ÉRTESITŐ

AZ ERDÉLYI MÚZEUM-EGYLET ORVOS-TERMÉSZETTUDOMÁNYI SZAKOSZTÁLYÁBÓL.

II. TERMÉSZETTUDOMÁNYI SZAK.

XXI. kötet. 1899. I. füzet.

A Pascal-hatszög configuratiója két különös imaginarius hatszög esetében.

DR. KLUG LIPÓT kolozsvári tud. egyetemi magántanártól.

Az *Értesitő* természettud. szakának XIX. kötetében, 1897-ben „Az általános és négy különös Pascal-hatszög“ czímű értekezésemben négy oly PASCAL-hatszög configuratióját ismertettem, melyek szögpontjai egy-, két-, három- és négyféleképen képeznek involutiót. Egy kúpszeleten azonban oly hat pontot is vehetünk föl, melyek hatféleképen involutiós fekvésűek. A kúpszelet minden polaris háromszögének oldalai a kúpszeletet hat pontban metszik, melyek hatféleképen oszthatók föl involutiós helyzetű pontpárakra. Ámde ily hat pont nem lesz egyidejűleg való, hanem vagy mind a hat pont képzeleti, vagy négy való és kettő kapcsolt-képzeleti. Az első eset áll elő, ha a kúpszelet maga is képzeleti, a második pedig, ha a kúpszelet, mindkét esetben az a PASCAL-hatszög, melynek szögpontjai egy polaris háromszög oldalain fekszenek, képzeleti, mert oldalai részben képzeletiek. Még pedig a teljes hatszög tizenöt oldala közül az első esetben három való, hat pár kapcsolt-képzeleti; a másodikban hét való és négy pár kapcsolt-képzeleti. Noha amabban az esetben több való oldal van, mint ebben, mindamellett a PASCAL-egyenesek, KIRKMAN-pontok stb., általában a configuratiónak nagyobb része való és maga a configuratio a fölvett polaris háromszög irányában nagyobb symmetriát mutat az első esetben, mint a másodikban.

A következőkben szándékunk a PASCAL-hatszög configuratióját e két esetben bemutatni és azzal az idézett értekezést kiegészíteni. Az egyes pontok és egyenesek jelölésére ugyanazokat a betűket akarjuk használni, mint az „első közlemény“-ben, és a hol arra hivatkozunk, azt röviden „e. k.“-val fogjuk jelölni.

a) A Pascal-hatszög configuratiója abban az esetben, a midőn a kúpszelet képzeleti és a hatszög szögpontjai a kúpszelet egyik polaris-háromszögének oldalain fekszenek.

1. Egy $Q_{12}O_{34}Q_{56}$ háromszög $q_{12}=Q_{34}Q_{56}$, $q_{34}=Q_{56}Q_{12}$, $q_{56}=Q_{12}Q_{34}$ oldalain (1. ábra) az $R_{12}R_{21}$, $R_{34}R_{43}$, $R_{56}R_{65}$ pontpárokat akképen veszszük föl, hogy azok a szögpontpárakat harmonicusan válaszszák el, és az $R_{21}R_{43}R_{65}$ pontok egy h egyenesen feküdjenek. A fölvett R pontok ekkor egy h négy oldalnak szögpontjai, melynek oldalai

$$h=R_{21}R_{43}R_{65},\quad h'=R_{12}R_{34}R_{65},\quad h''=R_{12}R_{43}R_{56},\quad h'''=R_{21}R_{34}R_{56}$$

és melynek átlósháromszöge $Q_{12}Q_{34}Q_{56}$.

Ha e háromszög oldalain a szögpontokat és az R pontokat egy-egy involutiós sor társpontjainak tekintjük, akkor azoknak képzeleti kettőspontjai:

$$\left\{\begin{matrix} 1=(Q_{34}R_{12}Q_{56}R_{21}) \\ 2=(Q_{34}R_{21}Q_{56}R_{12}) \end{matrix}\right. \quad \left\{\begin{matrix} 3=(Q_{56}R_{34}Q_{12}R_{43}) \\ 4=(Q_{56}R_{43}Q_{12}R_{34}) \end{matrix}\right. \quad \left\{\begin{matrix} 5=(Q_{12}R_{56}Q_{34}R_{65}) \\ 6=(Q_{12}R_{65}Q_{34}R_{56}) \end{matrix}\right.$$

egy k képzeleti kúpszeleten feküsznek, melynek a $Q_{12}Q_{34}Q_{56}$ polaris háromszöge. STAUDT szerint[1] ama pontnégyesek értéke és pontjainak sorrendje a 12. . . 6 képzeleti pontokat meghatározza, úgy, hogy ama pontnégyesek a képzeleti pontok való képviselőinek tekinthetők.

Minthogy az R_{ij}, R_{ji} pontok kapcsolt polusok, a $Q_{12}Q_{34}Q_{56}$ háromszög pedig polaris háromszög k-ra vonatkozólag: a polaris háromszög q_{ij} egyik oldalán fekvő R_{ij} pontnak polarisa r_{ij} a Q_{ij} és az R_{ji} ponton megy keresztül. A h négy oldalnak k-ra vonatkozó polaris ábrája tehát egy oly H négyszög, melynek szögpontjai

$$H=r_{21}r_{43}r_{65},\quad H'=r_{12}r_{34}r_{65},\quad H''=r_{12}r_{43}r_{56},\quad H'''=r_{21}r_{34}r_{56},$$

a h négy oldal $h\,h'h''h'''$ oldalainak polusai.

