EGYSZERŰ SZERKEZETŰ REPÜLŐRENDSZER LEGKÖZÖNSÉGESEBB MOZGÁSAI.

Vörös Cyrill k. r. tanártól.

A repülés differencziális egyenletei.

A madár-repülés elméletével foglalkozom a következőkben. A tárgyalás egyszerűsítése végett madártest helyett egy hasonló mozgás végzésére alkalmas gépre vonatkoznak fejtegetéseim. Ezen u. n. repülőgépnek csak legegyszerűbb mozgásaira szorítkozik analizisünk s látni fogjuk, a komplikáltabb esetekben minő nehézséggel állunk szemben. A természeti tűnemények legtöbbnyire oly bonyolódott, kúszált szálakból szővék össze, hogy nem tudjuk azokat rendbe szedni és a mathézist csak sok mellékes tényező tekinteten kivül hagyásával alkalmazhatjuk. Röviden azt mondhatjuk, hogy a mathematikai tárgyalás csak megközelítése a való dolgok viszonyainak.

Irodalmunkban e tárgy még nem igen talált munkásokra. Dr. *Martin Lajos* egyetemi tanár úr foglalkozott vele nálunk behatóbban, az Erdélyi Múzeum-Egylet „Orvos-természettudományi Értesítőjében" közölve a madár-repülésre vonatkozó értekezés-sorozatát. Ő főleg a madártest, illetőleg repülőrendszer alkatát vizsgálja tekintettel e mozgás lehetőségére s fontos eredményekre jut a rendszer alkatára s munkájára nézve. Dr. Farkas Gyula tanár úr egyetemi előadásaiban szintén kiterjeszkedett e tárgyra, noha csak mint mozgástani példára, egy egyszerü repülőrendszer függélyes lebegését vizsgálván. Jelen értekezésemben ennek általánosítását kisérlem meg. Tartózkodva a repülés nagy problémáitól, kizárólag magára a mozgásra szorítkozom, olyan repülőrendszert szupponálva, mely e mozgásra képes, tekintet nélkül a gép berendezésére és munkájára.

* * *

A virtuális momentumok elvét ezen ismeretes egyenlet fejezi ki:

$$\Sigma\left[\left(m\frac{d^2x}{dt^2}-X\right)\delta x+\left(m\frac{d^2y}{dt^2}-Y\right)\delta y+\left(m\frac{d^2z}{dt^2}-Z\right)\delta z\right]=o,$$

hol a Σ a zárjel tartalmazta kifejezés egy pontrendszer minden egyes pontjához tartozó értékének összegét jelenti. Az m egy pont tömege, x y és z koordinátái, X, Y és Z a reá ható erő komponensei.

Ezen egyenlethez járulnak még a mozgást megszorító koordinátareláczíók mint feltételi egyenletek. Ezeket a pontrendszerre s annak mozgására szabott feltételek szolgáltatják. Surlódás létezésétől természetesen eltekintek.

Pontrendszerünk két egymáson merőleges síkra nézve szimmetrikus legyen és három szilárd testből álljon, melyek ketteje egy-egy a harmadikhoz képest fix tengely körűl foroghat. A szimmetricitás már magában foglalja ezek szimmetriális voltál is, még hozzá teszszük, hogy a *tengelyek az egyik szimmetria síkhoz párhuzamosak legyenek.* A tengely körül forogható testeknek szárny, a harmadiknak törzs nevet adunk. *A szárnyakat tárgyalásunkban síkoknak vesszük. A törzsnek minden egyes pontja vertikális síkban mozogjon. A szárnyak pedig tengelyeik körül le- és felcsapódjanak és ezt mindkét szárny egy módon s egyszerre végezze. A sík, melyhez a szárnytengelyek párhuzamosak, vertikális helyzetet foglaljon el. A másik szimmetria-sík normálisa a horizontálissal állandó α szöget képez.*

A feltételi egyenleteket most már megfogalmazhatjuk.

Derékszögű koordinátarendszerünket úgy választjuk, hogy a vertikális szimmetria-sík legyen az yz sík s a z tengely vertikálisan felfelé irányuljon; az x és y tengely akkor horizontális. Origóúl a vertikális szimmetria-sík tetszőleges állandó pontját vegyük.

A következő jelölésekkel élünk. A törzs súlypontjának (nevezzük középpontnak) a koordinátái: o, b, c. A törzs egy tetszőleges pontjának a koordinátái egy újabb az előbbivel párházamos tengelyű s a középpontot origóúl biró, a törzshőz képest fix, koordinátarendszerben: ξ, η ζ; régi rendszerünkben tehát a törzspontok helyhatározói:

$$x=\xi,\ y=b+\eta,\ z=c+\zeta$$

A szárnytengelyek távolát az yz síktól jelentse a. A szárny egy tetszőleges pontjából az ő tengelyéhez vont merőleges legyen r és ennek a mozgás egy pillanatában a szárnytengelyeken át az yz síkra merőlegesen képzelt síkhoz való hajlási szöge φ.

Ezekhez képest az yz sík pozitiv oldalára eső szárny pontjainak koordinátái:

$$x = a + r\cos\varphi$$
$$y = b + r\sin\alpha\sin\varphi + B$$
$$z = c + r\cos\alpha\sin\varphi + C.$$

A másik szárnynál:

$$x = -a - r\cos\varphi$$
$$y = b + r\sin\alpha\sin\varphi + B$$
$$z = c + r\cos\alpha\sin\varphi + C,$$

a hol B és C a törzs középpontjának és a szárnytengelyeknek kölcsönös helyzetétől függő konstansok.

Az itt előjövő mennyiségek közül csak b, c és φ az idő funkcziói.

A virtuális momentumok egyenletének baloldalát három részletben fnjezzük ki.

$$\Sigma = \Sigma_t + \Sigma_+ + \Sigma_-,$$

hol Σ_t az összegezendő kifejezésnek a törzs, Σ_+ az yz sík pozitiv, Σ_- az yz sík negativ oldalán levő szárny pontjaira kiterjedő öszszegét jelenti.

A törzs egy tetszőleges pontjának tömegét jelentse m. *A szárnypontok tömegét pedig számitásunkban o-nak veszszük, kalkulusunk e szerint súlytalan szárnyakat szupponál;* tárgyalásunk így csak a törzs súlyához képest számot nem tevő síkfelületű szárnyakkal ellátott repülőgépre s az ilyenre is csak megközelítéssel érvényes. E megszorítást a számítás komplikáltságának elkerűlése végett teszszük.

A két utolsó Σ-ban csak az m-et nem tartalmazó tagok maradnak meg.

A koordinátavariácziók:

$$\delta x = o,\ \delta y = o,\ \delta z = \delta c \quad \ldots\ldots \quad \Sigma_t\text{-ban.}$$

$$\left.\begin{aligned} \delta x &= -r\sin\varphi\,\delta\varphi \\ \delta y &= \delta b + r\sin\alpha\cos\varphi\,\delta\varphi \\ \delta z &= \delta c + r\cos\alpha\cos\varphi\,\delta\varphi \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad \Sigma_+\text{-ban.}$$

$$\left.\begin{aligned} \delta x &= r\sin\varphi\,\delta\varphi \\ \delta y &= \delta b + r\sin\alpha\cos\varphi\,\delta\varphi \\ \delta z &= \delta c + r\cos\alpha\cos\varphi\,\delta\varphi \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad \Sigma_-\text{-ban.}$$

A sebesedési komponensekre csupán a tönzsnél van szükségünk, mert a szárnyak tömegteleneknek feltételezvék s a tömeg mindenütt a sebesedési komponensek faktora. A törzs pontjainál:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = o, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2b}{dt^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2c}{dt^2}$$

A törzs egy potjára ható erő komponenseit jelentsék: A, B és C, egy szárnypontra ható erőét pedig: X, Y és Z.

