martingálmérték egyértelmű, akkor az egyfajta árfunkcionál szerepét tölti be, mivel a kockázatos kifizetések jelenlegi ára éppen a diszkontált kifizetés martingálmérték szerinti várható értéke lesz. Mivel a korai szakirodalomban a martingálmérték mint árazó funkcionál jelenik meg, és az alaptétellel összefüggésben a martingál fogalmának használata csak a hetvenes évek végétől vált általánossá, ezért martingálmérték helyett az egyszerűség kedvéért időnként inkább árazó funkcionálra fogunk hivatkozni.

A martingálmérték létezéséről szóló első állítást *M. Harrison* és *S. R. Pliska* [1981] bizonyítja arra az esetre, amikor a valószínűségi mező végesen generált. Azóta a tételnek számos általánosítása született.[3] Ezek közül az egyik legismertebb a *Dalang–Morton–Willinger*-tétel (l. Dalang–Morton–Willinger [1990], egy modernebb feldolgozásban: *Medvegyev* [2006], l. még: Medvegyev [2002]), ami már teljesen általános valószínűségi mezőből indul ki, de felteszi, hogy az időparaméter diszkrét, és az időhorizont véges. Sajnos, általánosabb modellekben az arbitrázsmentesség megkötése nem feltétlenül biztosítja a martingálmérték létezését, ezért pl. végtelen időhorizont vagy folytonos kereskedés esetén szükségünk van az arbitrázsmentességnél erősebb, topológiai megkötést is tartalmazó *nincs ingyenebéd* vagy a *nincs elhalványuló kockázat melletti ingyenebéd*[4] feltételekre.

Folytonos idejű modellben először *Kreps* [1981] igazolta azt az állítást, hogy a nincs ingyenebéd feltétel egyenértékű az ekvivalens martingálmérték létezésével. Bár Kreps ezen

1 A „fundamental theorem of asset pricing" elnevezést a fentihez hasonló értelemben először P. H. Dybvig és R. A. Ross [1987] használta.

2 Két mérték ekvivalenciája azt jelenti, hogy mindkét mérték szerint ugyanazok a nullmértékű halmazok.

3 A fontosabb eredmények egy áttekintése megtalálható Delbaen–Schachermayer [1994]-ben.

4 Elhalványuló kockázat melletti ingyenebédről akkor beszélünk (l. Delbaen–Schachermayer [1994]), ha egy pozitív valószínűséggel pozitív, de semilyen kimenetel esetén sem negatív kifizetés kereskedés révén tetszőlegesen és egyenletesen közelíthető, vagyis létezik egy olyan fenti tulajdonságú kifizetés, hogy tetszőleges $\varepsilon$-hoz létezik egy olyan kereskedési stratégia, amely nulla valószínűségi halmaztól eltekintve, minden kimenetel esetén $\varepsilon$-nál jobban közelíti az adott kifizetést, speciálisan a lehetséges veszteségek maximuma is kisebb marad mint $\varepsilon$. Matematikai megfogalmazásban, kissé leegyszerűsítve, ezt úgy is lehet mondani, hogy egy nemnegatív és pozitív valószínűséggel pozitív kifizetés akkor elhalványuló kockázat melletti ingyenebéd, ha az benne van a kereskedéssel előállítható kifizetések halmazának $L^{\infty}$-topológia szerinti lezártjában. Az ingyenebéd fogalma ettől annyiban különbözik, hogy az abban megkövetelt közelítés nem feltétlenül egyenletes, hanem az ún. gyenge csillag topológiában értendő, vagyis egy nemnegatív és pozitív valószínűséggel pozitív kifizetés akkor ingyenebéd, ha az benne van a kereskedéssel előállítható kifizetések halmazának gyenge csillag topológia szerinti lezártjában. A gyenge csillag topológia sajnos egy bonyolult matematikai konstrukció, aminek a használatát Kreps nem tudta közgazdaságtanilag interpretálni.

eredménye már általános szemimartingál[5]-modellekre is könnyen általánosítható[6], az ebben szereplő nincs ingyenebéd fogalom sajnos közgazdaságtanilag nehezen interpretálható. Szemimartingál-modellekre a probléma kielégítőnek tekinthető megoldását végül is *F. Delbaen* és *W. Schachermayer* adja meg (l. Delbaen–Schachermayer [1994], a tétel egy feldolgozása megtalálható *Badics*–Medvegyev [2009]-ben). Ez utóbbi eredmény – amely szerint egy lokálisan korlátos szemimartingál-modellben a nincs elhalványuló kockázat melletti ingyenebéd egyenértékű az ekvivalens lokális martingálmérték létezésével – a pénzügyi matematika egyik csúcsteljesítménye.[7] Bizonyítása igen hosszadalmas, és a funkcionálanalízis, valamint a sztochasztikus folyamatok – *P. A. Meyer* és a strassbourgi iskola matematikusai által a 60-as évek végétől kezdve kidolgozott – általános elméletének[8] mély eredményeit használja.

