Bátyi Tamás László

Államadósság-kezelési stratégiák

Az államadósság-kezelő intézmények fő célja a költségvetés finanszírozása hosszú távon, alacsony költségek mellett, a kockázatok figyelembevételével. Az államadósság-kezelési stratégia kialakítása során az adósságkezelő benchmarkértékeket határoz meg az adósságportfólió egyes paraméterei számára. Ezek az értékek közvetlenül a kockázatok és költségek együttes alacsonyan tartását segítik elő azáltal, hogy meghatároznak egy bizonyos szempontok szerint optimális portfóliót, amelyet az adósságkezelő szervezetnek adott határokon belül tartania kell.

Ez a cikk bemutatja a benchmarkok meghatározásával kapcsolatos kérdéseket, a költségek és kockázatok modellezésének lehetséges módszereit, és elvégzi bizonyos konkrét modellek alkalmasságának elemzését. Végül megpróbál választ találni a felmerülő problémákra.

Bevezetés

Az államadósság-kezelő intézmények célja a költségvetés finanszírozása hosszú távon, alacsony költségek mellett, a kockázatok figyelembevételével. Az államadósság-kezelőnek tehát úgy kell kialakítani tevékenységét, hogy megfeleljen ennek a kettős célnak: azaz a költségeket és a kockázatokat is alacsonyan tartsa.

Az államadósság-kezelési stratégia komplex tervezet, amely az adósságkezelő hosszú és rövid távú terveit egyaránt tartalmazza. A stratégiai célok közé tartozik például egyes eszközök kibocsátásának terve, mint mondjuk a lakossági állampapírok kibocsátásával kapcsolatos elképzelések. De például a Denmarks Nationalbank esetében olyan elem is szerepel a stratégiai célok között, mint hogy egyes specifikus termékek kibocsátása folytatódjon egy adott időpontig.

Az államadósság-kezelési stratégiák egyik központi eleme az adósságportfólió bizonyos paramétereire vonatkozó benchmarkértékek meghatározása.[1] Ezek az értékek közvetlenül a kockázatok és költségek együttes alacsonyan tartását segítik elő azáltal, hogy meghatároznak egy bizonyos szempontok szerint optimális portfóliót, amit az adósságkezelő szervezetnek adott határokon belül tartania kell.

A jelen tanulmány bemutatja a benchmarkok meghatározásával kapcsolatos kérdéseket, a költségek és kockázatok modellezésének lehetséges módszereit, és elvégzi bizonyos konkrét modellek alkalmasságának elemzését. Az első fejezetben a modellezéssel kapcsolatos főbb kérdéseket tárgyalja. A második fejezet a kockázatok és költségek számszerűsítésére szolgáló sztochasztikus modellekről szól, míg a harmadik fejezetben – az első két szerkezeti egység tanulságai alapján – a benchmarkértékek meghatározásával kapcsolatos problémá-

1 Valójában nem egy optimális célértéket határoz meg az adósságkezelő intézmény, hanem egy elfogadási tartományt, amelyen belül kell maradnia az adott változónak.

kat vizsgálja. A cikk nemzetközi példák esetén a dán jegybank (Denmarks Nationalbank [2001], [2005], [2006], [2007]), valamint a holland és a lett adósságkezelő (Dutch State Tresury Agency [2007], [2008], illetve a Treasury of the Republic of Latvia [2007]) kiadványait, valamint az egyes európai adósságkezelő intézmények honlapjain található adatokat veszi alapul, míg a Magyarországra vonatkozó információk az ÁKK Zrt. kiadványából (Államadósság Kezelő Központ [2008]) és honlapjáról származnak.

1. Alapvető kérdések

Ebben a fejezetben az államadósság-kezelés során alkalmazott benchmarkok kialakításának alapvető kérdései kerülnek elő. A tanulmány megvizsgálja, mely értékeket érdemes figyelemmel kísérnie és szabályoznia egy adósságkezelő intézménynek. További eldöntendő kérdés, hogy milyen szempontok alapján lehet két stratégia közül az egyiket jobbnak nevezni a másiknál. A cikk ebben a fejezetben tárgyalja a portfólió modellezésével kapcsolatos kérdéseket és az azokra adható, lehetséges válaszokat is.

1.1. A lehetséges benchmarkváltozók kiválasztása

A benchmarkértékek meghatározása során az egyik legfontosabb kérdés annak a tisztázása, hogy az adósságportfólió mely paramétereinek az értékét szeretné szabályozni az adósságkezelő.

A kérdés nehézsége abból adódik, hogy ha a portfólió túl sok tulajdonságát választjuk ki, az nagyon megnehezíti a számításokat, bonyolultabbá és lassabbá teszi a modellezést. Ellenben, ha van olyan kockázati faktor, amelynek jelentős a hatása, ám ennek a szabályozására nem tűz ki célértéket az adósságkezelő, az jelentős károkat okozhat: előfordulhat, hogy emiatt nem sikerül tökéletesen biztosítani a célul kitűzött optimalizációt.

Az elsődleges feladat tehát meghatározni azokat a kockázati faktorokat, amelyek jelentősen befolyásolják az adósságportfólió értékét, valamint a költségeket, majd ki kell választani a megfelelő tulajdonságokat, amelyeken keresztül ezek a kockázatok kezelhetők.

A kockázatokat a tankönyvek általában négy fő kategóriába sorolják. Megkülönböztetnek piaci, hitelezési, működési és likviditási kockázatot (*Jorion* [1999]). Természetesen mind a négy kockázattípussal szembe kell néznie egy államadósság kezelésével foglalkozó intézménynek; ugyanakkor a működési, hitelezési és likviditási kockázat vizsgálata nem része a portfólióra vonatkozó benchmarkok meghatározásának, hiszen ezek a kockázatok a benchmarkváltozók értékeitől függetlenül jelennek meg. A stratégia megvalósításánál azonban ezeket sem lehet figyelmen kívül hagyni.

A fő kockázati faktorok, amelyekkel egy államadósság-kezelő intézménynek szembe kell néznie, a piaci kockázat kategóriájába sorolhatók. Az első – és talán legfontosabb – a hozamok változásából eredő kockázat. A hozamok megváltozása több, néhol ellentétes irányú módon is befolyásolja az adósságkezelés költségeit. Egyrészt hatással van a változó kamatozású instrumentumok költségeire, hiszen egy adósságkezelő költségeinek jelentős részét a kifizetett kamatok jelentik. Másrészt a hozamgörbe változása befolyásolja az adósságportfólió aktuális piaci értékét. Megjegyzésre méltó ezen kívül: a hozamgörbe mozgása azt is befolyásolja, hogy a későbbi kibocsátásokat milyen hozamszinten tudja végrehajtani az adósságkezelő, ugyanakkor a portfólió összetételének változtatásával ez a hatás nem módosítható, így a benchmarkok meghatározása szempontjából figyelmen kívül hagyhatjuk.

Egy Magyarországhoz hasonló, kisebb gazdasági súlyú állam számára előnyös lehet[2], ha nem csak a saját devizájában denominált kötvényeket bocsát ki. Továbbá bizonyos esetekben, főleg gazdasági sokkok idején az államok rákényszerülhetnek más, a saját valutaövezetüktől eltérő devizákban történő kibocsátásra, például a saját tőkepiacuk mérete vagy fejletlensége[3] miatt. Ugyanakkor a más devizájú kibocsátásokkal egy újabb, igen jelentős kockázati faktor jelenik meg, méghozzá a kamatköltségnek és a portfólió értékének a devizaárfolyamok volatilitásából eredő változása.

Tehát a benchmarkok meghatározásánál a portfólió olyan paramétereit érdemes választani, amelyeknek a szabályozásával az adósságkezelő kellő mértékben befolyásolhatja a fent említett kockázatokat. A hozamkockázat kezelésére a nemzetközi gyakorlatban a legelterjedtebb módszer, hogy az adósságportfólió Macauley-féle átlagidejére határoznak meg célértéket, illetve – mint általában az ilyen benchmarkok esetében – egy elfogadási sávot, amelyen belül kell mozognia az adott változónak. További eszköz lehet még a fix és változó kamatozású instrumentumok arányának meghatározása. Például a fix kamatozású kötvények részarányának növelésével nyilvánvaló módon csökkenthető a kamatkifizetésekből adódó kockázat, hiszen a kifizetendő kamatok előreláthatóvá, tervezhetővé válnak. Ugyanakkor előfordulhat, hogy ez a költségek növekedéséhez vezet. A fix-változó arány a nemzetközi gyakorlatban nem olyan szélesen elterjedt benchmark, mint az átlagidő, de azért találhatunk példát arra, hogy főleg az átlagidővel egyidejűleg alkalmazzák, például a dán vagy a magyar adósságkezelő esetében.

Ugyanakkor vannak olyan kockázati tényezők, amelyekre a leginkább a fix-változó arány hat. Ilyen például a meglévő hitelek refinanszírozási költségének változásából adódó kockázat. Ezt a kockázatot az átlagidőnél jóval hatékonyabban lehet kezelni a fix és változó kamatozású eszközök arányának kontrollálásával. Például a belga adósságkezelő használja ezt a módszert az adósság refinanszírozásából eredő kockázatok ellenőrzésére.

Érdemes megjegyeznünk, hogy bizonyos esetekben kérdéses, van-e értelme mind átlagidőre, mind fix-változó arányra stratégiai célt felállítani. Hiszen a két tulajdonság ugyanazon kockázati faktorral van összefüggésben, így információtartalmuk részben fedi egymást. Természetesen az egyezés nem teljes, így elméletileg egyik tényező sem hanyagolható el, ám bizonyos esetekben fölöslegesen túlbonyolítja a kérdést mindkét változó figyelembe vétele.

A devizakockázat kezelésével kapcsolatos benchmarkváltozó lehet például az egyes devizák részaránya a teljes adósságportfólión belül. A fő problémát jelen esetben az jelenti, hogy a túl sokféle deviza jelenléte nagyban megnehezíti a kockázatok és költségek előrejelzésének modellezését, valamint jelentős árfolyamkockázatot indukál.

Néhány adósságkezelő – magyar vagy dán – a devizák arányára csak két benchmarkot határoz meg. Az első a nem saját devizában denominált instrumentumok aránya a teljes

2 Például ilyen előny lehet az alacsonyabb költségek melletti finanszírozás vagy egy nagyobb és likvidebb piacra való belépés.

3 Az 1980-as években a szocialista országok esetében a saját tőkepiac fejletlensége volt a külföldi hitelek felvételének legjelentősebb oka.

portfólióban, a második kitűzött benchmark pedig az, hogy az összes többi devizából az euro részarányának 100%-nak kell lennie. Sávok meghatározása esetén ez általában a 95–100%-os sávot jelenti. Nyilván a nem euroövezet-közeli államok esetében ez a kitüntetett deviza más is lehet, például az amerikai dollár. Ezeknek a lépéseknek az az egyik lényeges eleme, hogy a devizákkal kapcsolatos összes kérdést két változóra vonatkozó megkötésre redukálják, ami jelentősen leegyszerűsíti a számításokat. Még ennél is nagyobb haszna, hogy ezáltal az adósságportfólió nincs kitéve a keresztárfolyamok változásából eredő kockázatoknak. További előnyt jelent az is, ha a kitüntetett deviza árfolyamát a monetáris politika is figyelemmel kíséri, például az Európai Gazdasági és Monetáris Unióhoz (EMU) csatlakozás előtt álló országokban az euro esetén. Előfordulnak azonban olyan példák is a gyakorlatban, ahol az adósságkezelő nem korlátozza devizaállományát; például az osztrák államadósság-kezelő intézmény vállalja a keresztárfolyamok változásából eredő kockázatokat.