Ezek után

$$\Sigma_t = \Sigma \left[\left(m \frac{d^2b}{dt^2} - B\right) \delta b + \left(m \frac{d^2c}{dt^2} - C\right) \delta c\right]$$

$$\Sigma_+ = \Sigma \left[X_+ . r \sin \varphi \delta\varphi - Y_+ . (\delta b + r \sin \alpha \cos \varphi \delta\varphi) - Z_+ . (\delta c + r \cos \alpha \cos \varphi \delta\varphi)\right]$$

$$\Sigma_- = \Sigma \left[-X_- . r \sin \varphi \delta\varphi - Y_- . (\delta b + r \sin \alpha \cos \varphi \delta\varphi) - Z_- . (\delta c + r \cos \alpha \cos \varphi \delta\varphi)\right]$$

A szárnyakra ható erőket is szimmetrikusaknak véve a vertikális síkhoz

$$X_+ = -X_- = X, \; Y_+ = Y_- = Y, \; Z_+ = Z_- = Z.$$

Erre való tekintettel összeadjuk a három Σ-t és a variácziók szerint rendezzük, így jutunk a mozgási egyenlethez.

$$\delta b . \Sigma \left[\left(m \frac{d^2b}{dt^2} - B\right) - 2 Y\right] + \delta c . \Sigma \left[\left(m \frac{d^2c}{dt^2} - C\right) - 2 Z\right] - 2 \delta\varphi . \Sigma (X r \sin \varphi + Y r \sin \alpha \cos \varphi + Y r \cos \alpha \cos \varphi) = o.$$

A δb, δc és $\delta\varphi$ minden pontra ugyanazok levén a Σ-ból kiemelhetők voltak.

Minthogy a φ a szárnyakat forgató belső erők működésével tetszésre meghatározott módon változik az idővel s az időnek előre kijelelendő függvénye, így $\delta\varphi = o$.

A másik két variáczió tetszőlegességénél fogva ez a két egyenlet származik tehát:

$$\Sigma \left[\left(m \frac{d^2b}{dt^2} - B\right) - 2 Y\right] = o$$

$$\Sigma \left[\left(m \frac{d^2c}{dt^2} - C\right) - 2 Z\right] = o$$

Azon mozgásokra fordítsuk figyelmünket, a melyeknél *a törzs pontjaira egyedül a nehézségerő hat.* Ezt téve, a reálisnak képzelhető repülőgép valóságos mozgásától ismét jobban távozunk; valóságban u. i. a levegő ellenállása is számot tesz. *Tárgyalásunk ezzel a szárnyakhoz képest csekély légellenállást keltő törzsű gépekre vonatkozik.* Koordinátarendszerünk állásából érthetőleg $A = o$, $B = o$, $C = -g\,m$.

A szárnyakra a nehézségerő hatását már a tömeg o-sá tevésével kizártuk. Egy-egy szárnypontra működő erő irányát a szárnysíkra merőlegesnek teszszük s a szerint, a mint az iránya felfelé vsgy lefelé hajlik, a nagyságát R-rel vagy —R-rel jeleljük. Tehát

$$X = -R \sin \varphi,\ Y = R \sin \alpha \cos \varphi,\ Z = R \cos \alpha \cos \varphi.$$

A nehézségerő okozta gyorsulást mindig a szokásos g-ve jeleljük.

Egyenleteink a szükséges szubsztitucziók és összevonások elvégeztével e nez egyszerűbb alakot öltik magukra:

$$\frac{d^2b}{dt^2} \cdot \Sigma m = 2 \sin \alpha \cos \varphi\, \Sigma R$$

$$\frac{d^2c}{dt^2} \cdot \Sigma m = -g\, \Sigma m + 2 \cos \alpha \cos \varphi\, \Sigma R$$

A ΣR kétféle erők összege; szárnyak forgatására szolgáló belső eröké és a lég ellenállásáé. Az első félék összege a hatás és ellenhatás egyenlőségének elvén zérus. A lég ellenállása a tapasztalás szerint meg közelítőleg a szögsebesség négyzetével arányos, azaz μ alatt pozitiv konstanst értve irható $\mu\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$-nek. Igy lecsapáskor $\Sigma R = \mu\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$, visszacsapáskor pedig $\Sigma R = -\mu'\left(\frac{d\varphi'}{dt}\right)^2$, úgy, hogy a két esetben μ és $\frac{d\varphi}{dt}$ általában mások. *A tárgyalás első részében úgy a le- mint a visszacsapás szögsebességét állandónak tekintjük.* Nyilvánvaló, hogy e mellett a légellenállásnak azt a hatását, a mely a szárnyakon a törzs mozgásának következtében nyilvánul, elhanyagoltuk, a mi azt jelenti, hogy ezt a mozgást a szárnycsapkodással szemben már előzetesen igen kicsinek veszszük. A μ és μ' megkülönböztetése onnan van, hogy a szárnyfelület nagysága más lehet a le-, mint a felcsapáskor. De maga a μ és μ' itt állandónak fog számitani.

A szögsebességek állandóságának szuppozicziójára nézve megjegyzem, hogy a valóságban ugyan változáskor a $\frac{d\varphi}{dt}$ nem éri el rögtön új konstans értékét; ennek figyelembe vétele azonban mindjárt igen komplikálttá tenné tárgyalásunkat. Különben egy lehetséges valóságot így is megközelitünk.

Rövidség kedveért irjuk: $2\frac{\Sigma R}{\Sigma m} = e$. Igy azután

$$\frac{d^2b}{dt^2} = e \sin \alpha \cos \varphi$$

$$\frac{d^2c}{dt^2} = - g + e \cos \alpha \cos \varphi$$

Tudva, bogy a repülőrendszer középpontja az yz síkban marad, e két egyenlettel mozgását meghatározhatjuk.

* * *

Vertikális repülés.

Egyéb általánosságok mellett megmaradva állítsuk a repülőgép szárnytengelyeit horizontálisan.

$$\alpha = o.$$

Igy a két mozgási egyenlet:

$$\frac{d^2b}{dt^2} = o$$

$$\frac{d^2c}{dt^2} = - g + e \cos \varphi$$

Feltéve, hogy a gép y irányban semmi sebességet sem kap b = konstans, azaz középpontja vertikális egyenesben mozog.

Minthogy az e a ható erőktől is függ, ezek pedig mások a szárnyak visszacsapása alatt mint lecsapása alatt, e-nek két értéke van.

Lecsapás közben a szárnyakat mnzgató erő lefelé és így a levegő ellenállása felfelé hat. A lecsapásnál $e = \frac{2\mu}{\Sigma m}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$; visszacsapás közben ellenkező irányban kell a szárnyakat mozgatni, ezért $é = - \frac{2\mu'}{\Sigma m}\left(\frac{d\varphi'}{dt}\right)^2$.

Két egyenletünk van tehát, egyik a lecsapás, másik a visszacsapás alatt illeti meg a középpont mozgását. Az utóbbihoz tartozó mennyiségeket vonással különböztetjük meg amazéitól. A két egyenlet:

$$\frac{d^2c}{dt^2} = - g + e \cos \varphi$$

$$\frac{d^2c'}{dt^2} = - g + é \cos \varphi'$$

A középpont mozgása ezekből láthatólag egyenlőtlenül változó. Gyorsulása a szárnyak kitérési szögétől függ, ez ismét az időtől, mely vonatkozást abban a feltevésünkben, a mely fentebb már jelezve volt, hogy a szögsebesség külön a le- és külön a felcsapás alatt konstans,

$$\frac{d\varphi}{dt} = K$$

fejezi ki, a hol a K konstanst jelent. Lecsapás alatt a K nemleges, vissacsapás alatt igenieges. + és — jelekkel különböztessük meg őket egymástól.:

$$\frac{d\varphi}{dt} = -K$$

$$\frac{d\varphi'}{dt} = K'$$

Ezeket integrálva nyerjük:

$$\varphi = \varphi_0 - Kt$$

$$\varphi' = \varphi_0' + K't,$$

hol a φ_0 és φ_0' a lecsapás illetőleg visszacsapás kezdetéhez tartozó kitérési szögeket jelentik.

A mozgási egyenletek tehát:

$$\frac{d^2c}{dt^2} = -g + e\cos(\varphi_0 - Kt)$$

$$\frac{d^2c'}{dt^2} = -g + e'\cos(\varphi_0' + K't)$$

Integrálásuk semmi nehézséggel sem jár ugyan, de a miatt, hogy $\frac{dc}{dt}$ és $\frac{dc'}{dt}$, továbbá c és c' a lecsapás végén vagyis a visszacsapás kezdetén és a lecsapás elején azaz a felcsapás végén egyenlők tartoznak lenni, a mozgásnak ezen általánosságban való tárgyalása nehézségekbe ütközik. Azon mozgásokra fordítsuk csak figyelmünket, melyeknél a szárnyak igen kis szög alatt csapkodnak, úgy, hogy a $\varphi_0 - Kt$ és $\varphi_0' + K't$ nagyon keveset különböznek a φ_0-től illetőleg φ'_0-től, ezeket tehát konstansokként kezelhetjük. $\frac{d^2c}{dt^2}$ és $\frac{d^2c'}{dt^2}$ most állandók.