F. Delbaen és W. Schachermayer eredménye széles körben ismert, és számos szerző hivatkozza (l. pl. *Elliott–Kopp* [2005], *Karatzas–Shreve* [1998] és *Király–Száz* [2005]), azonban a felhasznált mély matematikai apparátus miatt annak bizonyítása a közgazdász számára nehezen megközelíthető. Kevésbé ismert azonban, hogy az alaptételnek létezik egy közgazdaságtanilag a Delbaen–Schachermayer-tétellel azonos tartalmú és mélységű, *Frittelli* nevéhez fűződő változata (l. Frittelli [2004]), amely az arbitrázsmentességnek a preferenciák segítségével történő karakterizációján alapul, és bizonyítása jóval egyszerűbb matematikai eszközöket igényel. A továbbiakban megmutatjuk, hogy ez az állítás és a Frittelli által bevezetett, ún. piaci ingyenebéd fogalma az arbitrázsmentesség és a preferenciák viszonyának megértéséhez kulcsfontosságú.[9]

## 2. Az arbitrázsmentesség és a preferenciák viszonya

A nincs arbitrázs megkövetelése a pénzügyekben széles körben elfogadott, és közgazdaságtanilag is indokolt, hiszen az arbitrázslehetőség létezése kizárná mind az egyensúly létezését, mind a befektető haszonmaximumának elérését, ugyanis egy arbitrázslehetőség létezése esetén a költségvetési korláttól függetlenül, bármely állapotban az arbitrázslehetőség kihasználásával lehetőség nyílik a hasznosság növelésére. Mivel az arbitrázslehetőség minden monoton preferenciarendezéssel rendelkező befektető számára lehetetlenné teszi a haszonmaximum elérését, ezért az arbitrázsmentesség kritériuma mögött nyilvánvalóan

5 A szemimartingálról elegendő annyit tudnunk, hogy az a sztochasztikus folyamatoknak egy meglehetősen általános osztályát jelöli, amely magában foglalja pl. a Poisson-folyamatokat, az Itô-folyamatokat és diffúziós folyamatokat, és ugyanakkor a legáltalánosabb sztochasztikus folyamat, amely szerint egy viszonylag jó tulajdonságokkal rendelkező sztochasztikus integrált lehet definiálni.

6 Erre az eredményre a továbbiakban Kreps–Yan-tétel néven fogunk hivatkozni.

7 A Bichteler–Dellacherie-tételből tudjuk, hogy a szemimartingál a legáltalánosabb sztochasztikus folyamat, amely szerint egy viszonylag jó tulajdonságú sztochasztikus integrál definiálható, ezért a Delbaen–Schachermayer-tétel a maga nemében egy igen általános állítás.

8 Az elmélet egy alapos tankönyvi feldolgozása: Medvegyev [2007], magyar nyelven: Medvegyev [2004].

9 Az alaptétel elemi szintű tárgyalása megtalálható pl. Pliska [1997], Medvegyev [2002], Medvegyev [2009] művekben (utóbbi talán a tétel legelegánsabb, egy egyszerű dualitási technikán alapuló bizonyítása), az alaptételen alapuló kockázatsemleges árazás módszeréről közérthetően Száz [1999] és Száz [2009]-ben olvashatunk, továbbá a kockázatsemleges árazásnak a kamatlábmodellekre való alkalmazásával kapcsolatban érdekes adalékokat találhatunk a nemrégiben megjelent Medvegyev– Száz [2010] könyvben.

meghúzódik az a preferenciákra vonatkozó előfeltevés, amely szerint a befektető számára a több, az jobb, vagyis a befektető monoton preferenciarendezéssel rendelkezik. Ez utóbbi állítás magyarázatában azonban a legtöbb szerző (l. pl. *Dybvig–Ross* [1987]) nem megy túl a fenti ténymegállapításon, és kevésbé ismertek azok az eredmények, amelyek formalizáltan vizsgálják azt a nem triviális kérdést, hogy az arbitrázsmentesség és az azzal rokon, erősebb feltevések burkoltan milyen megkötést eredményeznek a befektetők preferenciájára vonatkozóan. A továbbiakban megszületésük időrendjében mutatjuk be azokat az eredményeket, amelyek az arbitrázs és a preferenciák kapcsolatának a megértéséhez közelebb visznek. Mivel az arbitrázsmentesség feltételezése egyenértékű az árazó funkcionál létezésével, ezért először azt vizsgáljuk, hogy a preferenciákból milyen módon származtatható az árazó funkcionál. Ehhez induljunk ki az általános egyensúlyelmélet *Arrow–Debreu*-féle modelljéből.

Mint ismeretes, az eredetileg determinisztikus, általános egyensúlyelméletet a feltételes jószág fogalmának bevezetésével először Arrow [1953] alkalmazta olyan szituáció leírására, ahol a szereplők indulókészletei bizonytalanok, vagyis függenek a megvalósuló világállapottól. Az ötletet később Debreu [1953] általánosította.