Természetesen előfordulhat, hogy egyes devizák esetén nincs szükség az átlagidőre és/vagy a fix-változó kamatozású eszközök arányára vonatkozó célsáv meghatározására. Például a magyar Államadósság Kezelő Központ (ÁKK) csak a forintinstrumentumok esetén határoz meg átlagidőre vonatkozó kritériumot. Mivel az ÁKK a hazai piacon stratégiai kibocsátó, ugyanakkor a nemzetközi tőkepiacokon opportunista résztvevő, így a portfólió nem forintban denominált részének szerkezetével kapcsolatban csak a fix és változó kamatozású eszközök aránya van rögzítve, az átlagidő nincs. Természetesen az átlagidőre is lehetne célértéket meghatározni, ám azon instrumentumok esetén, amelyeknek a piacán nem stratégiai résztvevő az adósságkezelő, érdemes kevesebb megkötéssel élve, nagyobb szabadságot hagyni a piaci folyamatokra történő reagálásra.

1.2. Döntési szempontok

Az államadósság-kezelési stratégia meghatározása tehát leginkább a kiválasztott változók célértékeinek, azaz céltartományainak optimális kiválasztását jelenti. Felmerül tehát a kérdés, hogy mi tekintendő optimálisnak. A cikkben már többször előkerült, és továbbra is megfelelő iránymutatásként alkalmazható, hogy az államadósság-kezelők célja a költségvetés finanszírozása hosszú távon, minél alacsonyabb költségek mellett, a kockázatok figyelembe vételével.

Az államadósság-kezelő intézmények költségeinek jelentős részét a kifizetendő kamatok alkotják, így a költségek számszerűsítésében első helyen a jövőbeni kamatkiadások mértéke szerepel. Tehát természetes módon adódó kockázati tényező – amelyet nem lehet figyelmen kívül hagyni – a kamatköltségek változásából adódó kockázat. Továbbá egyes országok esetében az államadósság piaci értékének is igen fontos a szerepe, hiszen hatással van az állam megítélésére és a kockázati besorolására is, ami különösen fontos a kisebb, nyitott gazdaságú államok esetén. Így a kamatköltség mellett a portfólió értékére vonatkozó várakozásokat és az ingadozásából eredő kockázatokat is számszerűsíteni kell.

Ebből következik, hogy a döntés meghozatalához az adósságkezelő kamatkiadásaiból és a portfólió értékváltozásából származó költségeket és kockázatokat kell számszerűsíteni. A kockázatok számszerűsítésére az egyik lehetőség az at Risk mutatószámok használata. Nem feltétlenül ez az egyedüli és legjobb megoldás, ugyanakkor egyszerűen számolható és könnyen értelmezhető eredményeket ad, így a célnak tökéletesen megfelel.

1.2.1. Cost at Risk és Value at Risk

Az at Risk mutatószámok valamely eloszlás magas, például 95%-os percentilisét, pontosabban annak a várható értéktől való eltérését jelentik. Ezért úgy lehet felfogni: azt mutatják meg, hogy az adott X változó értékének a várható értéktől vett eltérése nem lesz nagyobb, mint az X at Risk (XaR) mutatószám értéke valamely α valószínűséggel. Tehát:

$$P(X<XaR_{\alpha})=\alpha \,.$$

A módszer egyik nagy hibája, hogy semmit nem mond az eloszlás farkáról, azaz nem tudja számszerűsíteni, hogy mi történik, ha az X változó értéke abba az $1-\alpha$ valószínűségű tartományba esik. Erre jelenthet megoldást az Expected Shortfall (ES) néven ismert mérőszám alkalmazása, ami az X változó értékének feltételes várható értéke, feltéve, hogy X értéke nagyobb, mint az előbb vizsgált XaR mutatószám. Azaz:

$$ES_{\alpha} = E\left(X \mid X > XaR_{\alpha}\right).$$

Ebben a döntési helyzetben azonban nem a mutatószámok konkrét értéke, hanem az általuk meghatározott rendezés jelenti a szükséges információt, így az ES használata csak akkor jelentene plusz információt, ha ez befolyásolná az at Risk mutató által adott rendezést. Például olyan változók esetén, amit az első két momentuma egyértelműen meghatároz, ez semmiképpen sem lehet így.

Az államadósság-kezelő intézmények két változót szoktak figyelembe venni a portfólió összetételének optimalizálása során: az adósságportfólió értékét, valamint a finanszírozás költségét. Ez utóbbi a kamatfizetés költségét jelenti. A portfólió értékváltozásának at Risk mutatószámát Value at Risknek (VaR) szokás hívni, míg a költségek eloszlásából számított értéket Cost at Risknek (CaR). Kifejezetten kamatköltség esetén szokás az Interest Cost at Risk (ICaR) elnevezés használata, ám a jelen cikkben a költségek csak kamatköltség formájában jelennek meg, így a CaR jelölés használata nem okoz értelmezésbeli nehézségeket.

A kockázatok számszerűsítésére tehát az at Risk mutatószámok használhatók. A kockázatok mellett azonban szükséges még az adósságkezelő költségeinek számszerűsítése is. Erre a fent említett változók várható értéke megfelelő választás, hiszen könnyen interpretálható.

Ezáltal a döntési probléma hasonlóvá vált, mint a pénzügyekben oly gyakran tárgyalt portfólióválasztási kérdés, hiszen valamely paraméterek várható értéke és kockázata a két figyelembe vett szempont. A döntéshozó, jelen esetben az adósságkezelő, ezeknek az értékeknek a figyelembe vételével a saját preferenciái alapján választja ki a szerinte optimálisnak ítélt portfóliót. Az egyetlen különbség, hogy itt nem egy, hanem több változó várható értéke és kockázati mérőszáma szerepel.

1.2.2. Egyéb szempontok

Adódhatnak azonban egyéb, a kockázattal és költségekkel nem közvetlen összefüggésben lévő szempontok is. Előfordulhatnak olyan – többnyire makrogazdasági folyamatok alapján megválasztott – benchmarkértékek, amelyek a költség-kockázat-elemzés alapján nem lennének optimálisak, ám egyéb szempontok alapján alkalmazhatók.

A legkézenfekvőbb példa az EMU-csatalakozás előtt álló, azt rövid- vagy középtávon tervező országok esete. Előfordulhat, hogy a portfólió euroinstrumentumai részére az optimális benchmarkértékek nem egyeznek meg a saját devizában denominált részre vonatkozó értékekkel, például a fix-változó kamatozású eszközök aránya esetén. Az is lehetséges, hogy a saját valutára vonatkozóan több változó képezi az adósságkezelési stratégia részét, mint az euroeszközök esetén. Ugyanakkor az EMU-csatlakozás pillanatára ezeket a kritériumokat összhangba kell hozni, akár növekvő költségek és kockázatok árán is, hiszen a csatlakozás pillanatában egy hirtelen váltás nem megoldható feladat.

További példa egyes benchmarkértékek modellen kívüli szempontok alapján történő meghatározására a devizában denominált adósság részarányának bizonyos szint alatt tartása. A nemzetközi szervezetek, piaci szereplők az adott államok, adósságkezelők megítélésekor negatívumként értékelik a nem saját devizában denominált adósságok magasabb arányát.

1.3. A portfólió modellezése

A benchmarkértékek meghatározása bonyolultabb modellek esetén analitikus módon nem megoldható, hiszen a jövőbeni költségeket meghatározó hozamok valószínűségi változók. Tehát a kockázati faktorokat szimulálva meg kell vizsgálni, hogy a benchmarkváltozók különböző értékei mellett milyenek lesznek a döntésnél figyelembe veendő CaR- és VaR-értékek. Ezek alapján már kiválaszthatók az adósságkezelő számára optimális benchmarktartományok.

A kockázati faktorok mellett szükséges magának az adósságportfóliónak a modellezése is, hiszen a modellezés időtartama alatt a portfólió összetétele jelentősen megváltozik. Egyrészt a modellezés idejére szükségképpen esnek lejáró kötvények és új kibocsátások is, valamint a visszavásárlásokról sem feledkezhetünk meg.

A portfólió modellezésével kapcsolatosan ennek következtében három lényeges kérdés merül fel: egyrészt az, hogy milyen kiinduló portfólióból induljon a modell, másrészt, hogy milyen időtávon folyjon a modellezés, és végül, hogy időközben mely események kerüljenek bele a modellbe.

1.3.1. Időhorizont

Az időhorizont meghatározásánál azt kell figyelembe venni, hogy az államadósság-kezelési stratégiának a portfólió összetételére vonatkozó elemei az adósságkezelő milyen távú terveinek részei. A dán adósságkezelő esetén a célértékek meghatározása a közép- és hosszú távú tervek része, ezért a kockázatbecslő modellt tízéves periódusra futtatják. Magyarországon az ÁKK benchmarkmodelljéből származó adatokat a költségvetési tervezéssel összhangban kerülnek vizsgálják felül.

1.3.2. Kiinduló portfólió

A portfólió modellezésére két lehetőség adódik. Vagy az adott adósságkezelő tényleges portfóliójából indul a modellezés, vagy egy olyan fiktív portfólióból, amely a vizsgálni kívánt paraméterekkel rendelkezik.

A fiktív induló összetétel előnye, hogy egyszerűbb megvalósítást jelent. A valós portfólióból történő indulás esetén ugyanis első lépésként swapok segítségével egy olyan portfóliót kell létrehozni, amelyiknek a kiválasztott paraméterei éppen a vizsgálni kívánt szinten vannak. Egy adott tulajdonságú modellportfólió esetén ez nyilván adott, így jelentős számítási kapacitást és időt takaríthatunk meg. Ennek a módszernek azonban több hátulütője is van. Egyrészt azt feltételezi, hogy a benchmarknak kiválasztott változók értékei egyértelműen meghatározzák a vizsgálni kívánt CaR- és VaR-értékeket, azaz két különböző modellportfólióból való indulás esetén hasonló értékeket kapunk.[4] Továbbá ebben az esetben problémát jelenthet a szükséges értékek modellezés alatti változása, hiszen ilyenkor a modellezési folyamat közben is be kell állítani a kívánt értékeket.[5]

1.3.3. Időközi kibocsátások, visszavásárlások

A modell felépítése előtt további kérdés, hogy szükséges-e – és ha igen, milyen módon – a modellezés időtartama alatti kibocsátások, valamint visszavásárlások beépítése a modellbe.

Amennyiben a kiinduló portfólió fiktív összetételű volt, amelyet mindösszesen a vizsgált változók értékei szerint hartároztak meg, akkor az időközi kibocsátások és kötvényvisszavásárlások semmilyen változást nem eredményeznek, hiszen a modellezés folyamán a portfólió kockázatát meghatározó paramétereket mindig a vizsgálni kívánt szinten kell tartani. Továbbá emögött a megközelítés mögött az a már említett feltételezés áll, hogy a kiválasztott tulajdonságok teljesen leírják a portfólió kockázatára ható tényezőket, így a kibocsátási terv felhasználása nem jelentene többletinformációt, hiszen az legfeljebb a konkrét cash flow-értékeket változtatja meg, de a portfólió megfigyelt paramétereit nem.

Tehát az időközi tevékenységek figyelmen kívül hagyásához elegendő azt feltenni, hogy a portfólió kockázatát a konkrét pénzáramlások közvetlenül nem befolyásolják, csak a benchmarkértékekre gyakorolt hatásukon keresztül.

A valós portfólió használata esetén már lehet értelme az időközi tevékenység modellezésének. Főleg akkor, ha a modell hosszabb időhorizontot vizsgál, például egy tíz-tizenöt éves szimuláció esetén. Jellemzően azon országokban veszi figyelembe az adósságkezelő ezeket a folyamatokat, ahol a piaci folyamatok kellően stabilak a kibocsátások és visszavásárlások hosszú távú tervezhetőségéhez, a tervek stabil megvalósításához.