Tegyük

$$e\cos(\varphi_0 - Kt) = G$$

$$e'\cos(\varphi_0' + K't) = G',$$

tehát

$$\left.\begin{aligned} G &= \frac{2\mu}{\Sigma m}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\cos(\varphi_0 - Kt) = \frac{2\mu}{\Sigma m}k^2\cos(\varphi_0 - Kt) \\ G' &= -\frac{2\mu'}{\Sigma m}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\cos(\varphi_0' + K't) = -\frac{2\mu'}{\Sigma m}k'^2\cos(\varphi_0' + K't). \end{aligned}\right\} (\ast)$$

Ha a lecsapás és visszacsapás amplitudói (szélső szögei) mindig egyenlők, akkor *akármelyik* lecsapáshoz tartozik φ_0 és *akármelyik* visszacsapáshoz tarozik φ_0', igen kicsit különböznek (az amplitudók kicsisége miatt.) Közvetlenül egymásután következő le- és felcsapásban pedig mindig igen kicsiny a $\varphi_0 - \varphi_0'$.

A két egyenlet most így jelenik meg:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2c}{dt^2} &= -g + G \\ \frac{d^2c'}{dtc} &= -g + G' \end{aligned}\right\} \quad (o)$$

t_{2k+1} jelentse a mozgás kezdetétől a k+1-edik lecsapás, t_{2k+2} a k+1-edik visszacsapás végeig elmult időt. A lecsapás kezdetén illetve végén, minthogy ez visszacsapásnak vége illetőleg kezdete, mindakét egyenlet érvényes, miért is a lecsapás végét, s így egyszersmind a reá következő visszacsapás elejét illetőleg

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{dc}{dt}\right)_{2k+1} &= \left(\frac{dc'}{dt}\right)_{2k+1} \\ c_{2k+1} &= c'_{2k+1} \end{aligned}\right\} (*)'$$

A 2k+1 index a megjelelt mennyiségnek t_{2k+1} időbeli értékét jelenti. Hasonlóan jelelünk más időponthoz tartozó mennyiségeket is.

Úgy beszélünk, hogy, ha $c_{2k+2} > c_{2k}$, emelkedik; ha $c'_{2k+2} = c_{2k}$, nem is emelkedik, de le sem száll; ha $c'_{2k+2} < c_{2k}$ lefelé száll, értve: hogy átlag a felcsapás és reákövetkező lecsapás egész tartama alatt, a gép. A második esetnek adjuk a lebegés nevet.

Az integráczió ezen értékekhez juttat a sebességi komponensek számára:

$$\frac{dc}{dt} = \left(\frac{dc}{dt}\right)_{2k} - (g - G)(t - t_{2k}), \quad t_{2k} \overset{=}{<} t \leqq t_{2k+1} \quad . \quad (1)$$

$$\frac{dc'}{dt} = \left(\frac{dc'}{dt}\right)_{2k+1} - (g - G)(t - t_{2k+1}), \quad t_{2k+1} \overset{=}{<} t \leqq t_{2k+2} \quad . \quad . \quad (8)$$

Ismételt integráczió utján kapjuk:

$$c - c_{2k} + \left(\frac{dc}{dt}\right)_{2k} (t - t_{2k}) - \frac{1}{2}(g - G)(t - t_{2k})^2,$$

$$t_{2k} \overset{=}{<} t \leqq t_{2k+1} \ldots . (1')$$

$$c' = c'_{2k+1} + \left(\frac{dc'}{dt}\right)_{2k+1} (t - t_{2k+1}) - \frac{1}{2}(g - G')(t - t_{2k+1})^2,$$
$$t_{2k+1} \overset{=}{<} t \overset{<}{=} t_{2k+2} \dots (2')$$

A $\left(\frac{dc'}{dt}\right)_{2k+1}$ és c'_{2k+1} értékei az előbb említettek alapján $(\ast)'$ a következők:

$$\left(\frac{dc'}{dt}\right)_{2k+1} = \left(\frac{dc}{dt}\right)_{2k} - (g - G)(t_{2k+1} - t_{2k}) \dots (3)$$

$$c'_{2k+1} = c_{2k} + \left(\frac{dc}{dt}\right)_{2k} (t_{2k+1} - t_{2k}) - \frac{1}{2}(g - G)(t_{2k+} - t_{2k})^2 \dots (4)$$

Olyan mozgásokkal foglalkozzunk most, melyeknél

$$\left(\frac{dc'}{dt}\right)_{2k+2} = \left(\frac{dc}{dt}\right)_{2k} \quad (\ast)''$$

vagyis a lecsapások kezdetén ugyanaz a sebesség mint a következő visszacsapások végén, vagyis minden lecsapás kezdetén ugyanaz. Ezen mozgásokat a miatt, hogy a t_{2k} időkben $\frac{dc}{dt}$-nek állandó volta folytán hasonlítanak a közönséges egyenletes mozgáshoz, nevezzük el egyenletes repüléseknek. A vertikális repülés befejezéséűl majd a $\left(\frac{dc'}{dt}\right)_{2k+2} > \left(\frac{dc}{dt}\right)_{2k}$ esetet is látni fogjuk. Most, hogy $(\ast)''$ feltevést követjük, mozgási egyenleteink szerint

$$t_{2k+2} = \frac{G - G'}{g - G'} t_{1k+1} - \frac{G - g}{g - G'} t_{2k}$$

Vagy másképen írva

$$t_{2k+2} - t_{2k} = \frac{G - G'}{g - G'} (t_{2k+2} - t_{2k}) \quad \dots\dots (5)$$

Vagy ismét másképen írva

$$t_{2k+2} - t_{2k+1} = \frac{G - g}{g - G'} (t_{2k+1} - t_{2k})$$

Tehát, mivel G' nemleges, $G > g$ köteles lenni. Minél kisebb már most $G - g$, adott felcsapási idő és $- G'$ mellett annál nagyobb a lecsapási idő.

A) Egyenletes vertikális lebegés — Első tárgyúl az egyenletes repülésnél a vertikális lebegést, azaz a $c'_{2k+2} = c_{2k}$ megszorítással speczializált mozgást válasszuk. E megszorítás mozgási egyenleteinkből folyólag csak úgy teljesülhet, hogy

$$\left(\frac{dc}{dt}\right)_{2k}(t_{2k+2}-t_{2k})=\tfrac{1}{2}(g-G)(t_{2k+1}-t_{2k})^2+(g-G)(t_{2k+2}$$
$$-t_{2k+1})(t_{2k+1}-t_{2k})+\tfrac{1}{2}(g-G')(t_{2k+2}-t_{2k})^2$$

t_{2k+2} értékének (5)-ből szubsztituálása s egy kis rendezés $\left(\frac{dc}{dt}\right)_{2k}$ számára ezen értékhez vezet:

$$\left(\frac{dc}{dt}\right)_{2k}=\tfrac{1}{2}(g-G)(t_{2k+1}-t_{2k})\;.\;.\;.\;.\;.\;(6)$$

Ha az összes helyettesítéseket elvégezzük, a sebességekre ezeket a kifejezéseket nyerjük:

$$\frac{dc}{dt}=-\tfrac{1}{2}(g-G)\,[2(t-t_{2k})-(t_{2k+1}-t_{2k})].$$

$$\frac{dc'}{dt}=\tfrac{1}{2}\,[(G-G')+(g-G')](t_{2k+1}-t_{2k})-(g-G')(t-t_{2k})$$

A kitéréseket, tehát a mozgást pedig teljesen meghatározzák:

$$c=c_{2k}+\tfrac{1}{2}(g-G)(t_{2k+1}-t)(t-t_{2k})$$

$$c'=c_{2k}+\tfrac{1}{2}\,[(G-G')(t_{2k+1}-t_{2k})-(g-G')(t-t_{2k})]\times$$
$$(t-t_{2k+1}).$$

Keressük a középpont kilebbenéseinek értékét, a c értékek maximumát és minimumát.

Midőn

$$\frac{dc}{dt}=o,$$

a c max. vagy min.; midőn

$$\frac{dc'}{dt}=o,$$

a c′ az.