Vegyünk egy $M$ számú szereplőből álló cseregazdaságot. Tegyük fel, hogy a gazdaság szereplői $K$ számú jószágot fogyasztanak, és ezekből a jószágokból az egyes egyének rendelkezésére álló mennyiségek a bekövetkező világállapot függvényei, és az állapottér, vagyis a lehetséges világállapotok halmaza egy véges halmaz. Tegyük fel, hogy a gazdaság szereplői kereskedhetnek ún. feltételes jószágokkal, és alkalmazzuk a determinisztikus, általános egyensúlyelméletet a feltételes jószágok piacára. A $k$-adik jószághoz és egy adott kimenetelhez tartozó, egységnyi feltételes jószág egy olyan jog, amely az adott kimenetel esetén egységnyi, minden más kimenetel esetén zérus mennyiségű – feltétel nélküli – $k$-adik jószágot biztosít a jog birtokosának. Úgy is mondhatnánk, hogy a feltételes jószágok valójában a fizikai jószágokra szóló, feltételes követelések. Feltesszük tehát, hogy a gazdaság szereplői az első periódusban – még mielőtt tisztában lennének azzal, hogy ténylegesen melyik világállapot következett be –, kereskedhetnek a feltételes jószágok piacán.[10] Ilyen módon tehát az eredetileg $K$ dimenziós jószágteret egy $KS$ dimenziós jószágtérré bővítettük ki. Tegyük fel, hogy a szereplők mindegyike rendelkezik egy ezen a jószágtéren értelmezett preferenciarendezéssel. Tegyük fel továbbá, hogy a második periódusban az egyes szereplők által a tényleges fizikai – vagyis nem feltételes – jószágokból birtokolt mennyiség függ a kimeneteltől. Ekkor a – determinisztikus – walrasi egyensúly fogalmát a most bevezetett feltételes jószágokra alkalmazva, az ún. Arrow–Debreu-egyensúly fogalmához jutunk, és az általános egyensúlyelmélet szokásos feltevései mellett az egyensúlyi árrendszer létezik. Ha a jószágok közül egyet pénznek tekintünk, akkor az ennek az egységére vonatkozó, a ténylegesen realizálódott világállapottól függő, feltételes követeléseket Arrow–Debreu-értékpapíroknak szokás nevezni. Az $\omega$ kimenetelhez tartozó Arrow–Debreu-értékpapír tehát egy olyan feltételes követelés, amely az $\omega$ kimenetel esetén egységnyi, minden más kimenetel esetén zérus kifizetést biztosít a követelés birtokosának. Az Arrow–Debreu-értékpapírok egyensúlyi árai tulajdonképpen a kimenetelekhez rendelnek számértékeket, amelyek egy korlátos mértéket definiálnak. Ennek a mértéknek a normálásával a kimenetelek árai egy

10 Hangsúlyozzuk, ebben a periódusban nem jószágok, csupán a fenti értelemben vett „jogok” cseréje történik.

valószínűségi mértéket határoznak meg. Ha a valószínűségi mező végesen generált, akkor minden feltételes követelés előállítható az Arrow–Debreu-értékpapírok lineáris kombinációjaként. Ebből következően többek között létezik kockázatmentes értékpapír. Ezek után már könnyen belátható, hogy egy tetszőleges értékpapír első periódusbeli egyensúlyi ára éppen a kockázatmentes értékpapír hozama szerint diszkontált, második periódusbeli lehetséges árainak az imént megkonstruált mérték szerinti várható értéke lesz. Vagyis a mi terminológiánk szerint a diszkontált árfolyam az ily módon definiált, „fiktív" valószínűség szerint martingál.[11] Ezt a mértéket Arrow [1971] kockázatsemleges valószínűségnek nevezi.

Az Arrow–Debreu-értékpapírokkal való kereskedés modellje valójában nem túlságosan életszerű, de a modellnek – az empirikus kezelhetőség szempontjából – van egy nem elhanyagolható következménye. Ha az általános egyensúlyi megközelítés helyett egy parciális egyensúlyi megközelítést alkalmazva feltételezzük, hogy a kereskedett értékpapíroknak nemcsak a második periódusbeli kifizetései, de az első periódusbeli árai is adottak, akkor az említett összefüggésből a martingálmérték már meghatározható. Ha eltekintünk az Arrow–Debreu-értékpapírokkal való kereskedéstől, de feltesszük, hogy a létező értékpapírokkal való kereskedés révén minden lehetséges jövőbeli pénzügyi kifizetés előállítható[12], vagyis elég sokféle értékpapír van a piacon ahhoz, hogy kifeszítsék a logikailag lehetséges kifizetések halmazát, akkor a jövőbeli kifizetések a preferenciáktól – speciálisan a kockázattal szembeni attitűdtől – függetlenül[13] beárazhatóak. (A módszer kritikájáról Medvegyev [2009], Medvegyev [2011] és Száz [2011]-ben olvashatunk.)