Ugyanakkor érdemes megfigyelni, hogy azon államokban, ahol számolnak a kibocsátásokkal és visszavásárlásokkal, a benchmarknak kiválasztott változók száma alacsonyabb, mint ami a portfólió leírásához szükséges lenne, az így nyert szabadságfokokat szünteti meg az előre megadott kibocsátási és visszavásárlási terv. Ekkor tulajdonképpen ezek a folyamatok nem a stratégiai célok elérésének eszközei, hanem egy kívülről adott paraméteregyüttest alkotnak, amelyet figyelembe kell venni az adósságkezelési stratégia kialakításánál. A nem a modell eredményei alapján kialakított, hanem más szempontok alapján, a modellezés előtt már adott kibocsátási terv alkalmazása hasonló ahhoz, mint amikor valamely makrogazdasági indok miatt, és nem a modellezés eredményeként határoznak meg benchmarkértékeket.

4 Például, ha az átlagidő és a fix-változó arány közül valamelyik nem tartozik a vizsgált tulajdonságok közé, akkor ez a hiba azonnal megjelenik.

5 Amennyiben azonban a kiválasztott változók valóban jól leírják a portfóliót, akkor a modellalapú kiindulás mindenképpen jobb megoldás.

2. Benchmarkmodell

A stratégia kialakításának mindenképp központi – és talán a legtöbb kérdést felvető – momentuma a megfelelő árfolyam- és kamatlábmodellek kiválasztása. Ebben a részben a tanulmány röviden áttekinti a szimulációval és árfolyammodellekkel kapcsolatos kérdéseket, majd a lehetséges kamatlábmodelleket vizsgálja. Végül elemzi azokat a szempontokat, amelyek alapján az adósságkezelő dönthet a használni kívánt modellről.

2.1. Modellezési folyamat

A benchmarkmodellezés központi eleme a kockázatokat generáló folyamatok modellezése. Ezáltal különböző paraméterű portfóliók esetén összehasonlíthatóvá válnak a kockázatok és költségek. Így az államadósság-kezelő szerveknek lehetőségük nyílik a kockázatvállalási hajlandóságuk alapján kiválasztani a benchmarktulajdonságok számukra optimális tartományait.

A konkrét modellek kiválasztásán kívül fontos kérdés még az időhorizont skálázása, azaz, hogy milyen felbontással vizsgáljuk a modellezés időtartamát. A periódushosszra felső korlátot jelent a kamatfizetések gyakorisága, hiszen minden egyes kamatigazítás időpontjában szükségképpen rendelkeznünk kell egy szimulált hozamgörbével. Ha azonban túl rövid periódushosszakat veszünk, azzal fölöslegesen túlbonyolítjuk a modellt, és megnöveljük a számítási időt. A dán adósságkezelő például negyedéves periódushosszt használ, ami a tízéves időtáv esetén közel negyven vizsgálandó időpontot jelent.

Könnyebb a helyzet, ha egy egyszerűbb, de analitikusan könnyen kezelhető kamatlábmodellt választunk. Ekkor ugyanis kapunk analitikus eredményt a hozamok adott időpontbeli eloszlásáról. Így nem lesz szükséges a hozamgörbe dinamikáját leíró differenciálegyenlet szimulálása, mindössze a kamatigazítások időpontjaiban esedékes hozamgörbéket kell modellezni.

2.1.1. Árfolyammodell

A devizaárfolyamok modellezésére a leginkább használt modell a pénzügyi életben mindennaposan használt geometriai Brown-mozgás. Ez egy analitikusan jól kezelhető, viszonylag egyszerű modell. Ennél bonyolultabb árfolyammodellek esetén, például ha a diffúziós tagba beépítünk egy Poisson-folyamatból származtatott folyamatot is, sokkal pontosabb eredményt nem kapunk, ugyanakkor a jó analitikus kezelhetőséget és egyszerűséget elveszítjük.

2.2. Kamatlábmodellek

A kamatlábmodellek a hozamok lejárati szerkezetét, valamint a lejárati szerkezet időbeni változását, dinamikáját próbálják leírni. Ebben a fejezetben néhány, az államadósság-kezelés során használható konkrét kamatlábmodellt vizsgálunk, ahol lehet, bemutatva azokat az analitikus formákat, amelyek segíthetik a benchmark modellezést.

A modellek esetében az elsődleges célunk az, hogy megvizsgáljuk, mennyiben alkalmazhatóak az adósságkezelési stratégiában. Ennek megfelelően a központi kérdés, hogy a modell közgazdaságilag mennyire elfogadható, és analitikusan megkapható-e egy tetszőleges *t* időpontra a kamatlábak feltételes eloszlása; azaz mennyire egyszerűen kezelhető, szükséges-e a felírt dinamika szimulálása.

2.2.1. Heath–Jarrow–Morton

Kamatlábmodellezés során három olyan változó van, amelynek a megváltozására felírhatunk sztochasztikus differenciálegyenletet. Ilyen a rövid kamatláb, a kötvényárfolyam és a forwardkamatláb. A három felírási forma ekvivalens, azaz bármelyikből megkaphatjuk bármelyik másikat, ha a piac arbitrázsmentes, azaz létezik martingálmérték. Tehát a modellezésre a következő egyenletek alkalmazhatóak:

$$dr(t) = a(t)dt + b(t)dW(t) \tag{1}$$

$$d_t p(t,T) = p(t,T)\left[m(t,T)dt + v(t,T)dW(t)\right] \tag{2}$$

$$d_t f(t,T) = \mu(t,T)dt + \sigma(t,T)dW(t) \tag{3}$$

A kötvényárfolyamra felírt differenciálegyenletből, felhasználva, hogy

$$p(t,T) = exp\left\{\int_0^t f(t,s)\,ds\right\},$$

könnyen kapható a határidős kamatlábra felírt egyenlet.

A határidős kamatláb modellezése esetén mind a kötvényárfolyam, mind a rövid kamatláb dinamikája kapható az

$$f(t,t) = r(t)$$

$$f(t,T) = -\frac{\partial lnp(t,T)}{\partial T}$$

összefüggésekből.

A rövid kamatlábra felírt dinamikából közvetlen módon nem kapható meg a kötvényárfolyam dinamikája, ugyanis e között a két változó között nincs explicit összefüggés. Ugyanakkor a martingálmérték ismerete esetén kihasználható, hogy a kötvény ára megkapható az árazási forumálból, azaz

$$p(t,T) = B(t)E_{p*}\left(\frac{1}{B(T)} \mid \mathsf{F}(t)\right),$$

ahol a betét értéke számítható a rövid kamatláb segítségével. Tehát ehhez az átmenethez, azaz a három dinamika közti teljes átjáráshoz szükséges a martingálmérték ismerete.

A legtöbb modell a rövid kamatlábra van felírva, azonban a másik két változó modellezése is előfordul a gyakorlatban. A fejezet a leggyakrabban használt modelleket mutatja be, különös tekintettel arra, hogy eredményeik közgazdaságilag mennyire fogadhatók el, valamint mennyire bonyolultak, tehát alkalmazhatók-e a benchmarkértékek meghatározására.

Bármely modellt is használjon az adósságkezelő, található olyan határidős kamatlábra felírt dinamika, ami az alkalmazott modellt implikálja. Fontos állítás, hogy a határidős kamatláb dinamikája esetén a drift és a volatilitás nem határozható meg függetlenül (*Heath et al.* [1992]), a volatilitásstruktúra egyértelműen meghatározza a driftet a következő módon:

$$\mu(t,T) = \sigma(t,T) \int_t \sigma(t,s)ds + \lambda(t)\sigma(t,T), \tag{4}$$

ahol λ a kockázat piaci ára. (Ennek az arbitrázsmentességi feltételnek nevezett összefüggésnek a levezetése az *5.1. függelékben* található.)

A kapott összefüggés tehát azt eredményezi, hogy a határidős kamatlábra felírt dinamika szükségképpen

$$\begin{aligned} d_t f(t,T) &= \mu(t,T)dt + \sigma(t,T)dW(t) = \\ &= \left[\sigma(t,T) \int_t^T \sigma(s,T)ds + \lambda(t)\sigma(t,T)\right] dt + \sigma(t,T)dW(t) = \\ &= \left[\sigma(t,T) \int_t^T \sigma(s,T)ds\right] dt + \sigma(t,T)dW^*(t) \end{aligned} \tag{5}$$

alakú, ahol $W^*(t)$ P^*-Wiener és P^* az a martingálmérték, ahol a számlálófolyamat a $B(t)$.

A további alfejezetekben bemutatott modellek esetén a tárgyalt összefüggések levezetései bár nem kevésbé fontosak, mint a cikk egyéb részei, ám sok esetben indokolatlanul megszakítanák a gondolatmenet fonalát, így ezeket a levezetéseket a cikk függelékében találhatja meg az érdeklődő olvasó.

2.2.2. A Vašíček-modell

A Vašíček-modell (*Vašíček* [1977]) alapegyenlete a rövid kamatlábra van felírva:

$$dr(t) = \left(k - \theta r(t)\right)dt + \sigma dW^*(t), \tag{6}$$

ahol $W^*(t)$ P^* -Wiener, k, θ és σ pedig pozitív konstansok.

Látható, hogy a folyamat driftje olyan, hogy rendelkezik egy bizonyos hosszú távú átlaghoz való visszahúzással, azaz ha a rövid kamatláb pillanatnyi értéke ez alatt az átlag alatt van, akkor a drift pozitív, míg ha fölötte, akkor negatív.

Jelen cikk szempontjából a modellel kapcsolatban az a lényeges kérdés, hogy analitikusan mennyire könnyen kezelhető, azaz a kötvényárfolyamok meghatározhatóak-e egyszerű, matematikailag jól viselkedő zárt képlettel, valamint a jövőbeni kamatlábak feltételes eloszlása milyen. Az első kritérium a könnyű és gyors számításokhoz szükséges, míg egy kényelmesen kezelhető eloszlás a folyamat szimulálásából adódó nehézségektől szabadítja meg az adósságkezelőt.

Kötvényárfolyam

A Vašíček-modellben az elemi kötvények árfolyamát a

$$p(t,T) = exp\left\{A(t,T) + C(t,T)r(t)\right\} \tag{7}$$

formula adja, ahol

$$C(t,T)=\frac{e^{-\theta(T-t)}-1}{\theta}$$

$$A(t,T)=\int_t^T kC(s,T)+\frac{\sigma^2}{2}C(s,T)ds\,.$$

Ez a formula egyszerűen kezelhető, és a modellezés során gyors számításokat tesz lehetővé. (A kötvényárfolyam levezetését a *6.2. függelék* tartalmazza.)

Kamatláb eloszlása

Egyszerű számításokkal[6] könnyen megkapható, hogy a Vašíček-modellben minden $0 \le s < t < T$ esetén

$$r(t)=r(s)e^{-\theta(t-s)}+k\frac{1-e^{-\theta(t-s)}}{\theta}+$$

$$+\int_s^t \sigma e^{-\theta(t-u)}dW^*(u) \tag{8}$$

Innen könnyen leolvasható a t időszaki kamatláb $\mathcal{F}(s)$ -re vonatkozó feltételes eloszlása, hiszen az összes első két tagja determinisztikus, a harmadik tag pedig valódi martingál, valamint a Wiener-folyamat tulajdonságai alapján normális eloszlású. Innen már könnyen leolvasható a kamatláb feltételes várható értéke és szórása is, hiszen az integrál valódi martingál, így várható értéke nulla, azaz

$$E_{P^*}\big(r(t)\,|\,\mathcal{F}(s)\big)=r(s)e^{-\theta(t-s)}+k\frac{1-e^{-\theta(t-s)}}{\theta}\,, \tag{9}$$

továbbá ezek a tagok determinisztikusak, így varianciájuk zérus, azaz

$$D^2\big(r(t)\,|\,\mathcal{F}(s)\big)=D^2\Big(\int_s^t \sigma e^{-\theta(t-u)}dW^*(u)\Big)=$$

$$=\int_s^t \sigma^2 e^{-2\theta(t-u)}d\big[W^*\big](u)=$$

$$=\sigma^2\int_s^t e^{-2\theta(t-u)}du=$$

$$=\frac{\sigma^2}{2\theta}\Big(1-e^{-2\theta(t-s)}\Big) \tag{10}$$

Tehát:

$$\mathcal{L}\big(r(t)\,|\,\mathcal{F}(s)\big)=N\left(r(s)e^{-\theta(t-s)}+k\frac{1-e^{-\theta(t-s)}}{\theta};\frac{\sigma^2}{2\theta}\Big(1-e^{-2\theta(t-s)}\Big)\right). \tag{11}$$

6 Az ide vonatkozó levezetést a *6.3 függelék* tartalmazza.

Azaz a kamatláb normális eloszlású, könnyen számítható paraméterekkel, ami megkönnyíti a modellezést, hiszen az adósságkezelőnek nem szükséges a teljes folyamatot modelleznie, csak a kamatfizetések időpontjaira kell a kamatlábakat szimulálva előállítani az adott időpontra érvényes hozamgörbéket.