2. Hogy az 1, 2, 3, 4, 5, 6 Pascal-hatszög hatvan PASCAL-egyenesét megkapjuk, föl kell keresnünk a hatszög tizenöt oldalának negyvenöt metszőpontját, azaz a PASCAL-pontokat. Ezek azonban részben valóak, részben képzeletiek.

[1] Beiträge zur Geometrie der Lage § 7. P. 76.

Két nem kapcsolt képzeleti pont összekötő egyenesének van egy való pontja, ha ama képzeleti pontok tartói egy síkban feküsznek. E való pontból a két képzeleti pontot képviselő projectivus pontnégyesek egymásba projiciálhatók, és maguk a projiciáló sugarak a két képzeleti pont összekötő egyenesének való képviselői.

Igy az

$$1=(Q_{34}R_{12}Q_{56}R_{21})$$

és a

$$3=(Q_{56}R_{34}Q_{12}R_{43})=(Q_{12}R_{43}Q_{56}R_{34})$$

pontnégyesek az R_{56} pontra vonatkozólag perspectivásak, tehát

$$13=R_{56}(Q_{34}R_{12}Q_{56}R_{21})=R_{56}(Q_{12}R_{43}Q_{56}R_{34}),$$

és hasonlókép

$$24=R_{56}(Q_{34}R_{21}Q_{56}R_{12})=R_{56}(Q_{56}R_{43}Q_{12}R_{34}).$$

A 13, 24 képzeleti egyeneseknek való metszőpontja tehát R_{56}, mely a való $q_{56}=56$ egyenesen fekszik; R_{56} lesz tehát a PASCAL-hatszög 13, 24, 56 oldalainak metszőpontja.

Ekkép eljárva, azt találjuk, hogy

$$R_{12}=(12, 35, 46) \quad R_{34}=(34, 26, 15) \quad R_{56}=(56, 24, 13)$$

$$R_{21}=(12, 36, 45) \quad R_{43}=(34, 25, 16) \quad R_{65}=(56, 23, 14),$$

azaz hogy az 1, 2, 3, 4, 5, 6 pont a k kúpszeleten hatfélekép képez involutiót, melyeknek hat involutió-középpontja R_{12}, R_{21}, ... R_{65} tizennyolcz való PASCAL-pontot szolgáltat. —

Két nem kapcsolt képzeleti egyenesnek metszőpontja azon a való egyenesen fekszik, melyen amaz egyenesek képviselő projectivus sugárnégyeseinek megfelelő sugarai egymást metszik. Így az

$$13=R_{56}(Q_{34}R_{12}Q_{56}R_{21})$$

$$26=R_{34}(Q_{56}R_{12}Q_{34}R_{21})$$

egyenesek metszőpontja, mert a

$$(R_{56}Q_{34},\ R_{34}Q_{56})=Q_{12},\ (R_{56}R_{12},\ R_{34}R_{12})=R_{12}$$

$$(R_{56}Q_{56},\ R_{34}Q_{34})=H,\ (R_{56}R_{21},\ R_{12}Q_{12})=E_{12}$$

pontok egyenesen fekszenek, oly képzeleti pont, melynek való képviselője $(Q_{12}R_{12}HE_{12})$.

Huszonnégy PASCAL-pont, azaz tizenkét pár kapcsolt-képzeleti pont lesz oly alkotású, mint az imént talált. Ha tekintetbe vesszük, hogy az E_{12} pont a $HH'H''H'''$ négyszög és a $hh'h''h'''$ négyoldal r_{21}, h''' oldalának metszőpontja és a többi oldalak metszőpontjait ekkép jelöljük:

$$E_{12}=(r_{21}h''') \quad E'_{12}=(r_{12}h'') \quad E''_{12}=(r_{12}h') \quad E'''_{12}=(r_{21}h)$$
$$E_{34}=(r_{43}h'') \quad E'_{34}=(r_{34}h''') \quad E''_{34}=(r_{43}h) \quad E'''_{34}=(r_{34}h')$$
$$E_{56}=(r_{65}h') \quad E'_{56}=(r_{65}h) \quad E''_{56}=(r_{56}h''') \quad E'''_{56}=(r_{56}h''),$$

akkor a 24 Pascal-pont:

$$(13,26)=(Q_{12}R_{12}HE_{12}) \qquad (35,42)=(Q_{34}R_{34}HE_{34})$$
$$(15,24)=(Q_{12}E_{12}HR_{12}) \qquad (31,46)=(Q_{34}E_{34}HR_{34})$$
$$(51,64)=(Q_{56}R_{56}HE_{56})$$
$$(53,62)=(Q_{56}E_{56}HR_{56})$$

$$(16,24)=(Q_{12}E_{12}H'R_{12}) \qquad (31,45)=(Q_{34}R_{43}H'E'_{34})$$
$$(13,25)=(Q_{12}E'_{12}H'R_{21}) \qquad (36,42)=(Q_{34}E'_{34}H'R_{43})$$
$$(52,63)=(Q_{56}R_{56}H'E'_{56})$$
$$(54,61)=(Q_{56}E'_{56}H'R_{56})$$

$$(15,23)=(Q_{12}R_{21}H''E''_{12}) \qquad (36,41)=(Q_{34}R_{34}H''E''_{34})$$
$$(14,26)=(Q_{12}E''_{12}H''R''_{21}) \qquad (32,45)=(Q_{34}E''_{34}H''R_{34})$$
$$(54,62)=(Q_{56}R_{65}H''E''_{56})$$
$$(51,63)=(Q_{56}E''_{56}H''R_{65})$$

$$(14,25)=(Q_{12}R_{12}H'''E'''_{12}) \qquad (32,46)=(Q_{34}R_{43}H'''E'''_{34})$$
$$(16,23)=(Q_{12}E'''_{12}H'''R_{12}) \qquad (35,41)=Q_{34}E'''_{34}H'''R_{43})$$
$$(53,61)=(Q_{56}R_{65}H'''E'''_{56})$$
$$(52,64)=(Q_{56}E'''_{56}H'''R_{65}).$$

Hátra van még három való Pascal-pont, t. i.:

$$(34,56)=Q_{12}, \quad (56,12)=Q_{34}, \quad (12,34)=Q_{56}.$$

E hatszögre nézve tehát tizenkét pár Pascal-pont kapcsolt-képzeleti, a többi huszonegy való.