Az első beáll

$$t=t_{2k}+\tfrac{1}{2}(t_{2k+1}-t_{2k})$$

időben, a lecsapás közepén. Mivel a második derivátum

$$\frac{d^2c}{dt^2}=G-g$$

igenleges, a c a lecsapások közepén minimális értékét éri el.

A $\frac{dc'}{dt}$ — t o-sá teszi:

$$t = t_{2k} + \frac{1}{2}\frac{(G - G') + (g - G')}{g - G'}(t_{2k+1} - t_{2k})$$

$$= t_{2k+1} + \frac{1}{2}(t_{2k+2} - t_{2k+1}),$$

tehát a visszacsapás tartamának középső pillanata.

Ez időben $\frac{d^2c'}{dt} = -(g - G')$ nemleges és így c' megfelelő értéke maximális. A rendszer középpontja a visszacsapások közepén van tehát a legmagasabb helyen.

A min. és max. magasságok értékei:

$$c \min - c_{2k} = -\frac{1}{8}(G - g)(t_{2k+1} - t_{2k})^2$$

$$c' \max - c_{2k} = \frac{1}{8}\frac{(G - g)^2}{g - G'}(t_{2k+1} - t_{2k})^2$$

Mint mozgási egyenleteinkből kitünik $t = t_{2k}$ és $t = t_{2k+1}$ időkben

$$c = c_{2k} \text{ és } c' = c_{2k}.$$

A szárnycsapások kezdetén és végén ugyanazon a helyen van a gép, nevezhetjűk e helyet a lebegés középpontjának. Igaz, ugyan, hogy általában ettől nem egyenlő távolságra tér ki a rendszer középpontja fel és le; hanem

$$\left|\frac{\max.\ c' - c_{2k}}{\min.\ c - c_{2k}}\right| \gtreqless 1$$

a szerint, a mint

$$G + G' \gtreqless 2g,$$

vagyis

$$-G' \lesseqgtr G - 2g$$

De ekkor az (5) alatti időegyenletek szerint egyuttal

$$t_{2k+2} - t_{2k+1} \gtreqless t_{2k+1} - t_{2k}$$

A lecsapásokat a felcsapásoknál rövidebb időben végző gép tehát mélyebbre száll le a lebegési központ alá, mint a mennyire föléje emelkedik. Az ellenkező esetben fordítva áll a dolog.

A ($\ast$) alatti egyenlet szerint $G + G' \gtreqless 2g$, a mint

$$(\mu K^2 - \mu' K'^2)\frac{\cos\varphi_0}{\Sigma m} \gtreqless 2g.$$

Most ugyanis $\varphi_0 = \varphi_0'$ nagy megközelítéssel, amennyiben közvetlenűl egymásra következő le- és felcsapásról van szó. Ha a felcsapás amplitúdója akkora mint a lecsapásé, úgy

$$(t_{2k+1} - t_{2k+}) K = (t_{2k+2} - t_{2k+1}) K',$$

$$t_{2k+2} - t_{2k+1} \gtreqless t_{2k+1} - t_{2k},$$

a mint $K \gtreqless K'$. Ebből az következik, hogy mikor $K' = K$, akkor

$$(\mu - \mu') K^2 \frac{\cos \varphi_0}{\Sigma m} = 2g$$

tartozik lenni, tehát $\mu > \mu'$; (a szárny felülete lecsapáskor nagyobb köteles lenni, mint visszacsapáskor) ha $K' > K$: irjuk $K' = N K$, hol $N > 1$. Most kell, hogy legyen

$$(\mu - N^2\mu') K^2 \frac{\cos \varphi_0}{\Sigma m} < 2g.$$

Ez a régi μ, μ' és K mellett azt kivánja, hngy $\mu - N^2\mu' < \mu - \mu'$ legyen, a mi önként teljesül.

Ha pedig $K' < K$, ismét írható $k' = N K$, de most $N < 1$.

$$(\mu - N^2 \mu') K^2 \frac{\cos \varphi_0}{\Sigma m} > 2g,$$

a mihez az kivántatík meg, hogy $\mu - N^2 \mu' > \mu - \mu'$ legyen, ez pedig teljesül. Mindahárom esetben van tehát lebegés.

B) Egyenletes vertikális repülés. — Az (1), (2), (1') és (2') egyenletekre ezeket a feltételeket rójuk:

$$\left.\begin{array}{ll} c'_{2k+1} = c_{2k+1} & \left(\frac{dc'}{dt}\right)_{2k+1} = \left(\frac{dc}{dt}\right)_{2k+1} \\ c'_{2k+2} \gtreqless c_{2k} & \left(\frac{dc'}{dt}\right)_{2k+2} = \left(\frac{dc}{dt}\right)_{2k} \end{array}\right\} \quad (\ast)_1$$

Most is érvényes a

$$t_{2k+} - t_{2k} = \frac{G - G'}{g - G'} (t_{2k+1} - t_{2k})$$

időegyenlet, mely az egyenletesség feltétele. A rendszer működését illetőleg tehát a vertikális repülés is azon feltételek alatt lehetséges mint a lebegés és a $G > g$ tartozik lenni

A lecsapások kezdetéhez tartozó sebesseg pedig most az előző $(\ast)_1$ egyenlőtlenségnek megfelelően

$$\left(\frac{dc}{dt}\right)_{2k} \gtrless -\tfrac{1}{2}(G-g)(t_{2k+1}-t_{2k})$$

Legyen

$$\left(\frac{dc}{dt}\right)_{2k} = v - \tfrac{1}{2}(G-g)(t_{1k+1}-t_{2k}).$$

Ha v pozitiv, emelkedik; ha negativ, alászáll (az $(\ast)_1$ alatti egyenlőtlenség szerint) a gép.

A kellő szubsztitúcziók megtételével mozgási egyenletekűl nyerjük:

$$c = c_{2k} + [v - \tfrac{1}{2}(G-g)(t_{2k+1}-t)](t-t_{2k})$$

$$c' = c_{2k} + v(t_{2k+1}-t_{2k}) + \tfrac{1}{2}[2v + (G-G')(t_{2k+1} - t_{2k}) - (g-G')(t-t_{2k})](t-t_{2k+1})$$

Látható, hogy a repülő mozgást kétfélére lehet szétbontani: egyenletes v sebességü (ha t. i. $t_{2k+1} - t_{2k}$ állandó) haladásra és lebegésre. A gép emelkedés vagy alászállás közben lebeg. A v-t egyszerűen sebességtöbbletnek nevezhetjük, értve alatta azt a sebességmennyiséget, melylyel több vagy (negativ v-nél) kevesebb a repülés kezdősebessége az ugyanazon körülmények közt történő lebegés kezdősebességénél. Pozitiv és negativ sebességtöbbletről beszélhetünk.

Gyakorlati szempontból fontos tudni, mely viszony van az elmúlt idő és a megtett út között. Mindkét egyenletünkből $t = t_{2k+1}$ időre

$$c_{2k+1} = c_{2k} + v(t_{2k+1} - t_2{}^k)$$

s a második egyenletből a t_{2k+2} időre (az időegyenlet alapján)

$$c'_{2k+2} = c_{2k} + v(t_{2k+2} - t_2{}^k)$$

A csapások végén tehát a megtett út akkora, a mekkorát ugyanazon idő alatt v egyenletes sebességgel mozogva tenne meg a gép; még pedig felfelé vagy lefelé $v \gtrless o$ szerint.

A sebességek:

$$\frac{dc}{dt} = v + \tfrac{1}{2}(G-g)[2(t-t_{2k}) - (t_{2k+1}-t_{2k})]$$

$$\frac{dc'}{dt} = v + \tfrac{1}{2}[(G-G')+(g-G')](t_{1k+1}-t_{2k}) - (g-G')(t-t_{2k}).$$

A v-től eltekintve egyenleteink a lebegés ismert egyenleteinek alakjával birnak.