Érdemes még megvizsgálni, hogy mi a folyamat határeloszlása: azaz mi történik, ha $t \to \infty$. A fő kérdés ebben az esetben, hogy az így kapott eloszlásnak létezik-e véges szórása. Könnyen látható, hogy ekkor

$$\mathsf{L}\left(r(t)\,|\,\mathsf{F}(s)\right) \to N\left(\frac{k}{\theta};\frac{\sigma^2}{2\theta}\right) \quad . \tag{12}$$

Közgazdasági relevancia

Közgazdasági szempontból igen lényeges kérdés, hogy a modell képes-e normál, inverz és púpos hozamgörbe létrehozására is. A Vašíček-modellben mindhárom hozamgörbetípus létrejöhet. Sajnos azonban a Vašíček-modell több, közgazdaságilag nem feltétlenül elfogadható tulajdonsággal rendelkezik. Az egyik probléma, hogy a fent levezetett eloszlás normális, így elméletileg a kamatláb negatív értéket is felvesz pozitív valószínűséggel.

További problémát jelent még, hogy a különböző lejáratokhoz tartozó spothozamok közötti korreláció 1 a modellben, hiszen

$$Corr\left(R(0,T_1);R(0,T_2)\right) = \frac{Cov\left(R(0,T_1);R(0,T_2)\right)}{D\left(R(0,T_1)\right)D\left(R(0,T_2)\right)} =$$

$$= \frac{Cov\left(r(0)\frac{B(T)}{T_1};r(0)\frac{B(T_2)}{T_2}\right)}{D\left(r(0)\frac{B(T_1)}{T_1}\right)D\left(r(0)\frac{B(T_2)}{T_2}\right)} =$$

$$= \frac{\frac{B(T_1)}{T_1}\frac{B(T_2)}{T_2}Cov\left(r(0);r(0)\right)}{\frac{B(T_1)}{T_1}\frac{B(T_2)}{T_2}D\left(r(0)\right)D\left(r(0)\right)} =$$

$$= \frac{\frac{B(T_1)}{T_1}\frac{B(T_2)}{T_2}D^2\left(r(0)\right)}{\frac{B(T_1)}{T_1}\frac{B(T_2)}{T_2}D^2\left(r(0)\right)} = 1 \tag{13}$$

Ebből kövezkezően azonban a különböző lejáratú kötvények árfolyamai közötti korreláció igen magas lesz.

2.2.3. Cox–Ingersoll–Ross-modell

A Cox–Ingersoll–Ross (CIR) modell (*Cox et al.* [1985]) nagyon hasonló a Vašíček-modellhez, legfőbb előnye azonban, hogy a rövid kamatláb nem vehet fel negatív értéket. A modellt a

$$dr(t) = a\big(b - r(t)\big)dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW^*(t) \tag{14}$$

egyenlet definiálja, ahol $W^*(t)$ P^*-Wiener, *a*, *b* és *σ* pedig pozitív konstansok. Ebben a modellben is megjelenik az átlaghoz való visszahúzó tulajdonsága a kamatláb driftjének, azonban – a modell módosításának köszönhetően – ha a kamatláb alacsonyabb értéket vesz fel, akkor a volatilitása is alacsonyabb lesz, így megakadályozza, hogy az negatív értéket vegyen fel.

Kötvényárfolyam

A CIR-modellben az elemi kötvények árfolyama már nem írható fel olyan egyszerűen kezelhető képlettel, mint a Vašíček esetén, bár jellegében ahhoz hasonló struktúrát kapunk. A CIR-modellnél is

$$P(T,t) = exp\{A(t,T) + C(t,T)r(t)\}, \tag{15}$$

azonban itt

$$C(t,T) = \frac{2}{\sigma^2}\frac{\left(-\sqrt{\gamma} + \frac{\beta^2}{\sqrt{\gamma}}\right)sh\left(\sqrt{\gamma}(T-t)\right)}{ch\left(\sqrt{\gamma}(T-t)\right) + \frac{\beta}{2\sqrt{\gamma}}sh\left(\sqrt{\gamma}(T-t)\right)}$$

$$A(t,T) = \int_t^T \alpha C(s,T)ds$$

$$\gamma = -\frac{2\sigma^2 + \beta^2}{4}.$$

(A képlet levezetése megtalálható a *7.1 függelékben*.)

Bár a kapott formula elsőre nem szemet gyönyörködtető, ám analitikusan jól kezelhető, így a modellezés során a számításokat nem nehezíti meg jelentősen.

Kamatláb eloszlása

A kamatláb feltételes eloszlása már lényegesen bonyolultabb módon kapható meg. A modellt úgy is szokás bevezetni, mint független Wiener-folyamatok hajtotta Orstein–Uhlenbeck-folyamatok négyzeteinek összegét, ami már sejteni engedi, hogy a kamatláb eloszlása nem-centrált χ^2 lesz. Ezt a modellt bemutató szerzőpáros 1985-ös cikkében le is vezeti (Cox et al. [1985]). Látható tehát, hogy ebben a modellben a kamatláb nem vehet fel negatív értéket.[7] A kamatláb feltételes várható értéke és varianciája azonban könnyen megkapható. Alkalmazzuk *dr(t)*-re az Itô-lemmát, majd vegyük mindkét oldal várható értékét, és használjuk a Fubuni-tételt, így

7 Egészen pontosan akkor lesz 0 valószínűséggel negatív a kamatláb, ha $\alpha > \frac{\sigma^2}{2}$.

$$E\left(r(t)\,|\,\mathrm{F}(s)\right)=r(s)e^{-\beta(t-s)}+\int_s^t e^{-\beta(t-u)}du = \\ = r(s)e^{-\beta(t-s)}+\frac{\alpha}{\beta}\left(1-e^{-\beta(t-s)}\right). \tag{16}$$

Amennyiben $t \to \infty$, akkor

$$E\left(r(t)\,|\,\mathrm{F}(s)\right)\to \frac{\alpha}{\beta}.$$

A folyamat feltételes varianciája szintén az Itô-lemma segítségével kapható:

$$D^2\left(r(t)\,|\,\mathrm{F}(s)\right)=r(s)\frac{\sigma^2}{\beta}\left(e^{-\beta(t-s)}-e^{-2\beta(t-s)}\right)+\frac{\alpha}{\beta}\frac{\sigma^2}{2\beta}\left(1-e^{-\beta(t-s)}\right)^2, \tag{17}$$

ahonnan $t \to \infty$ esetén a határeloszlás varianciája

$$D^2\left(r(t)\,|\,\mathrm{F}(s)\right)\to \frac{\alpha}{\beta}\frac{\sigma^2}{2\beta}.$$

Közgazdasági relevancia

A modell közgazdaságilag lényegesen jobb, mint a Vašíček, hiszen megőrzi annak minden jó tulajdonságát. Inverz, normál és púpos hozamgörbe egyaránt előállhat a modellben, valamint rendelkezik az átlaghoz való visszahúzással. Továbbá a CIR-modell esetén már nem fordulhat elő, hogy a kamatláb negatív értéket vegyen fel. Cserébe ezért az eredményért, a könnyen kezelhető, normális eloszlású, rövid kamatlábat felváltja a nem-centrált χ^2 eloszlás, azaz az adósságkezelő intézmények a CIR-modell alkalmazása esetén rákényszerülnek a kamatláb folyamatának szimulálására.

Továbbá érdemes megjegyezni, hogy a Vašíček-modellnél bemutatott levezetés itt is érvényes a különböző lejárathoz tartozó spothozamok közötti korrelációra.

2.2.4. Többfaktoros modellek

A pontosabb becslések mellett a hozamok korrelációjából adódó problémákat is megoldhatja valamely bonyolultabb, több kockázati faktort tartalmazó modell alkalmazása. Az államadósság-kezelő szervek közül például a dán adósságkezelő használ kétfaktoros modellt, a CIR-modellre épülő Longstaff–Schwartz (*Longstaff és Schwartz* [1992]) modellt. Ebben a modellben a kamatlábfolyamat két független folyamat összegeként áll elő, ahol ez a két folyamat a CIR-modellhez hasonló dinamikát követ.

A modell előnye az, hogy analitikusan jól viselkedik, valamint mivel a CIR-modellből származtatható, könnyen kezelhető. A modellben a rövid kamatláb mellett a másik megjelenő faktor a rövid kamatláb varianciája. A modell felírása során a szerzők a CIR-modellre támaszkodtak, azonban a két faktor dinamikájára felírt egyenletekből ez már aligha olvasható le:

$$dr(t) = \left(\alpha\gamma + \beta\eta - \frac{\beta\delta - \alpha\xi}{\beta - \alpha} r(t) - \frac{\xi - \delta}{\beta - \alpha} V(t)\right) dt +$$
$$+\alpha \sqrt{\frac{\beta r(t) - V(t)}{\alpha(\beta - \alpha)}} dW_1(t) + \beta \sqrt{\frac{V(t) - \alpha r(t)}{\beta(\beta - \alpha)}} dW_2(t) \qquad (18)$$

$$dV(t) = \left(\alpha^2\gamma + \beta^2\eta - \frac{\alpha\beta(\delta - \xi)}{\beta - \alpha} r(t) - \frac{\beta\xi - \alpha\delta}{\beta - \alpha} V(t)\right) dt +$$
$$+\alpha^2 \sqrt{\frac{\beta r(t) - V(t)}{\alpha(\beta - \alpha)}} dW_1(t) + \beta^2 \sqrt{\frac{V(t) - \alpha r(t)}{\beta(\beta - \alpha)}} dW_2(t), \qquad (19)$$

ahol α, β, γ, δ, η és ξ pozitív konstansok. Jól látható, hogy itt a két faktor kölcsönösen hat egymásra.

A másik viszonylag könnyen kezelhető modell a kétfaktoros Hull–White-modell (*Hull* és *White* [1994]). A modell dinamikáját a

$$dr(t) = (\theta + \varepsilon(t) + \kappa_r \cdot r(t))dt + \sigma_r dW_r(t) \text{ és} \qquad (20)$$

$$d\varepsilon(t) = -\kappa_\varepsilon \cdot \varepsilon(t)dt + \sigma_\varepsilon \cdot \rho_{r,\varepsilon} dW_r(t) + \sigma_\varepsilon \cdot \sqrt{1 - \rho_{r,\varepsilon}^2} dW_\varepsilon(t) \qquad (21)$$

egyenletek írják le, ahol θ, κ_r, κ_ε, σ_r és σ_ε pozitív konstansok és $\rho_{r,\varepsilon}$ a két folyamat közötti korreláció.

Mindkét modellről elmondható, hogy orvosolja a kamatlábak korrelációjából adódó problémát, ugyanakkor a levezetett képletek lényegesen bonyolultabbak, mint az egyfaktoros esetben, így az adósságkezelők nem kerülhetik el a szükséges folyamatok szimulálását.

2.3. A modell kiválasztása

A megfelelő modell kiválasztására sajnos nincs egyértelmű szabály, nem lehet egyik lehetőségre sem azt mondani, hogy egyértelműen jobb, mint a többi. Azt, hogy az adósságkezelő melyik modellt szeretné alkalmazni, sok szempont mérlegelése után lehet eldönteni.