3. A Pascal-egyeneseket úgy akarjuk jelölni, mint az e. k. I. táblázatában. Hogy közülök a kapcsolt-képzeletieket való pontokkal fölírhassuk, új pontokat kell használnunk.

A H négyszög H, H', H'', H''' szögpontjaiból kisugárzó oldalak, melyek egyszersmind az

$$(E_{12}E_{34}E_{56}) \quad (E_{12}E_{34}E_{56})' \quad (E_{12}E_{34}E_{56})'' \quad (E_{12}E_{34}E_{56})'''$$

háromszögek szögpontjain is keresztül mennek, e szögpontokkal szemben fekvő háromszög-oldalakat az

$$(E_{21}E_{43}E_{65})\ (E_{21}E_{43}E_{65})'\ (E_{21}E_{43}E_{56})''\ (E_{21}E_{43}E_{65})'''$$

pontokban metszik, melyekkel a PASCAL-egyeneseket már kifejezhetjük.

Ugyanis a b_1^{IV}, c_1^{IV} PASCAL-egyeneseken feküsznek megfelelőleg a

$$(13,46)=(Q_{34}E_{34}HR_{34}),\quad (32,65)=R_{65},\quad (15,24)=(Q_{12}E_{12}H_{12}R_{12})$$
$$(35,24)=(Q_{34}R_{34}HE_{34}),\quad (14,56)=R_{65},\quad (13,26)=(Q_{12}R_{12}H_{12}E_{12})$$

PASCAL-pontok, ennélfogva

$$b_1^{IV}=R_{65}(Q_{34}E_{34}HR_{34})=R_{65}(R_{56}E_{65}HE_{56})$$
$$c_1^{IV}=R_{65}(Q_{34}R_{34}HE_{34})=R_{65}(R_{56}E_{56}HE_{65})$$

kapcsolt-képzeleti egyenesek.

Hasonlókép következik, hogy

$$b_1^{IV}=R_{65}(R_{56}E_{65}HE_{56})\quad b_2^{V}=R_{43}(R_{34}E_{43}HE_{34})$$
$$b_3^{VI}=R_{21}(R_{12}E_{21}HE_{12})$$
$$b_1^{I}=R_{65}(R_{56}E_{65}HE_{56})'\quad b_2^{I}=R_{43}(R_{34}E_{43}HE_{34})''$$
$$b_3^{I}=R_{21}(R_{12}E_{21}HE_{12})''' \qquad \text{(I.}$$
$$\gamma_1^{VI}=R_{56}(R_{65}E_{65}HE_{56})''\quad \gamma_2^{IV}=R_{34}(R_{43}E_{43}HE_{34})'''$$
$$\gamma_3^{V}=R_{12}(R_{21}E_{21}HE_{12})'$$
$$\gamma_1^{V}=R_{56}(R_{65}E_{65}HE_{56})'''\quad \gamma_2^{VI}=R_{34}(R_{43}E_{43}HE_{34})'$$
$$\gamma_3^{IV}=R_{12}(R_{21}E_{21}HE_{12})'',$$

hol a zárjel jobb oldalán álló „′ ″ ‴“ a zárjelben levő betűkre, az R-ek kivételével, alkalmazandó.

E tizenkét egyeneshez kapcsolt-képzeleti a következő tizenkét PASCAL-egyenes:

$$c_1^{IV}\ c_2^{V}\ c_3^{VI}$$
$$c_1^{I}\ c_2^{I}\ c_3^{I} \qquad (\text{I}_1$$
$$\beta_1^{VI}\ \beta_2^{IV}\ \beta_3^{V}$$
$$\beta_1^{V}\ \beta_2^{VI}\ \beta_3^{IV}.$$

A többi harminczhat PASCAL-egyenes való, és négyesével a H négyszögnek, hármasával pedig a h négyoldalnak oldalain fekszik, és pedig:

$$
\begin{array}{lll}
c_1^{II}b_1^{III}\alpha_2^{VI}\alpha_2^{V}=r_{56} & c_2^{II}b_2^{III}\alpha_3^{IV}\alpha_1^{VI}=r_{34} & c_3^{II}b_3^{III}\alpha_1^{V}\alpha_2^{IV}=r_{12} \\
\alpha_1^{I}\beta_1^{II}\gamma_1^{III}\pi^{IV}=r_{65} & \alpha_2^{I}\beta_2^{II}\gamma_2^{III}\pi^{V}=r_{43} & \alpha_3^{I}\beta_3^{II}\gamma_3^{III}\pi^{VI}=r_{21} \qquad (I_2 \\
\multicolumn{3}{l}{p^{I}p^{II}p^{III}=h,\ a_1^{II}a_1^{III}a_1^{IV}=h',\ a_2^{II}a_2^{III}a_2^{V}=h'',\ a_3^{II}a_3^{III}a_3^{VI}=h'''}
\end{array}
$$

A hatvan Pascal-egyenes közül tehát harminczhat való, tizenkét pár pedig kapcsolt-képzeleti.