Arrow [1953]-ben megjegyzi, hogy a fenti Arrow–Debreu egyensúlyi elosztás megkapható olyan módon, hogy feltesszük, hogy a szereplők az első periódusban csak Arrow–Debreu-értékpapírokkal kereskedhetnek, a második periódusban pedig kereskedhetnek a jószágok piacán. A magyarázat egyszerű. Ha a szereplők kereskedhetnek a második periódusban a fizikai jószágokkal, akkor az első periódusbeli kereskedés egyetlen célja az, hogy a szereplők megosszák a vásárlóerejüket az egyes világállapotok között. Ezzel az eljárással az eredetileg $SK$ számú jószágot tartalmazó, határidős piac már csak egy $S$ számú jószágból álló piaccá zsugorodott. Ahhoz azonban hogy a szereplők ne csak a pénzben mért vásárlóerejüket tudják simítani, hanem a tényleges fogyasztásukat is, előre kell látniuk a második periódusbeli spot árakat[14], és csak akkor beszélhetünk egyensúlyról, ha a szereplők várakozásai konzisztensek a modellel, vagyis egyensúlyban minden egyes kimenetelre vonatkozóan a spot árakra vonatkozó várakozások megegyeznek a tényleges egyensúlyi spot árakkal.

A fenti gondolatot később *R. Radner* [1972] formalizálta és általánosította több periódus esetére. Az ún. Radner-egyensúly abban az esetben is értelmezhető, ha Arrow–Debreu-értékpapírok helyett csak néhány kockázatos értékpapírral kereskedhetnek a gazdaság szereplői; ezáltal a Radner-egyensúly fogalma fontos kiindulópontjává vált mind a pénzpiacok egyensúlyi elméletének, mind a nem teljes piacok elméletének. Megmutatható, hogy a

11 Két időperiódus esetén, ha az első időpontban nincsenek valódi valószínűségi változók, akkor a martingáltulajdonság pontosan azt jelenti, hogy a második periódusban realizálódó valószínűségi változó várható értéke éppen az első periódusban felvett érték.

12 Más szóval feltételezzük, hogy a piac teljes.

13 Egészen pontosan arról van szó, hogy nincs szükség a hasznossági függvények explicit szerepeltetésére, de valójában az arbitrázsmentesség feltétele implicit módon feltételezi a preferenciák monotonitását.

14 Ezeket az árakat természetesen nem tekintjük a modell által adottnak.

martingálmérték ebben az esetben a Radner-egyensúly elsőrendű feltételeiből származtatható. A martingálmérték ebben a modellben azt mutatja meg, hogy adott $\omega$ kimenetel esetére egy pótlólagos egységnyi $\omega$ kimenetelhez tartozó Arrow–Debreu-értékpapír hányszoros haszonnövekményt eredményez az egy pótlólagos egységnyi, első periódusbeli biztos vagyonnövekedés haszonnövekményéhez képest.

Az általános egyensúly-elméleti megközelítésről most térjünk át egy olyan parciális egyensúlyi modellre, amelyben a fent említett, korlátozott számú pénzügyi eszköz ára adott. Ekkor egy teljes modellben az árazási probléma megoldásához a fentiek alapján az egyensúly feltételére nincs szükség, hiszen a martingálmérték – ami egy replikálható követelések terén értelmezett árazó funkcionált reprezentál – a pénzügyi eszközök áraiból már meghatározható. Ehhez csupán fel kell használnunk azt a feltételt, amely szerint tetszőleges értékpapír, speciálisan az összes Arrow–Debreu-értékpapír első periódusbeli egyensúlyi ára éppen a kockázatmentes értékpapír hozama szerint diszkontált, második periódusbeli árának a kockázatsemleges mérték szerinti várható értéke.

Ezzel elérkeztünk egy fontos problémához. Ha az árazó funkcionál meghatározásához sem az egyensúly feltételére, sem a fogyasztók preferenciáira nincs szükség, akkor vajon mi az a konzisztenciafeltétel, ami lehetőleg az egyensúlynál enyhébb megkötést jelent, és egyúttal biztosítja az árazó funkcionál létezését? Ebben az összefüggésben vezetik be az arbitrázsmentesség, illetve általános valószínűségi mező esetén az életképesség és a nincs ingyenebéd fogalmát.

Ross [1978]-ban belátja, hogy az arbitrázsmentesség feltételének teljesülése ekvivalens azzal az állítással, hogy egy, a replikálható követelések terén értelmezett, lineáris funkcionálnak létezik az összes elképzelhető feltételes követelések terére való kiterjesztése, amely szigorúan pozitív, vagyis minden Arrow–Debreu-értékpapírhoz pozitív számot rendel.