A $t_{2k+} - t_{2k}$ időközi lecsapás alatt legmélyebb helyét a

$$t = t_{2k} - \frac{v - \frac{1}{2}(G - g)(t_{2k+1} - t_{k})}{G - g}$$

időben éri el a középpont, hol

$$t - t_{2k} \lesseqgtr \tfrac{1}{2}(t_{2k+1} - t_{2k}),$$

a mint $v \gtrless o$; u. i.

$$t - t_{2k} = \tfrac{1}{2}(t_{2k+1} - t_{2k}) - \frac{v}{G - g}$$

Á legmélyebb hely:

$$c = c_{2k} - \frac{[v - \frac{1}{2}(G - g)(t_{2k+1} - t_{2k})]^2}{2(G - g)}$$

Tehát

$$(c - c_{2k})_{min.} = - \tfrac{1}{2}(G - g)\, t^2_{min.}$$

Itt a $t_{min.}$ az időnek a $c - c_{2k}$ minimumához tartozó értéke.

A felemelkedő gép e szerint a lecsapás közepénél előbb, a leereszkedő utóbb van egy lecsapás tartama alatt legmélyebb helyén.

A $t_{2k+2} - t_{2k+1}$ időközi visszacsapás alatt legmagasabb helyére a

$$t = t_{2k} + \frac{v + \frac{1}{2}[(G - G') + (g - G')](t_{2k+1} - t_{2k})}{g - G'}$$

időben jut el a rendszer centruma. Ez a hely

$$(c' - c_{2k})_{max.} = -(G - G')(t_{2}^{k+}{}_{1} - t_{2k})^2 + \tfrac{1}{2}(g - G')\, t^2_{max.}$$

$$(t - t_{2k+1})_{max.} = \tfrac{1}{2}(t_{2k+2} - t_{2k+1}) + \frac{v}{g - G'},$$

A felmenő gép a visszacsapás közepénél utóbb, a leszálló előbb ér a visszacsapás alatt legmagasabb helyére.

C) Gyorsuló vertikális repülés. — Az egyenletesnél általánosabb vertikális repüléssel is foglalkozhatunk.

Ugyancsak súlytalan szárnyakat, kis szárnycsapásokat és horizontális szárnytengelyeket feltéve a mozgást így korlátozzuk:

$$\left(\frac{dc'}{dt}\right)_{2k+1} = \left(\frac{dc}{dt}\right)_{2k+1}, \quad c'_{2k+1} = c_{2k+1}$$

$$\left(\frac{dc'}{dt}\right)_{2k+2} > \left(\frac{dc}{dt}\right)_{2k}, \quad c'_{2k+2} > c_{2k}$$

A mozgási egyenletek ugyanolyanok mint előbb, de most

$$t_{2k+2} - t_{2k} < \frac{G - G'}{g - G'} (t_{2k+1} - t_{2k})$$

Legyen, hogy a le- és visszacsapás egyenlő idők alatt történik, vagyis

$$t_{2k+2} - t_{2k} = 2 (t_{2k+1} - t_{2k}).$$

Azért

$$\frac{G - G'}{g - G'} > 2$$

$$2 g < G + G'$$

Ha ez áll, a $\left(\frac{dc'}{dt}\right)_{2k+2} > \left(\frac{dc}{dt}\right)_{2k}$ teljesül.

A $c'_{2k+2} > c_{2k+1}$-ből pedig az következik, hogy

$$\left(\frac{dc}{dt}\right)_{2k} > - \frac{1}{4} (G + G' - 2g)(t_{2k+1} - t_{2k}) - \frac{1}{2} (G - g)(t_{2k+1} - t_{2k})$$

Most írhatjuk tehát:

$$\left(\frac{dc}{dt}\right)_{2k} = v - \frac{1}{2} (G - g)(t_{2k+1} - t_{2k}).$$

Ez esetben egyenleteink is oly külső alakúak, aminők az egyenletes repülésnél.

A visszacsapás végén a sebesség:

$$\left(\frac{dc'}{dt}\right)_{2k+2} = v + \frac{1}{2} [(G - G') + (g - G')] (t_{2k+1} - t_{2k}) -$$
$$- (g - G') (t_{2k+2} - t_{2k}).$$

Egy kis rendezés és szubsztitúczió után:

$$\left(\frac{dc'}{dt}\right)_{2k+2} = v - \frac{1}{2} (G - g)(t_{2k+1} - t_{2k}) + (G - g)(t_{2k+1} - t_{2k}) -$$
$$- (g - G')(t_{2k+2} - t_{2k+1}).$$

Vagyis

$$\left(\frac{dc'}{dt}\right)_{2k+2} = \left(\frac{dc}{dt}\right)_{2k} + (G + G' - 2g)(t_{2k+1} - t_{2k}).$$

A sebesség, mint látjuk, egyik lecsapástól a következőig növekedik $(G + G' - 2g)(t_{2k+1} - t_{2k})$-val. Ha még az összes szárnycsapások egyenlő idejűek, a sebességnövekedés állandó. Ez a repülés megfelel az egyenletesen gyorsuló mozgásnak s nevezhető egyenletesen gyorsuló repülésnek.

A különbség e mozgás és az egyenletes repülés közt az, hogy, míg az egyenletes repülésnél a gép vagy a madár csak azzal a sebességével emelkedik felfelé, a melylyel megindult s a szárnycsapások egy-egy működési szakaszban csak a nehézségerőt küzdik le, addig az egyenletesen gyorsuló repülésnél a nehézségerő ellensúlyozásán kivül maguk a szárnyak is közreműködnek a test emelésére. A valóságban az egyenletes repülésnél a levegő lenyomó ellenállása egyre fogyasztja a sebességtöbbletet és így végre a madár, ha azt valamiképen nem pótolja, nem képes emelkedni; az egyenletesen gyorsulónál a levegőnek a törzsre gyakorolt ellenállása daczára is mindig emelkedhetik.

A gép működését illetőleg észrevehetjük, hogy akkor is, ha $t_{2k+2} - t_{2k+1}$ általában nem egyenlő $t_{2k+1} - t_{2k}$-val, az egyenletes és egyenletesen gyorsuló repülések közt csak a G és G' nagysági viszonyára nézve van kölönbség.

* * *

Horizontális szárnytengelyekkel biró repülőgép általánosabb mozgásai.

Ha a szárnytengelyek vízszintesek, $\frac{d^2b}{dt^2} = o$ és $\frac{d^2b'}{dt^2} = o$ miatt csak úgy lehetséges a vertikálisnál általánosabb mozgás, ha van kezdatben horizontális sebesség. A repülőrendszernél ez talán egy hátulról alkalmazott harmadik szárnynyal érhető el, mely csak néha tesz egy-egy csapást a levegő ellenállásától felemésztett horizontális sebesség pótlására. Elérhető vele, hogy e sebesség — legalább megközelitőleg — ugyanazon értéken lesz tartva.

Legyen $\frac{db}{dt} = h$ és $\frac{db'}{dt}$ szintén $= h$

A vertikális coordinátákra szóló differencziális egyenleteink:

$$\frac{d^2c}{dt^2} = -g + G$$

$$\frac{d^2c'}{dt^2} = -g + G'$$

Integrácziót végezünk s egyuttal $b'_{2k+1} = b_{2k+1}$, $c'_{2k+1} = c_{2k+1}$, $\left(\frac{dc'}{dt}\right)_{2k+1} = \left(\frac{dc}{dt}\right)_{2k+1}$ és $c'_{2k+2} = c_{2k}$, $\left(\frac{dc'}{dt}\right)_{2k+2} = \left(\frac{dc}{dt}\right)_{2k}$ tesszük, a mi vízszintes haladáshoz tartozó függélyes lebegés esete

$$b = b_{2k} + h(t - t_{2k})$$
$$b' = b_{2k} + h(t - t_{2k})$$
$$c = c_{2k} - \frac{1}{2}(G - g)(t_{2k+1} - t)(t - t_{2k})$$
$$c' = c_{2k} + \frac{1}{2}[(G - G')(t_{2k+1} - t_{2k}) - (g - G')(t - t_{2k})](t - t_{2k+1})$$

A c — k maximumára és minimumára vonatkozó megjegyzések itt ugyanazok mint a vertikális egyenletes lebegésnél. Csupán a pálya alakját határozzuk meg. Ezt a lecsapás idejére b és c egyenleteiből az idő eliminálásával kapjuk.

$$c - c_{2k} = -\frac{1}{2}(G - g)\left[(t_{2k+1} - t_{2k})\frac{b - b_{2k}}{h} - \frac{(b - b_{2k})^2}{h}\right]$$

Ez a pálya egyenlete a lecsapás alatt.

$$c - c_{2k} = -\frac{1}{8}(G - g)(t_{2k+1} - t_{2k})^2 + z$$
$$b - b_{2k} = \frac{1}{2}h(t_{2k+1} - t_{2k}) + y$$

koordinátatranszformáczióval ez alak adható neki:

$$y^2 = \frac{2h^2}{G - g}z$$

A parábola csúcsponti egyenlete áll előttünk. Előbbi rendszerünkben a parábola csúcsának koordinátái:

$$\frac{1}{2}(t_{2k+1} - t_{2k})h \text{ és } -\frac{1}{8}(t_{2k+1} - t_{2k})^2(G - g)$$

Mivel pedig

$$t = t_{2k} + \frac{t_{2k+1} - t_{2k}}{2}$$

időben

$$b = b_{2k} + \frac{1}{2}t_{3k+1} - - t_{2k})h$$
$$c = c_{2k} - \frac{1}{8}(t_{2k+1} - t_{2k})^2(G - g),$$

a lecsapás közepén éri el a középpont a porábola csúcsát. Minthogy továbbá $\frac{2h^2}{G - g} > o$, láthatjuk, hogy a parábola tengelye vertikálisan felfelé áll. Csúcsérintője horizontális.