4. A hatvan Kirkman-pont a Pascal-egyenesből az e. k. III. táblázata alapján határozható meg. Az előforduló képzeleti pontoknak könnyen áttekinthető jelölésére új való pontokat használunk. A négy $(E_{12}E_{34}E_{56})^1$ háromszög e_{ij}^1 szögpontjának polarisát e_{ij}^1-vel, e szögponttal szemben fekvő oldalát pedig g_{ij}^1-lel, végre az e_{ij}^1 és g_{ij}^1 egyeneseknek metszőpontjait a H négyszög oldalaival, F és G betűkkel akarjuk jelölni. És pedig legyen:

$$
\begin{array}{ll}
F_{56} \;=(r_{65}e_{12}'e_{34}'') & F_{56}' \;=(r_{65}e_{12}e_{34}) \\
F''_{56}=(r_{56}e_{12}'''e_{34}''') & F_{56}'''=(r_{56}e_{12}''e_{34}'') \\[4pt]
F_{34} \;=(r_{43}e_{56}''e_{12}'') & F_{34}' \;=(r_{34}e_{56}'''e_{12}''') \\
F''_{34}=(r_{43}e_{56}e_{12}) & F_{34}'''=(r_{34}e_{56}'e_{12}') \\[4pt]
F_{12} \;=(r_{21}e_{34}'''e_{56}''') & F_{12}' \;=r_{12}e_{34}''e_{56}'') \\
F_{12}''=(r_{12}e_{34}'e_{56}') & F_{12}'''=(r_{21}e_{34}e_{56}) \\[4pt]
G_{56} \;=(r_{65}g_{12}''g_{34}''') & G_{56}' \;=(r_{65}g_{13}'''g_{34}'') \\
G_{56}''=(r_{56}g_{12}g_{34}') & G_{56}'''=(r_{56}g_{12}'g_{34}) \\[4pt]
G_{34} \;=(r_{43}g_{56}'''g_{12}') & G_{34}' \;=(r_{34}g_{56}''g_{12}) \\
G_{34}''=(r_{43}g_{56}'g_{12}''') & G_{34}'''=(r_{34}g_{56}g_{12}'') \\[4pt]
G_{12} \;=(r_{21}g_{34}'g_{56}'') & G_{12}' \;=(r_{12}g_{34}g_{56}''') \\
G_{12}''=(r_{12}g_{34}'''g_{56}) & G_{12}'' \;=(r_{21}g_{34}''g_{56}')
\end{array}
$$

A B_1^{IV} Kirkman-pont a

$$
\beta^{IV}=R_{34}(R_{43}E_{34}HE_{43})''' \quad \beta_3^{IV}=R_{12}(R_{21}E_{12}HE_{21})'' \quad \pi^{IV}=r_{65}
$$

egyeneseknek, a C_1^{IV} Kirkman-pont az ezekhez kapcsolt egyeneseknek metszőpontja; és mert

$$
\begin{array}{ll}
(R_{34}R_{43},\ R_{12}R_{21})=Q_{12} & (R_{34}E_{34}''',\ R_{12}E_{12}'')=E_{56} \\
(R_{34}H''',\ R_{12}H'')=F_{56} & (R_{34}E_{43}''',\ R_{12}E_{21}'')=G_{56},
\end{array}
$$

azért $B_1^{IV}=(Q_{56}E_{56}F_{56}G_{56})$ és C_1^{IV} az ehhez kapcsolt-képzeleti pont.

Ugyanígy eljárva, azt találjuk, hogy

$$
\begin{array}{lll}
B_1^{IV}=(Q_{56}E_{56}F_{56}G_{56}) & B_2^{V}=(Q_{34}E_{34}F_{34}G_{34}) & B_3^{VI}=(Q_{12}E_{12}F_{12}G_{12}) \\
B_1^{I}=(Q_{56}E_{56}F_{56}G_{56})' & B_2^{I}=(Q_{34}E_{34}F_{34}G_{34})'' & B_3^{I}=(Q_{12}E_{12}F_{12}G_{12})''' \\
\Gamma_1^{VI}=(Q_{56}E_{56}F_{56}G_{56})'' & \Gamma_2^{IV}=(Q_{34}E_{34}F_{34}G_{34})''' & \Gamma_3^{V}=(Q_{12}E_{12}F_{12}G_{12})' \\
\Gamma_1^{V}=(Q_{56}E_{56}F_{56}G_{56})''' & \Gamma_2^{VI}=(Q_{34}E_{34}F_{34}G_{34})' & \Gamma_3^{IV}=(Q_{12}E_{12}F_{12}G_{12})''
\end{array}
$$

és az ezekhez kapcsolt-képzeleti pontok

$$
\begin{array}{c}
C_1^{IV}\ C_2^{V}\ C_3^{VI} \\
C_1^{I}\ C_2^{I}\ C_3^{I} \\
\mathbf{B}_1^{VI}\ \mathbf{B}_2^{IV}\ \mathbf{B}_3^{V} \\
\mathbf{B}_1^{V}\ \mathbf{B}_2^{VI}\ \mathbf{B}_3^{IV}.
\end{array}
$$