Mint említettük, a Radner-féle megközelítésben az árazó funkcionál meghatározásához elegendő csupán a befektetői haszonmaximum elsőrendű feltételét felhasználni. Ez a megfigyelés motiválja az ún. *életképesség* fogalmát (l. *Harrison*–Kreps [1979], Kreps [1981], *Bellini–Frittelli* [2002], *Pliska* [1997] és *Loewenstein–Willard* [2000]). Egy kissé leegyszerűsítve: akkor mondjuk, hogy egy piac életképes, ha létezik egy replikálható kifizetés, és egy ahhoz tartozó – a replikálható kifizetések terén értelmezett – konvex és folytonos preferenciarendezés, amely szerint az adott kifizetés minden más replikálható kifizetéshez képest gyengén preferált. Harrison és Kreps a fent idézett cikkében belátja, hogy egy általános – tehát nem feltétlenül véges valószínűségi mezős – modellben pontosan akkor teljesül az életképesség, ha a replikálható követelések terén értelmezett, lineáris funkcionálnak létezik az összes elképzelhető feltételes követelések terére való szigorúan pozitív, vagyis az Arrow–Debreu-értékpapírokhoz pozitív számot rendelő kiterjesztése, utóbbi pedig ekvivalens azzal, hogy létezik az ekvivalens martingálmérték.

Ezt összevetve Kreps már idézett eredményével, amely szerint az ekvivalens martingálmérték létezése a nincs ingyenebéd feltétellel egyenértékű, azt kapjuk, hogy egy modell pontosan akkor életképes, ha a modellben nincs ingyenebéd. Mivel az életképesség fogalma konvex preferenciákat feltételez, ezért ez az ekvivalencia azt sugallja, hogy a nincs ingyenebéd megkötés valójában kockázatkerülő befektetőket feltételez. Később látni fogjuk, hogy a nincs ingyenebéd fogalom sokkal közvetlenebb módon is kapcsolatba hozható a preferenciák konvexitásával, ehhez azonban az Orlicz-terek elméletét kell segítségül hívni.

## 3. Sztochasztikus dominancia és piaci ingyenebéd

Láttuk tehát, hogy az arbitrázsmentesség feltevése implicit módon annyit feltételez a befektetőkről, hogy preferenciarendezésük monoton, hiszen egy arbitrázslehetőség minden monoton preferenciákkal rendelkező befektető számára kívánatos. Azt is láttuk, hogy az életképesség ekvivalens a nincs ingyenebéd feltétellel, amit úgy is interpretálhatnánk, hogy a nincs ingyenebéd feltétel a preferenciák konvexitását feltételezi. Felmerül tehát a kérdés, hogy létezik-e egy egységes fogalmi keret, amelynek a segítségével az arbitrázsfogalmak közötti eltérések a preferenciák eltérő voltára vezethetők vissza. Kézenfekvő megoldásnak tűnhet a sztochasztikus dominancia mint fogalmi keret használata. Azt mondjuk, hogy egy kockázatos $A$ kifizetés elsőrendben sztochasztikusan dominálja a $B$ kifizetést, ha minden növekvő és folytonos hasznossági függvénnyel rendelkező befektető gyengén preferálja $A$-t $B$-vel szemben. A sztochasztikus dominancia és az arbitrázs kapcsolatát vizsgálja *R. Jarrow* [1986]. Megmutatja, hogy egy teljes piacon pontosan akkor létezik arbitrázs, ha létezik két speciális tulajdonsággal rendelkező eszköz, amelyek közül az egyik egy bizonyos értelemben sztochasztikusan dominálja a másikat. Jarrow konstrukciója meglehetősen bonyolult, de mindenesetre az első olyan próbálkozásnak tekinthető, amely formalizáltan próbál közvelen kapcsolatot teremteni az arbitrázsmentesség és a befektetők preferenciájának monotonitása között.

A sztochasztikus dominancia alapgondolatát fejleszti tovább Frittelli *piaci ingyenebéd* fogalma. Látni fogjuk, hogy a piaci ingyenebéd fogalom a különböző arbitrázsfogalmak[15] lezárásoperátorait meghatározó topológiafogalmaknak a befektetők hasznosságfüggvényeinek analitikus tulajdonságait felelteti meg. A befektető preferenciarendezését alapul véve, azt mondhatjuk: az arbitrázslehetőség azt jelenti, hogy nulla kiinduló vagyonnal kereskedés révén egy olyan véletlen $f$ kifizetéshez juthatunk, amely felbontható egy $w$ nemnegatív és egyúttal pozitív valószínűséggel pozitív értéket felvevő kifizetés és egy olyan $q$ véletlen kifizetés összegére, amelynek a hasznossága – bármely monoton hasznosságfüggvényt alapul véve – legalább akkora, mint az azonosan nulla kifizetésé. Ezt a gondolatmenetet általánosítja Frittelli *piaci ingyenebéd* fogalma.

Ahogy azt korábban láttuk, az arbitrázsmentesség feltétele általános esetben nem garantálja az ekvivalens martingálmérték létezését, ezért egy erősebb feltételre volt szükségünk; ehhez viszont bővítenünk kellett a kizárandó arbitrázs lehetőségek halmazát. A fenti megközelítést figyelembe véve, ez megtehető oly módon, hogy a fenti $f$ véletlen kifizetések esetében csak bizonyos monoton hasznossági függvényekre követeljük meg a fenti tulajdonságot. Ezen a ponton válik el a Delbaen–Schachermayer-féle és a Fritteli-féle megközelítés. Az előbbi ugyanis – mint azt látni fogjuk – a befektetők hasznossági függvényétől csupán a folytonosságot követeli meg, míg az utóbbi a konkavitást is.