Figyelembe kell venni, hogy a modell közgazdasági szempontból reális eredményeket adjon, ugyanakkor még kezelhető legyen. Egy bonyolultabb modell esetén a szimuláció és a költségek és kockázatok számszerűsítése nyilván sokkal nagyobb energiát igényel, és tovább tart, mint egy lényegesen egyszerűbb modell esetében. Arról nem is beszélve, hogy a Vašíček-modell analitikus eredményeivel a kamatlábfolyamat szimulációjának nehézségei is elkerülhetővé válnak.

Azt, hogy az egyszerű kezelhetőség és gyorsaság miatt mekkora pontatlanságot hajlandó elfogadni egy adósságkezelő, a szervezet preferenciái döntik el. Még ezek ismeretében is hosszú tesztelések sorozata után lehet csak kiválasztani a benchmarkértékek meghatározásához használandó modellt.

2.4. Szimulációs lehetőségek

Amennyiben a modell analitikusan nem kezelhető, úgy mindenképp szükséges a kamatláb- és árfolyamfolyamatok modellezése. A szimulációra két lehetséges módszer létezik. Vagy valamilyen fával közelítjük a kérdéses folyamatot, vagy Monte-Carlo-szimulációt alkalmazunk.

2.4.1. Fával történő közelítés

Az első, eszközárazási problémák esetén igen gyakran alkalmazott megoldás a keresett folyamat valamely fával történő közelítése. Ezek diszkrét időparaméterű és diszkrét állapotterű modellek. Tehát a vizsgált folyamatot úgy közelítjük, hogy az minden véges időpontban csak véges sok értéket vehet fel, ezáltal a folyamat lehetséges értékeit ábrázolva, az idő előrehaladtával szerteágazó fát kapunk. Tehát az állapottér diszkrét mivoltát kihasználva, felírjuk az összes lehetséges trajektóriát, a modellezés tulajdonképpen az egyes elemi eseményekhez tartozó valószínűségek meghatározása.[8]

Elvileg tetszőleges fa alkalmas a modellezésre, ugyanakkor bizonyos tulajdonságokat szokás megkövetelni. Az első és legfontosabb, hogy a diszkrét modell határátmenetben azt a folytonos modellt adja, amelyet szimulálni szeretnénk. Ezen felül ésszerű elvárásnak tűnik, hogy a fa könnyen kezelhető legyen, így könnyítse meg az elvégzendő számításokat. Ez utóbbi tulajdonság miatt szokás olyan fákat alkalmazni, amelyek mondhatni önazonosan viselkednek. Azaz bármely időpontban és állapotban is vizsgáljuk, minden pontból ugyanannyi út vezet ki, és az adott utak feltételes valószínűségei azonosak. Természetesen extrém esetekben, például a fa szélein ettől eltérések lehetségesek, de minél egységesebb a modell, annál könnyebben kezelhető. A gyakorlatban általában ún. binomiális és trinomiális fákat szokás használni, azaz minden pontból a folyamat kettő, illetve három további állapotba juthat el.

A fával történő modellezés egyik legnagyobb hátulütője, hogy általános esetben igen sok állapotot kell felírni. Már egy binomiális fa esetén is a t -ik állapotban 2^{t-1} lehetséges állapot van, trinomiális fa esetén pedig 3^{t-1} . Ez nagyban megnehezíti és lelassítja a számításokat. Szerencsésebb helyzetben vagyunk, ha a modellezni kívánt folyamat Markov-folyamat, ekkor ugyanis a lehetséges állapotok száma jelentősen csökken, binomiális fa esetén például a t-ik időpontban csak t, trinomiális fánál pedig 2^{t-1} . Azonban a legtöbb, analitikusan amúgy is nehezen kezelhető modell esetében nem teljesül, hogy a leírni kívánt folyamat Markov-folyamat legyen, így a fával történő modellezés sokszor nehézségekbe ütközik.

Megemlítendő még, hogy kamatláb- és árfolyamfákat igen gyakran alkalmaznak egzotikus, analitikusan kezelhetetlen derivatív termékek árazására. Ugyanakkor az államadósság-kezelő szerveknél a fával történő modellezés egyáltalán nem jellemző, a cikkben példaként felhozott országok adósságkezelő intézményei közül egyikben sem alkalmazzák ezt a módszertant.

8 Ez ekvivalens azzal, hogy minden időpontban megadjuk az összes állapothoz, hogy a folyamat milyen valószínűséggel mely állapotokba lép tovább. Tulajdonképpen az adott állapotok feltételes valószínűségét szokás megadni az egy periódussal korábbi állapotok függvényében.

2.4.2. Monte-Carlo-szimuláció

A Monte-Carlo-szimuláció a folyamatokat folytonos állapottér mellett próbálja modellezni.[9] Az eljárás lényege, hogy minden lépésben egy trajektóriát követ végig. Azaz a folyamat sztochasztikájának szimulálásával minden időpontra generálja a folyamat egy lehetséges értékét, tehát például kamatlábmodellek esetén végigköveti a hozamgörbe változásának egy lehetséges folyamatát. A cél ennél az eljárásnál is az, hogy meghatározzuk a vizsgált időpontokban a modellezett folyamat értékeinek eloszlását. Ezt oly módon érhetjük el, hogy a szimulációt többször végrehajtjuk, így a kapott kimenetek gyakorisági eloszlása tartani fog az elméleti eloszláshoz.

Az egyik legfontosabb kérdés, hogy hány realizáció vizsgálata után fogadhatjuk el a kapott eloszlást mint jó közelítést. Erre nincs egyértelmű válasz, a témával foglalkozó tankönyvek 5–10 000 realizációt javasolnak, ám sok esetben[10] lényegesen kevesebb lépés is elegendő. A dán adósságkezelő például 2500 realizációt vizsgál a szimuláció során.

A módszer nagy előnye, hogy számításigénye nem függ az eredeti folyamat speciális tulajdonságaitól.

2.5. Paraméterek becslése

A szimulációhoz elengedhetetlen a modell paramétereinek becslése. A legtöbb modell esetében a paraméterbecslésre az általánosított momentumok módszere (Generalized Method of Moments, GMM) a leginkább használható és legelterjedtebb megoldás. Ezt a módszert használta a dán jegybank is a CIR-modell paramétereinek megbecsléséhez.

3. A BENCHMARKOK MEGHATÁROZÁSA

A megfelelő változók és modellek kiválasztása, valamint a szimulációk elvégzése után azonban még további kérdések és feladatok várnak az adósságkezelő intézményekre, hiszen a kapott eredmények alapján meg kell határozniuk az optimális benchmarkértékeket. További kérdések merülnek fel a kitűzött célértékek megvalósításával kapcsolatban is. Ez a fejezet bemutatja az optimális értékek meghatározásának módszereit, valamint a célértékek elérésére rendelkezésre álló eszközöket. Végül kitér a területben rejlő további kutatási potenciál vizsgálatára.

3.1. A modellezés eredményeinek értékelése

A benchmarkok meghatározásának utolsó lépése a szimuláció eredményeinek összegzése, és ezek alapján a kívánt célértékek meghatározása. Ehhez első lépésként a kiválasztott változók különböző értékei mellett szimulálni kell a kockázatok forrásaként fellépő hozam- és árfolyamfolyamatokat. Majd a szimuláció eredményeiből meg kell határozni a döntési

9 Kivéve természetesen, ha már az eredeti folytonos időparaméterű folyamat sztochasztikáját is diszkrét állapottéren értelmezett sztochasztikus folyamat eredményezte.

10 A szerző saját tapasztalatai alapján is.

paraméterek, azaz a kamatköltségek és a portfólió értékének eloszlását. Ezeknek az eloszlásoknak az ismeretében megkaphatjuk a benchmarkváltozók adott értékéhez tartozó költségeket, azaz a két eloszlás várható értékét[11] és a kockázatok számszerűsítésére alkalmas CaR- és VaR-mutatószámokat.

Amennyiben ezt a benchmarkként használandó változók minden lehetséges értéke mellett meg lehetne tenni, viszonylag könnyen meg lehetne határozni a lehetséges optimális portfóliókat. Azonban véges idő alatt csak véges sok paraméteregyüttes mellett van lehetőség a szimulációra. Tehát *n* benchmarkváltozó esetén az *n* dimenziós tér véges sok pontjához tudjuk meghatározni a keresett értékeket, azaz első lépésként a kapott pontokra egy folytonos függvényt kell illeszteni. Ezek után a probléma hasonló a portfólióelméletben vagy a CAPM-modellben is látott döntési problémához, csak magasabb dimenzióban. Első lépésként meg kell határoznunk a más pontokat egyértelműen domináló, hatékony portfóliók halmazát, majd ezek közül az államadósság-kezelő intézmény preferenciái, azaz kockázatvállalási hajlandósága alapján kell kiválasztanunk az optimális portfóliót, ezáltal a hozzá tartozó benchmarkértékeket.

A pontosság növelésére további lehetőség: ha már úgyis szerepel a modellben az a feltételezés, hogy a költségek és kockázatok a benchmarkváltozók értékeinek folytonos függvényei, akkor az első szimulációk után az adósságkezelő preferenciái alapján optimálisnak feltételezhető részen újabb szimulációval további pontokhoz tartozó értékeket határozunk meg. Ezáltal az illesztett függvény pontosabban fog illeszkedni, elősegítve az optimum precízebb meghatározását.

3.2. A kitűzött célértékek megvalósítása

A meghatározott benchmarkértékek elérésére is több eltérő módszer áll az államadósság-kezelő intézmények rendelkezésére. Egyrészt a kibocsátásokat lehet úgy tervezni, hogy a portfólió kiválasztott paraméterei a benchmarktartományon belül maradjanak, másrészt a kívánt változók értékeit swapok segítségével is lehet módosítani.

Az egyik véglet az, amikor csereügyletek használata nélkül, az adósságkezelő úgy tervezi a kibocsátásokat, hogy a portfólió megfeleljen a stratégiában meghatározottaknak. Ezzel a tiszta módszerrel azonban több probléma is van. Előfordulhatnak olyan piacok, ahol az adott piacon használt deviza 0%-os aránnyal szerepel az államadósság-kezelési stratégiában, ugyanakkor kifejezetten jó feltételek és nagy kereslet mellett lehetne kibocsátani az adott devizában denominált kötvényeket. Ekkor pusztán a kibocsátási terv használatával csak úgy tarthatók a stratégiai célok, ha az adósságkezelő intézmény nem aknázza ki ezt a lehetőséget.

Ugyanakkor csereügyletek segítségével megvalósítható, hogy az adott piacra kibocsátott kötvény pénzáramlásait a devizák részarányára vonatkozó benchmarktartománynak már megfelelő devizában megjelenő pénzáramlásra cserélje az adósságkezelő. Ezt a módszert alkalmazza a dán, a holland, a lett és a magyar államadósság-kezelő intézmény is a nem euróban vagy saját devizában denominált kötvényeik esetén.

11 A szimulált eloszlások átlagát.

Továbbá kamatlábswapok segítségével a fix-változó kamatozású eszközök aránya, ezáltal a portfólió egyes részeinek átlagideje is könnyen befolyásolható.

Akár az is megoldható, hogy a kibocsátási terv elkészítésekor ne kelljen figyelembe venni a kijelölt változókra vonatkozó célértékeket, csak a piaci igényekre és folyamatokra lehet koncentrálni. Majd csereügyeletek segítségével a portfóliót be lehet állítani a benchmarkértékeknek megfelelő tulajdonságúra.

Bár a nemzetközi gyakorlatban található erre a mentalitásra példa, a holland Dutch State Treasury Agency is ilyen módon tartja a stratégiáját, ez a rendszer több jelentős problémával rendelkezhet.