A többi harminczhat KIRKMAN-pont való és polusa a k kúpszeletre vonatkozólag a hozzájuk tartozó PASCAL-egyeneseknek. T. i.:

$$
C_1^{II} B_1^{III} \mathbf{A}_2^{VI} \mathbf{A}_3^{V} = R_{56},\ C_2^{II} B_2^{III} \mathbf{A}_3^{IV} \mathbf{A}_1^{VI} = R_{34},\ C_3^{II} B_3^{III} \mathbf{A}_1^{V} \mathbf{A}_2^{IV} = R_{12}
$$

$$
\mathbf{A}_1^{I} \mathbf{B}_1^{II} \Gamma_1^{III} \Pi^{IV} = R_{65},\ \mathbf{A}_2^{I} \mathbf{B}_2^{II} \Gamma_2^{III} \Pi^{V} = R_{43},\ \mathbf{A}_3^{I} \mathbf{B}_3^{II} \Gamma_3^{III} \Pi^{VI} = R_{21}
$$

$$
P^{I} P^{II} P^{III} = H, \qquad A_1^{II} A_1^{III} A_1^{IV} = H'
$$

$$
A_2^{II} A_2^{III} A_2^{V} = H'' \qquad A_3^{II} A_3^{III} A_3^{VI} = H'''.
$$

A hatvan KIRKMAN-pont közűl tehát harminczhat való, tizenkét pár kapcsolt-képzeleti; a valóak polusai, a képzeletiek pedig nem polusai a hozzájuk tartozó PASCAL-egyeneseknek a k kúpszeletre vonatkozólag.

5. A configuratio STEINER-pontjai és egyenesei, valamint a CAYLEY-egyenesei és SALMON-pontjai az e. k. II. és IV. táblázata alapján írhatók fel. Ugyanis I_2), I) és I_1)-ből következik, hogy a STEINER-pontok:

$$
\begin{array}{llll}
\Pi = H & \mathbf{A}_1 = H' & \mathbf{A}_2 = H'' & \mathbf{A}_3 = H''' \\
 & B_1 = C_1 = R_{65} & B_2 = C_2 = R_{43} & B_3 = C_3 = R_{21} \\
 & \mathbf{B}_1 = \Gamma_1 = R_{56} & \mathbf{B}_1 = \Gamma_3 = R_{34} & \mathbf{B}_3 = \Gamma_3 = R_{12}
\end{array}
$$

P, A_1, A_2, A_3 pedig határozatlanok a h, h′, h″, h‴ egyeneseken; a STEINER-egyenesek:

$$
\begin{array}{lll}
B_1\ C_1\ \mathbf{A}_2\ \mathbf{A}_3 = r_{56} & B_2\ C_2\ \mathbf{A}_3\ \mathbf{A}_1 =_{34} & B_3\ C_3\ \mathbf{A}_1\ \mathbf{A}_2 = r_{12} \\
\mathbf{A}_1\ \mathbf{B}_1\ \Gamma_1\ \Pi = r_{65} & \mathbf{A}_2\ \mathbf{B}_2\ \Gamma_2\ \Pi = r_{43} & \mathbf{A}_3\ \mathbf{B}_3\ \Gamma_3\ \Pi = r_{21}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
P\ B_1\ B_2\ B_3 = P\ C_1\ C_2\ C_2 = h \\
A_1\ B_1\ \Gamma_2\ \Gamma_3 = A_1 C_1\ \mathbf{B}_2\ \mathbf{B}_3 = h' \\
A_2\ B_2\ \Gamma_3\ \Gamma_1 = A_2 C^2\ \mathbf{B}_3\ \mathbf{B}_1 = h'' \\
A_4\ B_3\ \Gamma_1\ \Gamma_2 = A_3 C_3\ \mathbf{B}_1\ \mathbf{B}_2 = h'''
\end{array}
$$

$P\, A_1\, A_2\, A_3$ pedig határozatlan; a CAYLEY-egyenesek:

$$\pi = h \quad \alpha_1 = h' \quad \alpha_2 = h'' \quad \alpha_3 = h'''$$
$$b_1 = c_1 = r_{65} \quad b_2 = c_2 = r_{43} \quad b_3 = c_3 = r_{21}$$
$$\beta_1 = \gamma_1 = r_{56} \quad \beta_2 = \gamma_2 = r_{34} \quad \beta_3 = \gamma_3 = {}_{12}$$

p, a_1, a_2, a_3 pedig a H, H', H'', H''' pontokon mennek keresztűl de határozatlanok; végre a SALMON-pontok

$$(b_1\, c_1\, \alpha_2\, \alpha_3) = R_{56} \quad (b_2\, c_2\, \alpha_3\, \alpha_1) = R_{34} \quad (b_3\, c_3\, \alpha_1\, \alpha_2) = R_{12}$$
$$(\alpha_1\, \beta_1\, \gamma_1\, \pi) = R_{65} \quad (\alpha_2\, \beta_2\, \gamma_2\, \pi) = R_{43} \quad (\alpha_3\, \beta_3\, \gamma_3\, \pi) = R_{21}$$
$$(p\, b_1\, b_2\, b_3) = (p\, c_1\, c_2\, c_3) = H$$
$$(a_1\, b_1\, \gamma_2\, \gamma_3) = (a_1\, c_1\, \beta_2\, \beta_3) = H'$$
$$(a_2\, b_2\, \gamma_3\, \gamma_1) = (a_2\, c_2\, \beta_3\, \beta_1) = H''$$
$$(a_3\, b_3\, \gamma_1\, \gamma_2) = (a_3\, c_3\, \beta_1\, \beta_2) = H''',$$

$(p\, a_1\, a_2\, a_3)$ pedig határozatlan.

E szerint: a meghatározható STEINER- és SALMON-pontok a H négyszögnek és a h négyoldalnak szögpontjai; a meghatározható STEINER- és CAYLEY-egyenesek pedig azoknak oldalai. Mindezek a pontok és egyenesek valóak.