A Frittelli-féle piaci ingyenebéd fogalmának definiálásához tehát tételezzük fel, hogy minden befektetőnek létezik egy vagyonra vonatkozó hasznosságfüggvénye, és két kereskedési periódus van, a jelen és a jövő. Ahhoz, hogy a két megközelítés közötti párhuzamot világosan lássuk, érdemes az arbitrázs korábban bevezetett fogalmából kiindulni.

15 Itt az arbitrázst tág értelemben használjuk, tehát az arbitrázsfogalmak az arbitrázst, az ingyenebédet és az elhalványuló kockázat melletti ingyenebédet foglalják magukban.

Egy rövid gondolatmenet erejéig tegyük fel, hogy a valószínűségi mező végesen generált. Jelöljük $L$-el azon feltételes követeléseket, amelyek minden kimenetel esetén nemnegatív és pozitív valószínűséggel pozitív kifizetést biztosítanak a követelés birtokosának. Ha egy $L$-beli $w$ feltételes követelést a jelenben eladnánk, nyilván pozitív jövőbeli bevételhez jutnánk. Felmerül a kérdés, hogy vajon egy alkalmas kereskedési stratégia segítségével „fedezhető-e” a bizonytalan jövőbeli $-w$ kötelezettség? Vagyis létezik-e egy alkalmas, nempozitív kiinduló költségű stratégia, amelynek $f$ eredménye valamilyen értelemben dominálja, fedezi $w$-t? Ebben az esetben egyfajta arbitrázsjövedelemhez jutnánk. Ha vissza akarjuk kapni az eredeti arbitrázsfogalmat, akkor ennek a dominanciának egyszerűen azt kell jelentenie, hogy $f \geq w$, vagyis hogy $f-w$ nemnegatív. Az arbitrázsstratégia létezése tehát ekvivalens egy olyan $L$-beli $w$ elem létezésével, amelyre teljesül, hogy az összes replikálható $f$ kifizetésekre képezve az $f$ és a $w$ függvények különbségének minimumát, ezen minimumok maximuma nem kisebb, mint nulla. Ezen maximális tulajdonsággal rendelkező $f$ kifizetésre nyilvánvalóan az is teljesül, hogy tetszőleges monoton hasznosságfüggvényt feltételezve, az $f-w$ kifizetés várható hasznossága legalább akkora, mint az azonosan nulla kifizetés hasznossága, hiszen ezen várható hasznosságok a különböző világállapotokbeli hasznosságok konvex kombinációja, amelynek egy alsó korlátja a kifizetések minimumának hasznossága; ez a feltevésünk és a hasznosságfüggvény monotonitása miatt nem kisebb, mint a zérus kifizetés hasznossága. Megfordítva: ha valamely $L$-beli $w$-re létezik egy replikálható $f$ kifizetés, hogy bármely monoton hasznosságfüggvényre az $f-w$ kifizetés várható hasznossága legalább akkora, mint a nulla kifizetés hasznossága, akkor az $f$ és a $w$ függvények különbségének minimuma nem kisebb, mint nulla. Ellenkező esetben ugyanis egy olyan monoton hasznosságfüggvényt választva, amely a negatív számokon $-\infty$ értéket vesz fel, de mindenhol máshol véges értéket, erre a hasznosságfügvényre vonatkozólag az $f-w$ kifizetés várható hasznossága $-\infty$ lenne.

A fentiek alapján megállapíthatjuk tehát, hogy $f$ egy arbitrázst reprezentál. Ezek alapján már definiálhatjuk a piaci ingyenebéd fogalmát. Azt mondjuk, hogy egy piacon létezik a *monoton hasznosságfüggvényekre vonatkozó piaci ingyenebéd*, ha létezik egy olyan nemnegatív, de pozitív valószínűséggel pozitív $w$ kifizetés, hogy minden monoton hasznossági függvény és minden, az eredetivel ekvivalens valószínűségi mérték esetén az $f-w$ kifizetések várható hasznosságának szuprémuma – amint $f$ befutja az összes replikálható követelést – legalább akkora, mint az azonosan nulla kifizetés hasznossága. A fenti gondolatmenettel beláttuk, hogy pontosan akkor létezik a monoton hasznosságfüggvényekre vonatkozó piaci ingyenebéd, ha létezik arbitrázs.

Természetesen a fentivel analóg módon definiálható a monoton és folytonos, továbbá a konkáv hasznossági függvényekre vonatkozó piaci ingyenebéd fogalma is. Frittelli [2004] megmutatja, hogy pontosan akkor létezik a folytonos és monoton hasznosságfüggvényekre vonatkozó piaci ingyenebéd, ha létezik elhalványuló kockázat melletti ingyenebéd; ugyanakkor belátja, hogy egy tetszőleges lokálisan korlátos szemimartingál-modellben pontosan akkor nem létezik a konkáv hasznosságfüggvényekre vonatkozó piaci ingyenebéd, ha létezik ekvivalens lokális martingálmérték. Ez utóbbi eredményre a továbbiakban mint a Frittelli-féle alaptételre fogunk hivatkozni.