A csereügyleteket úgy kötik meg, hogy kezdetben a piaci értékük mindkét fél számára zérus. Azonban a piaci folyamatok hatására ez később változik, ráadásul nem feltétlenül marad a nulla közelében, sokszor jelentősen eltérhet tőle az egyik fél számára pozitív, míg a másiknak negatív irányban. Itt jelenik meg a már említett hitelezési kockázat problémája; ugyanis ha az a fél, akinek a csereügylet negatív értékű, fizetésképtelenné válik, akkor a swap pozitív felének birtokosa súlyos veszteségeket szenvedhet. Hogy ezt elkerüljék, egyrészt rendszeresen ki kell számítani az ügyletek piaci értékét, másrészt a negatív oldalon álló fél a piaci értéknek megfelelő összegű betétet[12] (ún. Marked-to-Market vagy MtM-betétet) helyez el a partnerénél[13], mintegy biztosítékként. Az ilyen transzfereket valamely előre rögzített rendszerességgel[14] hajtják végre, illetve akkor, ha a pozíció értéke jelentősen megváltozott két előre rögzített kiértékelési időpont között.

A csereügyletek számának növekedése tehát jelentős tranzakciós költségeket generál, ráadásul a betételhelyezés miatt likviditási kockázatot is okoz. A biztosítéknak számító betétek elhelyezésére vonatkozó megállapodás nélkül csak a legnagyobb szuverén kibocsátókkal hajlandók csereügyletet kötni a piaci szereplők, így az adósságkezelők többségének ezekkel a költségekkel számolnia kell.

Mindezek ellenére azonban mégsem ez az elsődleges oka annak, hogy egyes adósságkezelők a kibocsátás tervezésénél is figyelembe veszik a portfólióra vonatkozó benchmarkértékeket. Kis gazdasági erejű, önálló devizával rendelkező államokban ugyanis egyes csereügyleteknek nincs likvid piaca, azaz a portfólió paramétereinek swapokkal történő beállítása csak jelentős költségek árán érhető el. Például egy fix kamatozású kötvény pénzáramlását változó kamatozásúra cserélni lényegesen alacsonyabb költségek mellett lehetséges, ha a kötvény euróban denominált, mintha például magyar forintban vagy dán koronában.

Tehát az államadósság-kezelő intézmények jelentős részének fontos kérdés, hogy milyen mértékben támaszkodjanak swapokra, illetve a kibocsátási tervezésre a stratégia megvalósításakor. Látható, hogy minél nagyobb gazdasági erővel bíró valutaövezet része egy ország, annál inkább ki tudja használni a swappiac nyújtotta lehetőségeket a benchmarkok elérése és tartása céljából. Ugyanakkor érdemes megemlíteni, hogy egy nagyobb gazdasági súlyú

12 Az elhelyezett tartaléknak nem feltétlenül kell minden esetben betétnek lennie: megállapodástól függően, bizonyos esetekben lehet értékpapír is.

13 A tranzakciós költségek miatt általában létezik valamilyen alsó küszöb, amely alatt nem kerül sor tranzakcióra.

14 A gyakorlatban általában három- vagy hathavonta.

országnak a swapigénye is nagyobb, amit nem feltétlenül ellensúlyozhat a piac mérete. A francia adósságkezelő esetében például a portfólió egyes paramétereinek csereügyletekkel történő beállítása az elmúlt évtizedben a piac méretéből eredő korlátokba ütközött.

További szempontot jelent a tőkepiac fejlettsége, hiszen egy fejlettebb piacon, ahol a vállalati szektor is aktív résztvevője a csereügyleteknek, jóval alacsonyabb költségekkel tud swapokat alkalmazni az adósságkezelő, mintha lényegében egyedüli szereplő volna.

3.3. További kutatási lehetőségek

A témakör rengeteg további vizsgálódási lehetőséget nyújthat mind az inkább elméleti beállítottságú, mind a gyakorlatiasabb érdeklődésű kutatóknak. A különböző modellek összehasonlítása, tesztelése szükséges egy megalapozott döntés meghozatalához.

Elképzelhető, hogy a kérdéskört más, elsőre kevésbé gyakorlatias szemszögből is érdemes lenne vizsgálni. Az államadósság-kezelő intézmény problémája tulajdonképpen egy olyan időbeli optimalizálási, azaz irányítási probléma, ahol több döntési változó van, és a feladat során több döntési szempontot kell figyelembe venni. Azonban ezek a döntési szempontok, azaz a költségek és kockázatok a benchmarkváltozók sztochasztikus függvényei. Elképzelhető tehát, hogy a problémának a sztochasztikus dinamikai rendszerek és sztochasztikus irányítás témaköre felőli analitikus vizsgálatával is lehetséges eredményeket elérni.[15]

4. Összefoglalás

Összegzésként elmondható, hogy az államadósság-kezelő intézményeknél a benchmarkértékek meghatározása az adósságkezelési stratégia lényeges része, azonban a feladat igen komplex, és a legtöbb felmerülő kérdésre nem adható egyértelmű válasz. Igen sok múlik az adott ország gazdasági helyzetén, valamint az adósságkezelő preferenciáin; és még ezek figyelembevételével sem állapítható meg egyetlen, minden szempontból legjobb módszer. Szerencsére azonban a legtöbb kérdés jól körülhatárolt, és adott döntési szituációban megválaszolható.

Továbbá nagyon lényeges, és ritkán, vagy nem elég hangsúlyosan emlegetett, hogy a modellezés, valamint a kapott eredmények vizsgálata során sosem szabad megfeledkeznünk a háttérben meghúzódó, sokszor explicit módon ki sem mondott feltételezésekről. Például a fiktív portfólióalapú modellezés esetén fontos az a feltevés, hogy az adósságportfóliónak a rá ható kockázati faktorokra való érzékenységét teljesen meghatározzák a modellezni kívánt változók. Például a 3. fejezetben javasolt benchmarkváltozók esetében ez a feltételezés valószínűleg elfogadható, ám minden egyszerűsítés esetén újból meg kell vizsgálni. További feltételezés, amiről nem szabad megfeledkeznünk – ugyanakkor szinte biztosan nem teljesül –, az a piacnak a kamatlábmodellekkel kapcsolatos levezetések során szinte minden ponton kihasznált teljessége. Ez utóbbi feltételezés jelenti gyakorlatilag minden pénzügyi világban használt modell Achilles-sarkát, ugyanakkor igen gyakran nem szokás megemlíteni.

15 Ez a szerző véleménye: jelenleg még nem tökéletesen kiforrott gondolatmenet, mindössze egy lehetséges ötlet.

A fenti kérdések figyelembe vétele alapján úgy véljük, hogy ideális esetben az államadósság-kezelő az ország saját devizáján kívül egyetlen devizát határoz meg, amelynek részarányát a teljes adósságportfólióban benchmarkváltozónak tekinti. Továbbá célszerű célértéket meghatározni a saját és idegen devizában denominált részen belül a fix és változó kamatozású instrumentumok arányára, valamint ezeknek a részeknek a Macauley-féle átlagidejére. Ezeknek az értékeknek a különböző devizák esetében nem kell megegyezniük, ugyanakkor az EMU-csatlakozás előtt álló országok, mint például Magyarország esetében a célértékek közötti összhangra folyamatosan figyelni kell. Az optimális modell, mint már említettük, valamely analitikusan nem túl nehezen kezelhető, többfaktoros modell lehet, azonban ez nagyban függ az adósságkezelő erőforrásaitól. A stratégia végrehajtása során csereügyletek használata mindenképp bővíti az államadósság-kezelők lehetőségeit, azonban nem szabad megfeledkezni ezek költségeiről sem.

Függelék

5. Heath–Jarrow–Morton modell

A Heath–Jarrow–Morton modell egy igen általános modell, a paramétereire gyakorlatilag csak a kezelhetőség szempontjából minimálisan szükséges mérhetőségi megkötéseket kell tenni. Ebben a keretben viszonylag könnyen belátható, hogy egy kamatlábmodell esetén a határidős kamatláb driftjét egyértelműen meghatározza a volatilitásstruktúra.

Kiindulásként tekintsük a határidős kamatláb dinamikájára felírt egyenletet:

$$d_t f(t,T) = \mu(t,T)dt \cdot \sigma(t,t)dW(t)\,. \tag{22}$$

5.1. Arbitrázsmentességi feltétel

A határidős kamatláb definíciója alapján

$$\ln p(t,T) = -\int_t^T f(t,s)ds\,. \tag{23}$$

A kötvényárfolyam logaritmusának megváltozására a

$$
\begin{aligned}
&lnp(t,T) - lnp(0,T) = -\int_t^T f(t,s)ds + \int_0^T f(0,s)ds = \\
&= -\int_t^T f(t,s) - f(0,s)ds - \int_t^T f(0,s)ds + \int_0^T f(0,s)ds = \\
&= -\int_t^T \left(\int_0^t \mu(u,s)du + \int_0^t \sigma(u,s)dW(u) \right) ds + \int_0^t f(0,s)ds = \\
&= \int_0^t f(s,s)ds - \int_0^t \big(f(s,s) - f(0,s) \big) ds - \\
&- \int_t^T \left(\int_0^t \mu(u,s)du + \int_0^t \sigma(u,s)dW(u) \right) ds = \\
&= int_0^t f(s,s)ds - \int_0^t \int_t^T \mu(u,s)dsdu - \int_0^t \int_u^t \mu(u,s)dsdu - \\
&-- \int_0^t \int_t^T \sigma(u,s)dsdW(u) - \int_0^t \int_u^t \sigma(u,s)dsdW(u) = \\
&= \int_0^t r(s)ds - \int_0^t \int_u^T \mu(u,s)dsdu - \int_0^t \int_u^T \sigma(u,s)dsdW(u) = \\
&= \int_0^t r(s)ds - \int_0^t \tilde{\mu}(u,T)du - \int_0^t \tilde{\sigma}(u,T)dW(u)
\end{aligned}
\tag{24}
$$

formulát kapjuk, ahonnan tehát

$$
d_t lnp(t,T) = r(t)dt - \tilde{\mu}(t,T)dt - \tilde{\sigma}(t,T)dW(t), \tag{25}
$$

azaz a kötvény árfolyamára a

$$
\begin{aligned}
&d_t p(t,T) = p(t,T) d_t lnp(t,T) + \frac{1}{2} p(t,T) \tilde{\sigma}^2(t,T)dt = \\
&= p(t,T) \left[\left(r(t) - \tilde{\mu}(t,T) + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}^2(t,T) \right) dt \right] - \\
&- p(t,T) \left[\tilde{\sigma}(t,T)dW(t) \right]
\end{aligned}
\tag{26}
$$

dinamikát kapjuk.

Tehát a diszkontált kötvényárfolyam a

$$
\begin{aligned}
&d_t \frac{p(t,T)}{B(t)} = \frac{1}{B(t)} dp(t,T) - \frac{p(t,T)}{B^2(t)} dB(t) = \\
&= \frac{p(t,T)}{B(t)} \left[\left(r(t) - \tilde{\mu}(t,T) + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}^2(t,T) - r(t) \right) dt \right] - \\
&- \frac{p(t,T)}{B(t)} \left[\tilde{\sigma}(t,T)dW(t) \right]
\end{aligned}
\tag{27}
$$

dinamikát követ.

Node a σ-algebra a Wiener-folyamat által generált σ-algebra, így a P^* martingálmértékre való áttéréshez szükséges Radon–Nykodim-derivált a Girszanov-tétel értelmében

$$\frac{dP^*}{dP} = Z = exp\left\{-\int_0^T \lambda(t)dW(t) - \frac{1}{2}\int_0^T \lambda^2(t)dt\right\} \tag{28}$$

alakban előáll, azaz

$$W^*(t) = W(t) + \int_0^t \lambda(s)ds \tag{29}$$

P^* -Wiener.