***b)* A Pascal-hatszög configuratiója abban az esetben, a midőn a kúpszelet való és a hatszög szögpontjai a kúpszelet egyik polaris háromszögének oldalain feküsznek.**

6. Az előbbi configuratio $Q_{12}\, Q_{34}\, Q_{56}$ háromszögének oldalain három pontpár fekszik, t. i.

a q_{12} oldalon a $Q_{34}\, Q_{56}$, $R_{12}\, R_{21}$, 21 pontpár
a q_{34} „ „ $Q_{56}\, Q_{12}$, $R_{34}\, R_{43}$, 43 „
a q_{56} „ „ $Q_{12}\, Q_{56}$, $R_{56}\, R_{65}$, 65 „ ,

melyek közűl bármelyik a másik kettőt harmonicusan választja el, és a számjegyekkel jelöltek képzeletiek. Tételezzük föl jelenleg azt, hogy a 21, 43, $R_{56}\, R_{65}$ pontpárok valóak, és így az $R_{12}\, R_{21}$, $R_{34}\, R_{43}$, 56 pontpárok képzeletiek, melyeknek való képviselői az

$$R_{12} = (Q_{34}\; 2\; Q_{56}\; 1) \quad R_{34} = (Q_{56}\; 4\; Q_{12}\; 3) \quad 5 = (Q_{12}\, R_{56}\, Q_{34}\, R_{65})$$
$$R_{21} = (Q_{34}\; 1\; Q_{56}\; 2) \quad R_{43} = (Q_{56}\; 3\; Q_{12}\; 4) \quad 6 = (Q_{12}\, R_{65}\, Q_{34}\, R_{56})$$

pontnégyesek (2. ábra).

Az 1 2 3 4 5 6 ponton keresztűl menő k kúpszelet ekkor való, s reá vonatkozólag az R_{ij} R_{ji} pontpár kapcsolt polus; az R_{ij} pontnak polarisa $r_{ij} = Q_{ji}\ R_{ij}$; az 1 2 3 4 pontoknak pedig polarisai k-nak e pontokon keresztűl menő $t_1\ t_2\ t_3\ t_4$ érintői.

Ha az i, j pontokon keresztűl menő i j egyenesnek polusát S_{ij}-vel, az i j-nek az R_{56}, R_{65}-től külömböző metszőpontját az r_{56} és r_{65}-tel T_{ij}-nek nevezzük, akkor a h négyoldal oldalai jelenleg:

$$\begin{aligned}
h &= R_{65}\ R_{21}\ R_{43} = R_{65}\ (Q_{56}\ T_{23}\ R_{56}\ T_{14})\\
h' &= R_{65}\ R_{12}\ R_{34} = R_{65}\ (Q_{56}\ T_{14}\ R_{56}\ T_{23})\\
h'' &= R_{56}\ R_{12}\ R_{43} = R_{56}\ (Q_{56}\ T_{13}\ R_{65}\ T_{24})\\
h''' &= R_{56}\ R_{21}\ R_{34} = R_{56}\ (Q_{56}\ T_{24}\ R_{65}\ T_{13}),
\end{aligned}$$

és a k-ra vonatkozó polaris ábrának, a H négyszögnek szögpontjai:

$$\begin{aligned}
H &= r_{65}\ r_{21}\ r_{43} = (Q_{56}\ S_{14}\ R_{56}\ S_{23})\\
H' &= r_{65}\ r_{12}\ r_{34} = (Q_{56}\ S_{23}\ R_{56}\ S_{14})\\
H'' &= r_{56}\ r_{12}\ r_{43} = (Q_{56}\ S_{24}\ R_{65}\ S_{13})\\
H''' &= r_{56}\ r_{31}\ r_{34} = (Q_{56}\ S_{13}\ R_{65}\ S_{24}).
\end{aligned}$$

7. A PASCAL-pontok közűl jelen esetben:

$$\begin{array}{lll}
R_{12} = (12, 35, 46) & R_{34} = (34, 26, 15) & R_{56} = (56, 24, 13)\\
R_{21} = (12, 36, 45) & R_{43} = (34, 25, 16) & R_{65} = (56, 23, 14)\\
Q_{12} = (34, 56) & Q_{34} = (56, 12) & Q_{56} = (12, 34).
\end{array}$$

Ha a többi PASCAL-pont jelölésére az i j egyenesnek metszőpontját t_k-val $T_{ij}{}^k$-nek nevezzük, azaz

$$T_{ij}{}^k = (i\,j,\ t_k) \quad (i, j, k = 1, 2, 3, 4),$$

akkor

$$\begin{array}{ll}
(2\,4,\ 1\,6) = (R_{56}\ 2\,4\ T_{24}{}^1) & (1\,3,\ 4\,5) = (R_{56}\ 3\,1\ T_{13}{}^4)\\
\multicolumn{2}{c}{(1\,6,\ 4\,5) = (R_{56}\ Q_{56}\ T_{14}\ S_{14})}\\
(2\,4,\ 1\,5) = (R_{56}\ T_{24}{}^1\ 4\,2) & (1\,3,\ 4\,6) = (R_{56}\ T_{13}{}^4\ 1\,3)\\
\multicolumn{2}{c}{(1\,5,\ 4\,6 = (R_{56}\ S_{14}\ T_{14}\ Q_{56})}\\
(1\,3,\ 2\,6) = (R_{56}\ 1\,3\ T_{13}{}^2) & (2\,4,\ 3\,5) = (R_{56}\ 4\,2\ T_{24}{}^3)\\
\multicolumn{2}{c}{(2\,6,\ 3\,5) = (R_{56}\ Q_{56}\ T_{23}\ S_{23})}\\
1\,3,\ 2\,5) = (R_{56}\ T_{13}{}^2\ 3\,1) & (2\,4,\ 3\,6) = (R_{56}\ T_{24}{}^3\ 2\,4)\\
\multicolumn{2}{c}{(2\,5,\ 3\,6) = (R_{56}\ S_{23}\ T_{23}\ Q_{56})}
\end{array}$$