Ezen a ponton nyilván felmerül az olvasóban, hogy a klasszikus arbitrázsmentességi fogalmak preferenciákkal történő karakterizációját az tenné teljessé, ha a krepsi ingyenebéd fogalmát is sikerülne a Frittelli-féle piaci ingyenebéd fogalmi keretében megadni. Nyugodtan állíthatjuk, hogy ez nemcsak hogy lehetséges, de az eredmény minden várakozásunkat felülmúlja. *Klein* [2005] ugyanis Orlicz-tér módszerekkel azt a meglepő állítást bizonyítja, hogy a krepsi ingyenebéd fogalma éppen a konkáv hasznossági függvényekre vonatkozó piaci ingyenebéd fogalmával egyezik meg.

## 4. Következtetések

Vegyük észre, hogy a nincs ingyenebéd feltevés fent említett Klein-féle karakterizációja révén közgazdaságtanilag interpretálhatóvá vált az az általunk korábban Kreps–Yan-tételnek nevezett állítás, amely szerint egy lokálisan korlátos szemimartingál-modellben a nincs ingyenebéd biztosítja az ekvivalens lokális martingálmérték létezését. Mivel az $L^\infty$ tér topológiája finomabb, mint a nincs ingyenebéd fogalomban szereplő gyenge csillag topológia, ezért a nincs elhalványuló kockázat melletti ingyenebéd feltétel jóval enyhébb, mint a nincs ingyenebéd feltétel. Ennélfogva – az említett könnyebb interpretálhatóság mellett – a Delbaen–Schachermayer-féle bizonyításnak az egyik fontos érdeme az, hogy az ekvivalens lokális martingálmérték létezését egy igen enyhe feltétel mellett biztosítja. Az arbitrázsfogalmak karakterizációja alapján ez úgy is megfogalmazható, hogy a Delbaen–Schachermayer-tétel esetében az implicit módon feltételezett hasznosságfüggvény-osztály bővebb, mint a Frittelli-tételben feltételezett függvényosztály, ezért a folytonos és monoton hasznosságfüggvények szerinti piaci ingyenebédek halmaza szűkebb, mint a konkáv hasznosságfüggvények szerinti piaci ingyenebédek halmaza[16], amiből következik, hogy a nincs konvex hasznosságfüggvények szerinti nincs ingyenebéd feltételből következik a nincs folytonos és monoton hasznosságfüggvények szerinti nincs ingyenebéd feltétel, ennélfogva az előbbi állítás matematikailag mélyebb. A nincs ingyenebéd fogalmának Klein-féle karakterizációja alapján megállapítható továbbá, hogy a Frittelli-alaptétel tulajdonképpen a Kreps–Yan-tételhez hasonló mélységű állítás, és a két állítás ekvivalenciája Orlicz-tér módszerekkel egyszerűen bizonyítható.

Mivel mind a Delbaen–Schachermayer-tétel, mind a Frittelli-alaptétel az ekvivalens lokális martingálmérték létezésének az ekvivalenciájáról szól, ezért a bennük szereplő, két arbitrázsmentességi fogalom valójában ekvivalens. Ezért, ha feltételezzük, hogy valamely pénzügyi piacon az árrendszer – konkáv hasznossági függvénnyel rendelkező befektetőket feltételezve – konzisztens[17], akkor ez a piac a nem feltétlenül konkáv, de folytonos hasznosságfüggvényű befektetők számára már nem tartogat új arbitrázslehetőségeket. A Delbaen–Schachermayer-féle elmélet egy érdekes mondanivalója tehát az, hogy ebben az esetben a piac konzisztenciájának vizsgálatakor a befektetők hasznosságfüggvényére vonatkozó, konkavitási megkötés nem jelent megszorítást.

Vegyük észre a párhuzamot a mikroökonómia dualitási elméletének egy ismert következményével! A termeléselmélet dualitáselve szerint a költséggörbéből a technológia minden közgazdaságtanilag fontos tulajdonsága kiolvasható, ugyanakkor a költségfüggvényhez

16 Vegyük figyelembe, hogy a konkáv függvények folytonosak is az értelmezési tartományuk belsejében.
17 Vagyis nem létezik piaci ingyenebéd a Frittelli-féle értelemben.

mindig található egy konvex inputkövetelmény-halmaz, amiből az származtatható. Ezek szerint a technológia konvexitása nem túlságosan megszorító feltételezés. Az imént kapott, igen érdekes közgazdasági tartalmú állításnak a bizonyítása azonban – mivel alapvetően a Delbaen–Schachermayer-tételen alapul – úgy tűnik, a sztochasztikus folyamatok általános elméletének felhasználása nélkül nem lehetséges.

## Irodalomjegyzék


Arrow, K. [1953]: Le rôle des valeurs boursières pour la meilleure des risques. *Econométrie*, Paris, Centre National de la Recherche Scientifique, angolul: Arrow, K. [1964]: The role of securities in the optimal allocation of risk. *Rev. Econom. Stud*. 31., 91–96. o.