Node $\frac{p(t,T)}{B(t)}$ -nek P^*szerint martingálnak kell lennie, azaz a

$$d_t\frac{p(t,T)}{B(t)} = \frac{p(t,T)}{B(t)}\left[\left(-\widetilde{\mu}(t,T) + \frac{1}{2}\widetilde{\sigma}^2(t,T) + \lambda(t)\widetilde{\sigma}(t,T)\right)dt\right] - $$
$$-\frac{p(t,T)}{B(t)}\left[\widetilde{\sigma}(t,T)dW^*(t)\right] \tag{30}$$

dinamikában a driftnek szükségképpen zérusnak kell lennie minden $0 \le t \le T$ esetén, tehát

$$\lambda(t) = \frac{\widetilde{\mu}(t,T)}{\widetilde{\sigma}(t,T)} - \frac{1}{2}\widetilde{\sigma}(t,T), \tag{31}$$

azaz a jobb oldalon álló kifejezés nem függ T-től.

Természetesen a driftnek T-szerint deriválva is zérusnak kell lennie, vagyis teljesülnie kell, hogy

$$-\mu(t,T) + \widetilde{\sigma}(t,T)\sigma(t,T) + \lambda(t)\sigma(t,T) = 0, \tag{32}$$

amiből egyszerű átrendezéssel kapható a driftre vonatkozó feltétel, azaz a folyamat driftje nem választható meg tetszőlegesen, hanem azt meghatározza a volatilitásstruktúra. Hiszen

$$\mu(t,T) = \sigma(t,T)\int_t^T \sigma(t,s)ds + \lambda(t)\sigma(t,T). \tag{33}$$

5.2. A kockázat piaci ára

Nem tartozik a dolgozat tárgyához, de ezen a ponton érdemes megjegyezni, hogy a driftfeltételbe a Girszanov-transzformáció kapcsán belekerült $\lambda(t)$-t a kockázat piaci árának is szokás nevezni. Tehát

$$\lambda(t) = \frac{\mu(t,T)}{\sigma(t,T)} - \int_t^T \sigma(t,s)ds. \tag{34}$$

6. Vašíček-modell

A Vašíček-modell alapegyenlete:

$$dr(t) = \left(k - \theta r(t)\right)dt + \sigma dW^*(t), \tag{35}$$

ahol *W*(t) P**-Wiener és *P** a *B(t)* számlálómérték melletti martingálmérték. Látható továbbá, hogy mind a determinisztikus, mind a diffúziós tag együtthatója az állapottér elemeitől csak az aktuális kamatláb értékén keresztül függ, azaz

$$dr(t) = a(t, r(t))dt + b(t, r(t))dW^*(t) \tag{36}$$

alakú.

6.1. Kötvényárfolyam, ha a kamatláb Markov-folyamatot követ

A kötvény árfolyama, mint minden terméké, megkapható mint a diszkontált kifizetés martingálmérték szerinti várható értéke. Tehát a

$$\begin{aligned} p(t,T) &= B(t)E_{P^*}\left(\frac{1}{B(T)} \mid \mathsf{F}(t)\right) = \\ &= E_{P^*}\left(\frac{B(t)}{B(T)} \mid \mathsf{F}(t)\right) = \\ &= E_{P^*}\left(exp\left\{-\int_t^T r(s)ds\right\} \mid \mathsf{F}(t)\right) \end{aligned} \tag{37}$$

képlettel fejezhető ki.

A (36) képletből látható, hogy a Vašíček-modellben a kamatláb Markov-folyamatot követ, míg a (37) egyenletből leolvasható, hogy a kötvény árfolyama csak az időnek, a lejárat időpontjának és a rövid kamatláb aktuális értékének függvénye, azaz

$$p(t,T) = V(t, r(t), T) \tag{38}$$

ahol V folytonos függvény.

Tudjuk továbbá, hogy ha a számlálómérték *B(t)*, akkor a betét értékével diszkontált árfolyamok *P**-martingálok.

Alkalmazzuk az Itô-lemmát a diszkontált kötvényárfolyamra!

$$\begin{aligned} d\frac{p(t,T)}{B(t)} &= d\frac{V(t,r,T)}{B(t)} = \\ &= \frac{1}{B(t)}dV(t,r,T) - \frac{1}{B^2(t)}V(t,r,T)dB(t) = \\ &= \frac{1}{B(t)}\left[V_t(t,r,T)dt + V_r(t,r,T)a(t,r)dt + V_r(t,r,T)b(t,r)dW^*\right] + \\ &+ \frac{1}{B(t)}\left[\frac{1}{2}V_{rr}(t,r,T)b^2(t,r)dt - rV(t,r,T)dt\right], \end{aligned} \tag{39}$$

ahol az alsó indexek a megfelelő változó szerinti parciális deriváltakat jelölik.

Node martingálról van szó, így driftjének zérusnak kell lennie, azaz a

$$V_t + aV_r + \frac{b^2}{2} V_{rr} - rV = 0 \tag{40}$$

egyenlőségnek fenn kell állnia minden t időpontban minden r kamatláb mellett. A felírt parciális differenciál egyenletben rá lehet ismerni a Feynman–Kač-formula során előkerülő egyenletre.

Ezt az egyenletet megoldva tehát megkapjuk az elemi kötvények árfolyamára vonatkozó formulát. A szükséges peremfeltételt az szolgáltatja, hogy a kötvények árfolyama lejáratkor minden kamatláb mellett egységnyi, tehát

$$V(T, r, T) = 1. \tag{41}$$

6.2. Kötvényárfolyam a Vašíček-modellben

A fentiek segítségével könnyen megkapható a Vašíček-modellbeli kötvényárfolyam. A modell a fent említett modellcsoport speciális esete, ahol

$$a(t, r(t)) = k \cdot \theta r(t) \tag{42}$$

$$b(t, r(t)) = \sigma \tag{43}$$

a két együttható. Így a megoldandó parciális differenciál-egyenlet a kötvény árfolyamára

$$V_t + (k - \theta r)V_r + \frac{\sigma^2}{2} V_{rr} - rV = 0$$

$$V(T, r, T) = 1 \tag{44}$$

minden $0 < r$ és minden $0 \le t \le T$ mellett.

Keressük a megoldást $V(t, r, T) = exp\{A(t,T) + C(t,T)r\}$ alakban! Ekkor az egyenlet

$$(A_t + rC_t)V + (k - \theta r)CV + \frac{\sigma^2}{2} C^2 V - rV = 0 \tag{45}$$

alakú lesz, ami kihasználva, hogy V nem lehet negatív, majd átrendezve

$$\left(A_t + kC + \frac{\sigma^2}{2} C^2\right) + r(C_t - \theta C - 1) = 0 \tag{46}$$

formára hozható.

Ennek az összefüggésnek fenn kell állnia minden $0 \le t \le T$ időpontban tetszőleges $r > 0$ kamatláb mellett, ami r-ben lineáris kifejezésről lévén szó, csak akkor lehetséges, ha mind a konstans tag, mind a lineáris rész együtthatója minden $0 \le t \le T$ időpontban zérus, azaz

$$A_t + kC + \frac{\sigma^2}{2} C^2 = 0 \tag{47}$$

$$C_t - \theta C - 1 = 0 \tag{48}$$

Ezekhez az egyenletekhez a peremfeltételeket az eredeti egyenlet peremfeltételéből kapjuk, hiszen az csak akkor teljesülhet tetszőleges $r > 0$-ra, ha

$$A(T,T) = 0 \tag{49}$$

$$C(T,T) = 0 \tag{50}$$

A (47) egyenletből az *A(t,T)* függvény egyszerű integrálással kapható, amennyiben a *C(t,T)* értéke már ismert. Ekkor

$$A(t,T) = \int_t^T kC(s,T) + \frac{\sigma^2}{2} C^2(s,T)ds, \tag{51}$$

míg a *C(t,T)* függvény a (48) egyenlet megoldásából adódik. Egy egyszerű inhomogén elsőrendű egyenlet könnyen megoldható. A megoldás

$$C(t,T) = c_1 e\theta t + c_2$$

alakú, ahol a c_1 és c_2 konstansok értékei a peremfeltételből és az eredeti egyenletből kaphatók. Az eredeti (48) egyenlet alapján ugyanis

$$C_t = \theta c_1 e^2 \theta t = \theta c_1 e^2 \theta t + \theta c_2 + 1, \tag{52}$$

ahonnan azonnal adódik, hogy

$$0 = \theta c_2 + 1$$

$$c_2 = -\frac{1}{\theta}. \tag{53}$$

Továbbá a (50) peremfeltétel alapján

$$C(T,T) = c_1 e^{\theta T} + c_2 = 0, \tag{54}$$

ahova behelyettesítve a c_2-re számított értéket, azt kapjuk, hogy

$$c_1 = \frac{1}{\theta} e^{-\theta T} \tag{55}$$

a másik konstans értéke.

Tehát a Vašíček-modellben a kötvényárfolyam

$$p(t,T) = exp\{A(t,T) + C(t,T)r(t)\}, \tag{56}$$

ahol

$$C(t,T) = \frac{e^{-\theta(T-t)} - 1}{\theta} \tag{57}$$

$$A(t,T) = \int_t^T kC(s,T) + \frac{\sigma^2}{2} C^2(s,T)ds. \tag{58}$$

6.3. Kamatláb feltételes eloszlása

A rövid kamatláb feltételes eloszlásának meghatározásához alkalmazzuk az Itô-lemmát az $e^{\theta t}$ *r(t)* folyamatra valamely $0 \le s < t < T$ időpontok között:

$$d\left(e^{\theta t} r(t)\right) = e^{\theta t} dr(t) + r(t)\theta e^{\theta t} dt =$$
$$= \left(e^{\theta t} k - e^{\theta t}\theta r(t) + r(t)\theta e^{\theta t}\right) dt +$$
$$+ e^{\theta t}\sigma dW^*(t), \tag{59}$$

ahonnan az egyenlet bal oldalán szereplő megváltozást átrendezve kapjuk, hogy

$$e^{\theta t} r(t) = e^{\theta s} r(s) + \int_s^t e^{\theta u} k du + \int_s^t e^{\theta u}\sigma dW^*(u) =$$
$$= e^{\theta s} r(s) + k\frac{e^{\theta t} - e^{\theta s}}{\theta} + \int_s^t e^{\theta u}\sigma dW^*(u). \tag{60}$$

A kapott egyenletből átrendezéssel a

$$r(t) = e^{-\theta(t-s)} r(s) + k\frac{1 - e^{-\theta(t-s)}}{\theta} + \int_s^t e^{-\theta(t-u)}\sigma dW^*(u) \tag{61}$$

explicit képletet kapjuk *r(t)* értékére.

Innen már könnyen leolvasható a keresett eloszlás, ugyanis az összeg első két tagja determinisztikus, tehát a kamatláb feltételes eloszlását az integrál eloszlása határozza meg. Mivel az integrandus determinisztikus és az integrátor Wiener-folyamat, a keresett eloszlás normális lesz.

Az eloszlás paramétereinek, azaz a feltételes várható értéknek és a feltételes szórásnégyzetnek a meghatározása a 2.2.2. fejezetben szerepel.

7. Cox–Ingersoll–Ross-modell

A CIR-modell alapegyenlete:

$$dr(t) = (\alpha - \beta r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW^*(t) \tag{62}$$

szintén a (36) egyenlet által adott folyamatok csoportjába tartozik, így a függelék 6.1 pontjában alkalmazott levezetés itt is használható.

A CIR modell esetén az együtthatók konkrétan

$$a(t, r(t)) = \alpha - \beta r(t) \tag{63}$$

$$b(t, r(t)) = \sigma\sqrt{r(t)} \tag{64}$$

alakúak.

7.1. Kötvényárfolyam a CIR-modellben

A megoldás tehát hasonló módon történik, mint a Vašíček-modell esetében. Itt a megoldandó parciális differenciálegyenlet

$$V_t + (\alpha - \beta r)V_r + \frac{\sigma^2 r}{2} V_{rr} - rV = 0 \tag{65}$$

minden $0 \leq t \leq T$ és minden $r > 0$ esetén, a peremfeltétel pedig továbbra is

$$V(T, r, T) = 1, \tag{66}$$

hiszen az elemi kötvény lejáratkor minden kamatláb mellett egyet fizet.