$$(14,\ 25) = (R_{65}\ 4\ 1\ T_{14}{}^{2})\quad (23,\ 46) = (R_{65}\ 3\ 2\ T_{23}{}^{4})$$
$$(25,\ 46) = (R_{65}\ Q_{56}\ T_{24}\ S_{24})$$
$$(14,\ 26) = (R_{65}\ T_{14}{}^{2}\ 1\ 4)\quad (23,\ 45) = (R_{65}\ T_{23}{}^{4}\ 2\ 3)$$
$$(26,\ 45) = (R_{65}\ S_{24}\ T_{24}\ Q_{56})$$
$$(23,\ 15) = (R_{65}\ 2\ 3\ T_{23}{}^{1})\quad (14,\ 36) = (R_{65}\ 4\ 1\ T_{14}{}^{3})$$
$$(15,\ 36) = (R_{65}\ Q_{56}\ T_{13}\ S_{13})$$
$$(23,\ 16) = (R_{65}\ T_{23}{}^{1}\ 3\ 2)\quad (14,\ 35) = (R_{65}\ T_{14}{}^{3}\ 1\ 4)$$
$$(16,\ 35) = (R_{65}\ S_{13}\ T_{13}\ Q_{56}).$$

A PASCAL-*pontok közűl tehát csak öt* ($Q_{12}\ Q_{34}\ Q_{56}\ R_{56}\ R_{65}$) *való, a többi húsz pár kapcsolt képzeleti.*

8. A PASCAL-egyenesek és KIRKMAN-pontok egyszerű jelölésére még új való pontokat akarunk használni. Ha a

$$T_{ij}T_{kj}{}^{i}\,T_{il}{}^{j}$$

háromszög oldalait ugyanoly mutatókkal ellátott kis t betűkkel jelöljük, mint a szemben fekvő szögpontokat, tehát

$$T_{ij}\ T_{kj}{}^{j}\ T_{ik}{}^{j} = t_{ij}\ t_{kj}{}^{i}\ t_{il}{}^{j},$$

és $\quad U_{13} = (t_{13}r_{56})\quad U_{24} = (t_{24}r_{56})\quad U_{14} = (t_{14}r_{65})\quad U_{34} = (t_{34}r_{65})$

$$V_{kj} = (t_{kj}{}^{l}\ t_{kj}{}^{i})$$
$$W_{il} = (t_{i}\ t_{kj}{}^{l}),$$

akkor e betűkkel a PASCAL-egyeneseket és a KIRKMAN-pontokat már kifejezhetjük.

Ugyanis a PASCAL-egyenesek:

$$\begin{array}{lll}
b_1{}^{IV} = R_{65}(R_{56}U_{14}T_{14}T_{23}) & b_2{}^{V} = T_{13}{}^{2}\,R_{43} & b_3{}^{VI} = T_{24}{}^{3}\,R_{21} \\
b_1{}^{I} = R_{65}(R_{56}U_{23}T_{23}T_{14}) & b_2{}^{I} = T_{23}{}^{1}\,R_{43} & b_3{}^{I} = T_{23}{}^{4}\,R_{21} \\
\gamma_1{}^{VI} = R_{56}(R_{65}U_{24}T_{24}T_{13}) & \gamma_2{}^{IV} = T_{14}{}^{2}\,R_{34} & \gamma_3{}^{V} = T_{13}{}^{4}\,R_{12} \\
\gamma_1{}^{V} = R_{56}(R_{65}U_{13}T_{13}T_{24}) & \gamma_2{}^{VI} = T_{24}{}^{1}\,R_{34} & \gamma_3{}^{IV} = T_{14}{}^{3}\,R_{12}
\end{array}$$

az ezekhez kapcsolt képzeleti egyenesek:

$$c_1{}^{I}\ \beta_2{}^{VI}\ \beta_3{}^{V}$$
$$c_1{}^{IV}\ \beta_2{}^{IV}\ \beta_3{}^{IV}$$
$$\beta_1{}^{V}\ c_2{}^{I}\ c_3{}^{VI}$$
$$\beta_1{}^{VI}\ c_2{}^{V}\ c_3{}^{I},$$

végre

$$c_1^{\mathrm{II}}\, b_1^{\mathrm{III}}\, \alpha_2^{\mathrm{VI}}\, \alpha_3^{\mathrm{V}} = r_{56} \quad c_2^{\mathrm{II}}\, b_2^{\mathrm{III}}\, \alpha_3^{\mathrm{IV}}\, \alpha_1^{\mathrm{VI}} = r_{34} \quad c_3^{\mathrm{II}}\, b_3^{\mathrm{III}}\, \alpha_1^{\mathrm{V}}\, \alpha_2^{\mathrm{VI}} = r_{12}$$

$$\alpha_1^{\mathrm{I}}\, \beta_1^{\mathrm{II}}\, \gamma_1^{\mathrm{III}}\, \pi^{\mathrm{IV}} = r_{65} \quad \alpha_2^{\mathrm{I}}\, \beta_2^{\mathrm{II}}\, \gamma_2^{\mathrm{III}}\, \pi^{\mathrm{V}} = r_{43} \quad \alpha_3^{\mathrm{I}}\, \beta_3^{\mathrm{II}}\, \alpha_3^{\mathrm{III}}\, \pi^{\mathrm{V}} = r_{21}$$

$$p^{\mathrm{I}}\, p^{\mathrm{II}}\, p^{\mathrm{III}} = R_{65}(R_{56}T_{23}Q_{56}T_{14}) \quad a_2^{\mathrm{II}}\, a_2^{\mathrm{III}}\, a_2^{\mathrm{V}} = R_{56}(R_{65}T_{13}Q_{56}T_{24})$$

$$a_1^{\mathrm{II}}\, a_1^{\mathrm{III}}\, a_1^{\mathrm{IV}} = R_{65}(R_{56}T_{14}Q_{56}T_{23}) \quad a_3^{\mathrm{II}}\, a_3^{\mathrm{III}}\, a_3^{\mathrm{VI}} = R_{56}(R_{65}T_{24}Q_{56}T_{13}).$$