A visszacsapási görbe egyenleteűl hasonlóképen nyerjük:

$$c' - c_{2k} = \frac{1}{2}\left[(G - G')(t_{2k+1} - t_{2k}) - (g - G')\frac{b' - b_{2k}}{h}\right]. \times$$
$$\left[\frac{b' - b_{2k}}{h} - (t_{2k+1} - t_{2k})\right]$$

A következő kordinátatránszformácziót használjuk:

$$c' - c_{2k} = \frac{1}{8}\frac{(G - g)^2}{g - G'}(t_{2k+1} - t_{2k})^2 + z$$

$$b' - b_{2k} = h\,(t_{2k+1} - t_{2k}) + \tfrac{1}{2}\,h\,(t_{2k+2} - t_{2k+1}) + y$$

Tekintettel még a

$$t_{2k+2} - t_{2k} = \frac{G - G'}{g - G'}\,(t_{2k+1} - t_{2k})$$

egyenletre is, mely mint a $\left(\frac{dc'}{dt}\right)_{2k+2} = \left(\frac{dc}{dt}\right)_{2k}$ feltételből származó itt is érvényes, a görbe egyenlete:

$$y^2 = -\frac{2\,h^2}{g - G'}\,z.$$

Ez is parábola és pedig tengelye vertikálisan lefelé áll, csúcsérintője pedig horizontális.

De $\quad t = t_{2k+1} + \frac{1}{2}(t_{2k+2} - t_{2k+1})$ időben

$$b' = b_{2k} + (t_{2k+1} - t_{2k})\,h + \tfrac{1}{2}\,(t_{2k+2} - t_{2k+1})\,h$$

$$c' = c_{2k} + \tfrac{1}{2}\,(t_{2k+1} - t_{2k})\,\frac{(G - g)^2}{g - G'}\,.$$

A visszacsapás közepén eri el a középpont a parábola csúcspontját.

A lecsapás végén

$$b = b_{2k} + h\,(t_{2k+1} - t_{2k}) \qquad c = c_{2k}$$

A visszacsapás végén

$$b' = b_{2k} + h\,(t_{2k+2} - t_{2k}) \qquad c' = c_{2k}.$$

Kigyózó mozgással van dolgunk. A szárnycsapások kezdetén és végén mindig egy bizonyos horizontális egyenesben van a középpont, a szárnycsapások alatt pedig parábolán mozog.

*

Upeanazok a differencziális egyenletek legyenek érvényben, mint az imént, a megszorítások közül pedig csak a $c'_{2k+2} = c_{2k}$ helyett legyen $c'_{2k+2} \gtreqless c_{2k}$ Egyebekben a tárgyalandó mozgás adat-rendszere egyezzék az előbbivel.

$$\left(\frac{dc}{dt}\right)_{2k} \gtreqless -\tfrac{1}{2}\,(G - g)\,(t_{2k+1} - t_{2k}).$$

v jelentse a sebességtöbbletet.

Mozgási egyenleteink lesznek:

$$b = b_{2k} + h\,(t - t_{2k})$$
$$b' = b_{2k} + h\,(t - t_{2k})$$

$$c = c_{2k} + [v - \tfrac{1}{2}(G - g)(t_{2k+1} - t)](t - t_{2k})$$

$$c' = c_{2k} + v(t_{2k+1} - t_{2k}) + \tfrac{1}{2}[2v + (G - G')(t_{2k+1} - t_{2k}) -$$
$$- (g - G')(t - t_{2k})](t - t_{2k+1})$$

A lecsapási görbe egyenlete:

$$c - c_{2k} = v.\frac{b - b_{2k}}{h} - \tfrac{1}{2}(G - g)(t_{2k+1} - t_{2k} - \frac{b - b_{2k}}{h}).\frac{b - b_2{}^k}{h}$$

Vagy a

$$b - b_2{}^k = - \frac{v - \frac{1}{2}(G - g)(t_{2k+1} - t_{2k})}{G - g} + y$$

$$c - c_{2k} = - \frac{[v - \frac{1}{2}(G - g)(t_{2k+1} - t_{2k})]^2}{2(G - g)} + z$$

tránszformáczióval

$$y^2 = \frac{2h^2}{G - g} z$$

Ez parábola egyenlete. Tengelye vertikálisan felnyulik. Csúcspontját a $(t - t_{2k})$ min. időben éri el a repülőrendszer középpontja, ez az idő

$$t = t_{2k} + \tfrac{1}{2}(t_{2k+1} - t_{2k}) - \frac{v}{G - g}$$

Hasonlóképen volna kimutatható, hogy a visszacsapás alatt is parábolán mozog a középpont, a melynek tengelye vestikálisan lefelé áll s melynek csúcsát a $(t - t_{2k+1})$ max. időben éri el. (*)

* * *

Ferde tengelyü repülőgép mozgása.

Általános egyenleteinkben α-t o-tól különbözőnek választva vertikálisan és horizontálisan is van a gépnek gyorsulása. A differencziális egyenletek:

$$\frac{d^2b}{dt_2} = h \qquad \frac{d^2c}{dt^2} = -g + v$$

$$\frac{d^2b'}{dt^2} = -h' \qquad \frac{d^2c'}{dt^2} = -g - v',$$

(*) Hogy parabola alakú pályákkal van dolgunk, ez maga, úgy ebben a tárgyalásban, mint az előzőben, már az (o) alatti alapegyenletek alakjából is kitetszik.

hol újabb jelenéseink értelme:

$$\left.\begin{aligned} h &= e \sin\alpha \cos\varphi & v &= e\cos\alpha\cos\varphi \\ h' &= -e'\sin\alpha\cos\varphi' & v' &= -e'\cos\alpha\cos\varphi' \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (7)$$

A h'-t és v'-t ellenkező jellel vettük mint h-t és v-t, mert — mint láttuk — $e > o$ és $e' < o$.

A repülőrendszer most vertikális mozgást csak úgy végezhet, ha a másik komponensének érvényesülése valami módon meg van akadályozva, pl. középpontján vertikálisan zsineg van áthuzva. E kényszermozgásoktól eltekintve az általános esettel foglalkozunk. A φ-re tett észrevételünket itt is fentartva konstansnak tekintjük.

Egyelőre csak a vertikális komponensekkel végezzünk. Integráczióval nyerjük:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dc}{dt} &= \left(\frac{dc}{dt}\right)_{2k} + (v-g)(t-t_{2k}) \\ \frac{dc'}{dt} &= \left(\frac{dc'}{dt}\right)_{2k+1} - (g+v')(t-t_{2k+1}) \\ c &= c_{2k} + \left(\frac{dc}{dt}\right)_{2k}(t-t_{2k}) + \tfrac{1}{2}(v-g)(t-t_{2k})^2 \\ c' &= c'_{2k+1} + \left(\frac{dc'}{dt}\right)_{2k+1}(t-t_{2k+1}) - \tfrac{1}{2}(g+v')(t-t_{2k+1})^2 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (8)$$

A következő megszorításokat teszszük:

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{dc'}{dt}\right)_{2k+1} &= \left(\frac{dc}{dt}\right)_{2k+1} & c'_{2k+1} &= c_{2k+1} \\ \left(\frac{dc'}{dt}\right)_{2k+2} &= \left(\frac{dc}{dt}\right)_{2k} & c'_{2k+2} &\gtreqless c_{2k} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (9)$$

Ezek elseje és másodika csak az integrácziós konstansoknak a pálya és sebesség folytonosságán alapuló megszabása levén, egyéb követelmény nélkül teljesül. A harmadik érvényesüléséhez

$$t_{2k+2} - t_{2k} = \frac{v+v'}{g+v'}(t_{2k+1} - t_{2k})$$

kivántatik.