Ismét keressük a megoldást $V(t, r, T) = exp\{A(t, T) + C(t, T)r\}$ alakban. Így a megoldandó egyenlet

$$(A_t + rC_t)V + (\alpha - \beta r)CV + \frac{\sigma^2 r}{2} C^2 V - rV = 0 \tag{67}$$

alakú lesz, ahol kihasználva az árfolyam nem negatív voltát és átrendezve kapjuk, hogy

$$(A_t + \alpha C) + r\left(C_t - \beta C + \frac{\sigma^2}{2} C^2 - 1\right) = 0, \tag{68}$$

ami r-nek lineáris függvénye, tehát csak úgy teljesülhet minden $0 \leq t \leq T$ időpontra és minden $r > 0$-ra, ha mind a konstans, mind a lineáris tag együtthatója nulla, azaz

$$A_t + \alpha C = 0 \tag{69}$$

$$C_t - \beta C + \frac{\sigma^2}{2} C^2 - 1 = 0, \tag{70}$$

ahol a peremfeltételeket az eredeti V függvényre vonatkozó peremfeltételből hasonló gondolatmenettel kaphatjuk, azaz

$$A(T, T) = 0 \tag{71}$$

$$C(T, T) = 0 \tag{72}$$

kell, hogy legyen.

Amennyiben $C(t,T)$, ismert, az első egyenlet egyszerű integrálással megoldható, tehát

$$A(t, T) = \int_t^T \alpha C(s, T) ds, \tag{73}$$

azonban a második egyenlet megoldása már nem olyan egyszerű, mint a Vašíček-modell esetében.

Tehát meg kell oldani a

$$0 = C_t(t,T) - \beta C(t,T) + \frac{1}{2}\sigma^2 C^2(t,T) - 1$$
$$0 = C(T,T) \qquad (74)$$

közönséges differenciálegyenletet. Vezessük be a

$$h(t) = \xi C(t,T) + \eta$$
$$\xi = \frac{1}{2}\sigma^2$$
$$\eta = -\frac{\beta}{2}$$
$$\gamma = -\frac{2\sigma^2 + \beta^2}{4}$$

jelöléseket! Ekkor észrevehető, hogy

$$h'(t) = -h^2(t) - \gamma\,, \qquad (75)$$

azaz a *h(t)* kielégíti a Ricatti-egyenletet, amely az eredeti *C(t,T)*-re vonatkozó egyenletnél lényegesen könnyebben megoldható.

Keressük ennek a megoldását $h(t) = \frac{t(t)}{g(t)}$ alakban! A (75) egyenlettel ekvivalens tehát a

$$\begin{bmatrix} f' \\ g' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2\sigma^2 + \beta^2}{4} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(t) \\ g(t) \end{bmatrix}$$

elsőrendű homogén lineáris egyenletrendszer.

Jelölje a rendszer együtthatómátrixát *X*, ekkor ismert a rendszer megoldása, azaz

$$h(t) = e^{-X(T-t)}h(T)\,, \qquad (76)$$

aminek a meghatározásához az exponenciális függvényt hatványsorával kell közelíteni. Ehhez szükséges az *X* hatványainak meghatározása.

Szerencsére az *X* mátrix igen jól viselkedik, így könnyen kiszámítható, hogy a hatványok

$$X^{2k} = \begin{bmatrix} \left(\dfrac{2\sigma^2+\beta^2}{4}\right)^k & 0 \\ 0 & \left(\dfrac{2\sigma^2+\beta^2}{4}\right)^k \end{bmatrix},$$

valamint

$$X^{2k} = \begin{bmatrix} 0 & \left(\dfrac{2\sigma^2+\beta^2}{4}\right)^{k+1} \\ \left(\dfrac{2\sigma^2+\beta^2}{4}\right)^k & 0 \end{bmatrix}$$

alakúak.

Tehát

$$e^{Xs} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k s^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^{2k} s^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^{2k+1} s^{2k+1}}{(2k+1)!} \tag{77}$$

alakú a keresett exponenciális függvény, amelynek segítségével a keresett rendszer megoldása már könnyen kapható. A megoldásmátrix tehát $\lambda = \sqrt{-\gamma}$ helyettesítéssel a következő elemekből áll:

$$\Phi(1,1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\gamma)^k s^{2k}}{(2k)!} =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda s)^{2k}}{(2k)!} =$$
$$= \frac{e^{\lambda s} + e^{-\lambda s}}{2} = ch(\lambda s)$$

$$\Phi(2,2) = ch(\lambda s)$$

$$\Phi(2,1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} s^{2k+1}}{(2k+1)!} =$$
$$= \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k+1} s^{2k+1}}{(2k+1)!} =$$
$$= \frac{1}{\lambda} \frac{e^{\lambda s} - e^{-\lambda s}}{2} = \frac{1}{\lambda} sh(\lambda s)$$

$$\Phi(1,2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k+2} s^{2k+1}}{(2k+1)!} =$$
$$= \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k+1} s^{2k+1}}{(2k+1)!} =$$
$$= \lambda \frac{e^{\lambda s} - e^{-\lambda s}}{2} = \lambda sh(\lambda s), \qquad (78)$$

azaz a rendszer megoldása a

$$\begin{bmatrix} f(t) \\ g(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ch(-\lambda(T-t)) & \lambda sh(-\lambda(T-t)) \\ \frac{1}{\lambda} sh(-\lambda(T-t)) & ch(-\lambda(T-t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(T) \\ g(T) \end{bmatrix}$$

függvény, ahol *f(T) és gT* értékét az eredeti *C(t,T)*-re vonatkozó egyenlet peremfeltételéből kapjuk. Tehát

$$C(T,T) = 0$$
$$h(t) = \xi C(T,T) + \eta = \eta = -\frac{\beta}{2}, \qquad (79)$$

így *f(T)* és *g(T)* bármely olyan értéknek választható, amiknek a hányadosa $-\frac{\beta}{2}$. Használjuk tehát a

$$f(T) = -\frac{\beta}{2}$$
$$g(T) = 1$$

választást. Tehát a Ricatti-egyenlet megoldása a

$$h(t) = \frac{f(t)}{g(t)} = \frac{-\frac{\beta}{2} ch(-\lambda(T-t)) + \lambda sh(-\lambda(T-t))}{-\frac{\beta}{2\lambda} sh(-\lambda(T-t) + ch(-\lambda(T-t))} \qquad (80)$$

függvény.

Ebből *h(t)* definícióját kihasználva:

$$C(t,T) = \frac{h(t) - \eta}{\xi} = \frac{h(t) + \frac{\beta}{2}}{\frac{\sigma^2}{2}} =$$
$$= \frac{2}{\sigma^2} \frac{\left(\lambda - \frac{\beta^2}{4\lambda}\right) sh(-\lambda(T-t))}{ch(-\lambda(T-t)) - \frac{\beta}{2\lambda} sh(-\lambda(T-t))} \qquad (81)$$

a keresett megoldás. Ebbe λ definícióját visszahelyettesítve kapjuk, hogy a kötvény árfolyama a CIR-modellben

$$P(T,t) = exp\{A(t,T) + C(t,T)r(t)\}, \tag{82}$$

ahol

$$C(t,T) = \frac{2}{\sigma^2} \frac{\left(-\sqrt{\gamma} + \frac{\beta^2}{\sqrt{\gamma}}\right) sh\left(\sqrt{\gamma}(T-t)\right)}{ch\left(\sqrt{\gamma}(T-t)\right) + \frac{\beta}{2\sqrt{\gamma}} sh\left(\sqrt{\gamma}(T-t)\right)}$$

$$A(t,T) = \int_t^T \alpha C(s,T) ds$$

$$\gamma = -\frac{2\sigma^2 + \beta^2}{4}.$$

Irodalomjegyzék

Államadósság Kezelő Központ [2008]: A központi költségvetés finanszírozása 2008., ÁKK Zrt., Budapest

Cox, John C.–Ingersoll, Jonathan E.–Ross, Stephen A. [1985]: A Theory of the Term Structure of Interest Rates, *Econometrica*, Vol. 53., No. 2., 385–407. o.

Danmarks Nationalbank [2002]: Interest-Rate Models for Cost-at-Risk. Danish Government Borrowing and Debt 2001, 105–135. o., forrás: http://www.nationalbanken.dk/C1256BE9004F6416/side/Danish_Government_Borrowing_and_Debt_2001/$file/dgbd-2001.pdf (letöltés ideje: 2008. 03. 01.)

Danmarks Nationalbank [2006]: Interest-Rate Models for Cost at Risk Analysis. Danish Government Borrowing and Debt 2005, 99–113. o., forrás: http://www.nationalbanken.dk/C1256BE9004F6416/side/Danish_Government_Borrowing_and_Debt_2005/$file/slog_05_uk_web.pdf (letöltés ideje: 2008. 03. 01.)

Danmarks Nationalbank [2007]: Management of the Central Government's Interest-Rate Risk. Danish Government Borrowing and Debt 2006, 91–102. o., forrás: http://www.nationalbanken.dk/C1256BE9004F6416/side/Danish_Government_Borrowing_and_Debt_2006/$file/slog_uk_06_web.pdf (letöltés ideje: 2008. 03. 01.)

Danmarks Nationalbank [2008]: Danish Government Borrowing and Debt 2007., forrás: http://www.nationalbanken.dk/C1256BE9004F6416/side/Danish_Government_Borrowing_and_Debt_2007_publikation/$file/SLOG_UK_2007_web.pdf (letöltés ideje: 2008. 03. 01.)

Dutch State Tresury Agency [2007]: Risk Management of the National Debt, forrás: http://www.dutchstate.nl/uploads/Herijking%20rapport_engels-final.pdf (letöltés ideje: 2008. 03. 01.)

Dutch State Tresury Agency [2008]: Outlook 2008, forrás: http://www.dutchstate.nl/Uploads/Outlook2008.pdf (letöltés ideje: 2008. 03. 01.)

Heath, David–Jarrow, Robert–Morton, Andrew [1990]: Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A Discrete Time Approximation. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis,* Vol. 25. No. 4., 419–440. o.

Heath, David–Jarrow, Robert–Morton, Andrew [1992]: Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation. *Econometrica*, Vol. 60. No. 1., 77–105. o.

Hull, John–White, Alan [1994]: Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models II: Two-Factor Models, *The Journal of Derivatives*, Vol. 2. No. 2., 37–48. o.

Jorion, Philippe [1999]: A kockáztatott érték. Panem Könyvkiadó Kft., Budapest

Longstaff, Francis A.–Schwartz, Eduardo S. [1992]: Interest Rate Volatility ans the Term Structure: A Two -Factor General Equilibrium Model. *The Journal of Finance*, Vol. 47. No. 4., 1259–1282. o.

The Treasury of the Republic of Latvia [2007]: Latvian Central Government Debt Management Strategy, forrás: http://www.kase.gov.lv/texts_files/Debt_Management_Strategy_2007_izm.pdf (letöltés ideje: 2008. 03. 01.)
Vašíček, Oldřich [1977]: An Equilibrium Characterization Of The Term Structure, Journal of Financial *Economics*, Vol. 5. No. 8., 177–188. o.
National Bank of Denmark, http://www.nationalbanken.dk
French Treasury Agency, http://www.francetresor.gouv.fr
Austrian Federal Financing Agency, http://www.oebfa.co.at/e/index.htm
Belgian Federal Public Debt Department, http://www.debtagency.be
Dutch State Treasury Agency, http://www.dutchstate.nl
Financial Resources Department (The Treasury of the Republic of Latvia), http://www.kase.gov.lv
Government Debt Management Agency Ltd., http://www.akk.hu
German Finance Agency, http://www.deutsche-finanzagentur.de/eng