Arrow, K. [1971]: Essays in The Theory of Risk Bearing. Chicago, Markham Publishing Company

Badics Tamás–Medvegyev Péter [2009]: A pénzügyi eszközök árazásának alaptétele lokálisan korlátos szemimartingál árfolyamok esetén. *Szigma*, 40. (3–4.), 89–136. o.

Bellini, F.–Frittelli, M. [2002]: On the Existence of Minimax Martingale Measures. *Math. Finance*, 12. (1.), 1–21. o.

Debreu, G. [1953]: Une Économie de l'Incertain. Working paper, Electricité de France

Dalang, R. C.–Morton, A.–Willinger, W. [1990]: Equivalent martingale measures and no-arbitrage in stochastic securities market model. *Stochastics and Stochastics Rep*., 29., 185–201. o.

Delbaen, F.–Schachermayer, W. [1994]: A General Version of the Fundamental Theorem of Asset Pricing. *Math. Ann*., 300., 463–520. o.

Delbaen, F.–Schachermayer, W. [1998]: The Fundamental Theorem of Asset Pricing, for Unbounded Stochastic Processes. *Math. Ann*., 312., 215–260. o.

Dybvig, P. H.–Ross, S. A. [1987]: Arbitrage, in: Eatwell, J.–Millgate, M.–Neumann, P. (eds.): The New Pelgrave: A Dictionary of Economics. London, Macmillan, 100–106. o.

Elliott, R. J.–Kopp, P. E. [2005]: Mathematics of Financial Market, Berlin, Springer-Verlag

Frittelli, M. [2004]: Some Remarks on Arbitrage and Preferences in Securities Market Models. *Math. Finance*, 14. (3.), 351–357. o.

Harrison, J. M.–Pliska, S. R. [1981]: Martingales and Stochastic integrals in the Theory of Continous Trading. Stochastic Process. *Appl*., 11., 215–260. o.

Harrison, J. M.–Kreps , D. M. [1979]: Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Market. *J. Econom. Theory*, 20., 381–408. o.

Huang, C. F.–Litzenberger, R. H. [1988]: Foundation of Financial Economics, New York, North-Holland

Jarrow, R. [1986]: The Relationship between Arbitrage and First Order Stochastic Dominance. *The Journal of Finance*, 41. (4.), 915–921. o.

Karatzas, I.–Shreve, S. [1998]: Methods of Mathematical finance, New-York, Springer-Verlag

Király Júlia–Száz János [2005]: Derivatív pénzügyi termékek árdinamikája és az új típusú kamatlábmodellek. *Szigma*, 36. (1–2.), 31–60. o.

Klein, I. [2006]: A comment on market free lunch and free lunch. *Math. Finance*, 16., 583–588. o.

Kreps, D. M. [1981]: Arbitrage and Equilibrium in Economies with Infinitely Many Commodities. *J. Math. Econom*., 8., 15–35. o.

Loewenstein, M.–Willard, G. A. [2000]: Local martingales, arbitrage and viability: Free snacks and Cheap Thrills. *Economic Theory*. 16., 135–161. o.

Medvegyev Péter [2002]: A pénzügyi eszközök árazásának alaptétele diszkrét idejű modellekben. *Közgazdasági Szemle*, 49. (7–8.), 597–620. o.

Medvegyev Péter [2009]: A származtatott termékek árazása és annak problémái az egyensúlyelmélet szempontjából. *Közgazdasági Szemle*, 56. (9.), 769–789. o.

Medvegyev Péter [2006]: A Dalang–Morton–Willinger-tétel. *Szigma*, 37. (1-2.), 73–85. o.

Medvegyev Péter [2011]: Néhány megjegyzés a kockázat, bizonytalanság, valószínűség kérdéséhez. *Hitelintézeti Szemle*, 10. évf. 4. sz., 314–324. o.

Medvegyev Péter [2004]: Sztochasztikus analízis, Budapest, Typotex

Medvegyev Péter [2007]: Stochastic Integration Theory, New York, Oxford University Press

Medvegyev Péter–Száz János [2010]: A meglepetések jellege a pénzügyi piacokon. Budapest, Nemzetközi Bankárképző Központ Zrt.

Pliska, S. R. [1997]: Introduction to mathematical finance, discrete time models. Oxford, Blackwell Publishers Inc.

Radner, R. [1972]: Existence of Equilibrium of Plans, Prices and Price Expectations in a Sequence of Markets. *Econometrica*, 40., 289–303. o.

Ross, S. A. [1978]: A Simple Approach to the Valuation of Risky Streams. *J. Business*, 51., 453–475. o.

Száz János [1999]: Tőzsdei opciók vételre és eladásra. Budapest, Tanszék Kft.

Száz János [2009]: Devizaopciók és részvényopciók árazása. Budapest, Jetset

Száz János [2011]: Valószínűség, esély, relatív súlyok: opciók és reálopciók. *Hitelintézeti Szemle*, 10. évf. 4. sz., 336–348. o.