A negyedikhez szükséges, hogy egyenlőtlenségi jeleire felelőleg legyen

$$\left(\frac{dc}{dt}\right)_{2k} \gtreqless -\frac{1}{2}(v-g)(t_{2k+1} - t_{2k})$$

Jelelje azt a sebességmennyiséget, a mely a jobboldalt a baloldallá egészíti ki V, a mely $\gtreqless$ o, a mint az egyenlőtlenségi jelek az iménti egyenlőtlenségben kivánják.

Mindezeket számításba véve, nevezetesen, a (9) kapcsán a (8)-ból folyólag

$$\left(\frac{dc'}{dt}\right)_{2k+1} = \left(\frac{dc}{dt}\right)_{2k+1} = \left(\frac{dc}{dt}\right)_{2k} + (v - g)(t_{2k+1} - t_{2k}), \text{ stb.}$$

a sebességeket és kitéréseket így irhatjuk:

$$\frac{dc}{dt} = V - \tfrac{1}{2}(v - g)(t_{2k+1} - t_{2k}) + (v - g)(t - t_{2k})$$

$$\frac{dc'}{dt} = V + \tfrac{1}{2}(v - g)(t_{2k+1} - t_2{}^k) - (g + v')(t - t_{2k+1})$$

$$c = c_2{}^k + \tfrac{1}{2}[2V - (v - g)(t_{2k+1} - t)](t - t_{2k})$$

$$c' = c_2{}^k + V(t_{2k+1} - t_{2k}) + \tfrac{1}{2}[2V + (v + v')(t_{2k+1} - t_{2k}) - (g + v')(t - t_{2k})](t - t_{2k+1})$$

Integráljuk a horizontális gyorsulások egyenleteit is.

$$\left.\begin{aligned}
\frac{db}{dt} &= \left(\frac{db}{dt}\right)_{2k} + h(t - t_{2k}) \\
\frac{db'}{dt} &= \left(\frac{db'}{dt}\right)_{2k+1} - h'(t - t_{2k+1}) \\
b &= b_{2k} + \left(\frac{db}{dt}\right)_{2k}(t - t_{2k}) + \tfrac{1}{2} h (t - t_{2k})^2 \\
b' &= b'_{2k+1} + \left(\frac{db'}{dt}\right)_{2k+1}(t - t_{2k+1}) - \tfrac{1}{2} h'(t - t_{2k+4})^2
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (8')$$

Ezekre már csak három megszorítást tehetünk. A b_{2k} tetszőlegessége miatt u. i. csak három integrácziós konstansra róható ki valami feltétel. E feltételek:

$$\left(\frac{db'}{dt}\right)_{2k+1} = \left(\frac{db}{dt}\right)_{2k+1} \quad b'_{2k+1} = b_{2k+1} \text{ és } b'_{2k+2} \gtreqless b_{2k} \quad \ldots\ldots (9')$$

A $\left(\frac{db'}{dt}\right)_{2k+2} = \left(\frac{db}{dt}\right)_{2k}$ feltétel már csak akkor teljesülhetne, ha

$$t_{2k+2} - t_{2k} = \frac{h + h'}{h'}({}_{2k+1} - t_{2k})$$

lenne. De mindenesetre

$$t_{2k+2} - t_{2k} = \frac{v + v'}{g + v'}(t_{2k+1} - t_{2k})$$

A
$$\frac{h - h'}{h'} = \frac{v + v'}{g + v'}$$
egyenlet pedig csak $g = o$ esetben állhat a h és v mennyiségek (7) alatti jelentései miatt, a mi ki van zárva. Igy a $\left(\frac{db}{dt}\right)_{2k+2} = \left(\frac{db}{dt}\right)_{2k}$ feltételtől eltekintünk.

(9') alatti egyenlőtlenségünk a (7) (8) alatti és a (9') alatti egyenletekből folyólag maga után vonja, hogy
$$\left(\frac{db}{dt}\right)_{2k} \gtreqless - \tfrac{1}{2} h (t_{2k+1} - t_{2k}) - \tfrac{1}{2} g' \frac{h - g'}{g' + h'} (t_{2k+1} - t_{2k}),$$
a hol $g' = g \operatorname{cotg}\alpha$. És minthogy $v = h \operatorname{cotg}\alpha$ és' $v' = h' \operatorname{cotg}\alpha$,
$$t_{2k+2} - t_{2k} = \frac{h + h'}{g' + h'} (t_{2k+1} - t_{2k}).$$
Ha H a horizontális sebességtöbblet (a mely t. i. az iménti egyenlőtlenség jobboldalát a baloldallá egészíti ki), minélfogva a jegyzett egyenlőtlenségi jelekre felelően $H \gtreqless o$, akkor
$$\left(\frac{db}{dt}\right)_{2k} = H - \tfrac{1}{2} h (t_{2k+1} - t_{2k}) - \tfrac{1}{2} g' \frac{h - g'}{g' + h'} (t_{2k+1} - t_{2k}) \; (\therefore)$$
Vagy, ha H-ba irásunk röviditésére az utolsó tagot is beleértjük és ekkor H'-val irjuk,
$$\left(\frac{db}{dt}\right)_{2k} = H' - \tfrac{1}{2} h (t_{2k+1} - t_{2k})$$
Egyenleteink tehát, minthogy a (9') kapcsán (8')-ból folyólag
$$\left(\frac{db'}{dt}\right)_{2k+1} = \left(\frac{db}{dt}\right)_{2k+1} = \left(\frac{db}{dt}\right)_{2k} + h\,({}_{2k+1} - t_{2k}) \text{stb.}:$$
$$\frac{db}{dt} = H' - \tfrac{1}{2} h (t_{2k+1} - t_{2k}) + h (t - t_{2k})$$
$$\frac{db'}{dt} = H' + \tfrac{1}{2} h (t_{2k+1} - t_{2k}) - h' (t - t_{2k})$$
$$b = b_{2k} + \left[H' - \tfrac{1}{2} h (t_{2k+1} - t)\right] (t - t_{2k})$$
$$b' = b_{2k} + H' (t_{2k+1} - t_{2k}) + \tfrac{1}{2} [2 H + (h + h') (t_{2k+1} - t_{2k}) - h' (t - t_2{}^{k})] (t - t_{2k+1}).$$
A lecsapások kezdetén $b = b_{2k}$ és $c - c_{2k}$, végén pedig $b = b_{2k} + \mathbf{H}' (t_{2k+1} - t_{\cdot k})$, $c = c_{2k} + V (t_{2k+1} - t_{2k})$.

A visszacsapások végén $c' = c_{2k} + V (t_{2k+2} - t_{2k})$

és ha H′ helyett $H - \frac{1}{2} g' \frac{h - g'}{g' + h'} (t_{2k+1} - t_{2k})$ - t (∴) és $t_{2k+1} - t_{2k}$ helyett $\frac{h + h'}{g + h'} (t_{2k+1} - t_{2k})$ - t teszünk, a b′-nek t_{2k+2} időbeli értekeűl találjuk:

$$b' = b_{2k} + H (t_{2k+2} - t_{2k})$$

Egy-egy lecsapás alatt legmélyebb helyét akkor éri el a repülőrendszer, mikor $\frac{dc}{dt} = o$, vagyis

$$t - t_{2k} + \frac{1}{2} (t_{2k+1} - t_{2k}) - \frac{V}{v - g}$$

időben; a lecsapás közepénél előbb, ha $V > o$, később, ha $V < o$.

A visszacsapás alatt legmagasabban van, midőn $\frac{dc'}{dt} = o$, tehát

$$t = t_{2k+1} + \frac{1}{2} \frac{v - g}{g + v'} (t_{2k+1} - t_{2k}) + \frac{V}{g + v'}$$

vagy, mivel

$$\frac{v - g}{g + v'} (t_{2k+1} - t_{2k}) = t_{2k+2} - t_{2k+1};$$

$$t = t_{2k+1} + \frac{1}{2} (t_{2k+2} - t_{2k+1}) + \frac{V}{g + v'}$$

időben; a visszacsapás felénél később, ha $V > o$; előbb, ha $V < o$.