A Kirkman-pontok:

$$B_1^{\mathrm{IV}} = (Q_{56}T_{23}S_{14}V_{14}) \quad B_2^{\mathrm{V}} = (q_{56}T_{13}{}^4\, 2W_{31}) \quad B_3^{\mathrm{VI}} = (q_{56}T_{24}{}^1\, 3W_{24})$$

$$B_1^{\mathrm{I}} = (Q_{56}T_{14}S_{23}V_{23}) \quad B_2^{\mathrm{I}} = (q_{56}T_{23}{}^4\, 1W_{32}) \quad B_3^{\mathrm{I}} = (q_{56}T_{23}{}^1\, 4W_{23})$$

$$\Gamma_1^{\mathrm{VI}} = (Q_{56}T_{13}S_{24}V_{24}) \quad \Gamma_2^{\mathrm{IV}} = (q_{56}T_{14}{}^3\, 2W_{41}) \quad \Gamma_3^{\mathrm{V}} = (q_{56}T_{13}{}^2\, 4W_{13})$$

$$\Gamma_1^{\mathrm{V}} = (Q_{56}T_{24}S_{13}V_{13}) \quad \Gamma_2^{\mathrm{VI}} = (q_{56}T_{24}{}^3\, 1W_{42}) \quad \Gamma_3^{\mathrm{IV}} = (q_{56}T_{14}{}^2\, 3W_{14}),$$

az ezekhez kapcsolt képzeleti pontok:

$$C_1^{\mathrm{I}}\, \mathbf{B}_2^{\mathrm{VI}}\, \mathbf{B}_3^{\mathrm{V}}$$
$$C_1^{\mathrm{IV}}\, \mathbf{B}_2^{\mathrm{IV}}\, \mathbf{B}_3^{\mathrm{IV}}$$
$$\mathbf{B}_1^{\mathrm{V}}\, C_2^{\mathrm{I}}\, C_3^{\mathrm{VI}}$$
$$\mathbf{B}_1^{\mathrm{VI}}\, C_2^{\mathrm{V}}\, C_3^{\mathrm{I}},$$

végre

$$C_1^{\mathrm{II}}\, B_1^{\mathrm{III}}\, \mathbf{A}_2^{\mathrm{VI}}\, \mathbf{A}_3^{\mathrm{V}} = R_{56} \quad C_2^{\mathrm{II}}\, B_2^{\mathrm{III}}\, \mathbf{A}_3^{\mathrm{VI}}\, \mathbf{A}_1^{\mathrm{IV}} = R_{34}$$
$$C_3^{\mathrm{II}}\, B_3^{\mathrm{III}}\, \mathbf{A}_1^{\mathrm{V}}\, \mathbf{A}_2^{\mathrm{IV}} = R_{12}$$
$$\mathbf{A}_1^{\mathrm{I}}\, \mathbf{B}_1^{\mathrm{II}}\, \Gamma_1^{\mathrm{III}}\, \Pi^{\mathrm{IV}} = R_{65} \quad \mathbf{A}_2^{\mathrm{I}}\, \mathbf{B}_2^{\mathrm{II}}\, \Gamma_2^{\mathrm{III}}\, \Pi^{\mathrm{V}} = R_{43}$$
$$\mathbf{A}_3^{\mathrm{I}}\, \mathbf{B}_3^{\mathrm{II}}\, \Gamma_3^{\mathrm{III}}\, \Pi^{\mathrm{VI}} = R_{21}$$

$$P^{\mathrm{I}}\, P^{\mathrm{II}}\, P^{\mathrm{III}} = (Q_{56}\, S_{23}\, R_{56}\, S_{14}) \quad A_2^{\mathrm{II}}\, A_2^{\mathrm{III}}\, A_2^{\mathrm{V}} = (Q_{56}\, S_{13}\, R_{65}\, S_{24})$$
$$A_1^{\mathrm{II}}\, A_1^{\mathrm{III}}\, A_1^{\mathrm{IV}} = (Q_{56}\, S_{14}\, R_{56}\, S_{23}) \quad A_2^{\mathrm{II}}\, A_3^{\mathrm{III}}\, A_3^{\mathrm{VI}} = (Q_{56}\, S_{24}\, R_{65}\, S_{13}).$$

A Pascal-egyenesek és Kirkman-pontok közűl tehát csak nyolcz való, t. i. az a négy, mely az r_{56}-tal és az, mely az r_{65}-tel, illetve az a négy, mely az R_{56}-tal és az, mely az R_{65}-tel egyesűl.

9. E hatszög Steiner-pontjai és egyenesei, valamint a Cayley-egyenesei és Salmon-pontjai ugyanazok, mint az *a*) alatt tárgyalt hatszögéi, azaz a meghatározható Steiner- és Salmon-pontok a H négyszögnek és a h négyoldalnak szögpontjai; a meghatározható Steiner- és Cayley-egyenesek azoknak oldalai. A Steiner-pontok és a Cayley-egyenesek közűl négy-négy, a Steiner-egyenesek és a Salmon-pontok közűl kettő-kettő való, ezek az R_{56}, R_{65}-ben, illetve az r_{56}, r_{65}-ben fekszenek; amazok közűl négy-négy, ezek közűl pedig egy-egy határozatlan.