Iménti egyleteink megilletik a ferdén fel- vagy leszálló repülőrendszert, amint $V > o$ vagy $V < o$. Érvényesek akkor is, ha $V = o$, a mi $c'_{2k+2} = c_{2k}$ esetben áll be. Ennek a mozgásnak is a lebegés nevet adhatjuk, mert egészben véve sem emelkedés, sem aláereszkedés nincs. Most is parabolán végzi a rendszer középpontja mozgását. A mozgás egyenletei most:

$$c = c_{2k} - \frac{1}{2} (v - g) (t_{2k+1} - t) (t - t_{2k})$$

$$c' = c_{2k} + \frac{1}{2} [(v + v') (t_{2k+1} - t_{2k}) - (g + v') (t - t_{2k})] (t - t_{2k+1})$$

$$b = b_{2k} + [H' - \frac{1}{2} h (t_{2k+1} - t)] (t - t_{2k})$$

$$b' = b_{2k} + H' (t_{2k+1} - t_{2k}) + \frac{1}{2} [2 H' + (h + h') (t_{2k+1} - t_{2k}) - \\ - h' (t - t_{2k})] (t - t_{2k+1})$$

A lecsapás alatt a pálya egyenlete, ha rövidség kedveért

$$m = - \frac{1}{2} \frac{t_{2k+1} - t_{2k}}{H} \text{ és } n = \frac{t_{2k+1} - t_{2k}}{H^2 (v - g)},$$

$$c = m\,[(v-g)\,b - hc] + n\,[(v-g)\,b - hc]^2$$

Ennek, ha $\operatorname{tg}\psi = \frac{v-g}{h}$, a

$$b = y\cos\psi - z\sin\psi,\ c = y\sin\psi + z\cos\psi$$

ránszformáczióval ez alak adható:

$$y\sin\psi + z\cos\psi = -m\,[(v-g)\sin\psi + h\cos\psi]\,z + n\,[(v-g)\sin\psi + h\cos\psi]^2 z.^2$$

A kúpszeletek általános egyenletével

$$a_{11}\,y^2 + 2\,a_{12}\,y\,z = a_{22}\,z^2 + 2\,a_{13}\,y + 2\,a_{23}\,z + a_{33} = o$$

összehasonlítva kitűnik, hogy

$$a_{11}\,a_{22} - a^2_{12} = o.$$

A pálya tehát parábola, melynek tengelye $\frac{v-g}{h}$ tangensű szöget képez a horizontálissal. Ugyancsak úgy mutatható meg, hogy a visszacsapási görbe is parábola, melynek tengelye $-\frac{v'+g}{h}$ tangenssel biró szög alatt hajlik a horizontálishoz.

$$\frac{dc}{dt} = o, \text{ ha } t = t_{2k} + \tfrac{1}{2}(t_{2k+1} - t_{2k}).$$

A pálya legmélyebb helyén tehát a lecsapás közepén van a gép. Ez a hely:

$$c = c_{2k} - \tfrac{1}{8}(v-g)(t_{2k+1} - t_{2k})^2.$$

Továbbá $\frac{dc'}{dt} = o$, midőn $t = t_{2k+1} + \tfrac{1}{2}(t_{2k+2} - t_{2k+1})$.

A pálya legmagasabb pontja a visszacsapás közepének felel meg és pedig

$$c' = c_{2k} + \frac{1}{8}\,\frac{(v-g)^2}{g+v'}\,(t_{2k+1} - t_{2k})^2$$

* * *

Az általánosabb jellegű tárgyalásnál felmerülő nehézségek.

Ha a repülőrendszer szárnyai nem súlytalanok s nem is síkok, olyan differencziális egyenletekhez jutunk a mozgás meghatározásában, a melyek további tárgyalásra nem látszanak alkalmasnak.

Eddigi általános jelzéseinket itt is megtartva m alatt szárnypont tömegét, ε alatt a szárnypontból a szárnytengelyhez merőlegesen vont vectornak egy, a szárnytengelyen átmenő s a szárnyhoz rögzitett síkhoz való hajlási szögét, φ alatt pedig ugyanezen síknak a szárnytengelyt magában foglaló, az y z síkra merőleges síkkal képezett szögét értjük.

A hosszas dedukcziót itt mellőzzük. A differencziális egyenletek, a melyekhez juthatunk:

$$\frac{d^2b}{dt^2}\Sigma(m+m_1)+\cos\alpha\frac{d^2\cos\varphi}{dt^2}\Sigma m_1 r\sin\varepsilon+$$

$$+\cos\alpha\frac{d^2\sin\varphi}{dt^2}\Sigma m_1 r\cos\varepsilon=\Sigma(B+Y)$$

$$\frac{d^2c}{dt^2}\Sigma(m+m_1)+\sin\alpha\frac{d^2\cos\varphi}{dt^2}\Sigma m_1 r\sin\varepsilon+$$

$$+\sin\alpha\frac{d^2\sin\varphi}{dt^2}\Sigma m_1 r\cos\varepsilon=\Sigma(C+Z)$$

Integrálásuk is bármiként választott természetszerű φ functio esetében nehézséggel jár, a később szükséges mozgástani megszorítások pedig teljesen alkalmatlanokká teszik őket a tárgyalásra. Általában akkor is áll ez, ha egyéb engedményt nem téve akár $m_1=o$, a szárnyak síkok s $\varepsilon=o$, akár egyszerre $m_1=o$ és $\varepsilon=o$

Ha $m_1=o$ és $\varepsilon=o$, de a szárnycsapások nem igen kis szög alatt végeztetnek, a $\left(\frac{dc'}{dt}\right)_{2k+2}=\left(\frac{dc}{dt}\right)_{2k}$ feltételből következik, hogy

$g(t_{2k+2}-t_2^{k})=-\frac{e}{k}(\sin\varphi_{2k+1}-\sin\varphi_{2k})$; a $c'_{2k+2}=c_{2k}$-ből pedig a

$\left(\frac{dc}{dt}\right)_{2k}$ számára oly értékat kapunk, a mely $t_{2k+2}-t$ és $\varphi_{2k+2}-t$ is tartalmazza s a kivánatos helyettesítések után nyert egyenletekből a mozgás törvényei alig volnának kiolvashatók.

* * *

Lebegés, mikor a légellenállás hatása az idő periodusos funkcziója.

Most oly lebegést tárgyalunk, melynél a légellenállának a belső erőktől származó hatása nem konstans, hanem az időnek periodusos funkcziója. Felteszszük azonban, hogy a visszacsapásnál a lég ellenállása oly kicsiny, hogy számításon kivül hagyható vagyis a visszacsapás alatt a törzs szabadon ezik. A szárnyak síkok és súlytalanok legyenek s tengelyeik vízszintesek.

Mozgási egyenletünk:

$$\left(\frac{d^2c}{dt^2}+g\right)\Sigma\, m - \cos\varphi.\,\mu\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = o.$$

A szárnyak mozgását igen kis szög alatt végbemenőnek szupponálva $\cos\varphi$-t a lecsapás egész tartamára $\cos\varphi_{2k}$-val helyettesítjük. E megszorítás mellett a $\frac{d\varphi}{dt}$ lehet végesis.

Most azzal a feltevéssel, hogy mikor $t = t_{2k}$, akkor a szögsebesség zérus:

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = K^2 \sin\frac{\pi}{\tau}(t - t_{2k}),\ t_{2k+1} \overset{=}{>} t \geqq o$$

legyen, tehát

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = - K\sqrt{\sin\frac{\pi}{\tau}(t - t_{2k})},$$

minélfogva $1 \overset{=}{>} \frac{t - t_{2k}}{\tau} \geqq o$ és ha $\tau = t_{2k+1} - t_{2k}$. akkor mindkét szélső értéket følveszi az argumentum. Tegyük fel ezt, vagyis a lecsapás egészen természetszerűen o szögsebességgel kezdődjék és végződjék.

A φ kifejezésére nincs szükségünk.

Rövidítésünk:

$$- 2\cos\varphi_{2k}\frac{\mu K^2}{\Sigma m} = - e.$$

Az első mozgási egyenlet e jelelés mellett;

$$\left(\frac{d^2c}{dt^2}\right) = - g + e\sin\frac{\pi}{\tau}(t - t_2\ ).$$

Ez felvilágosít bennünket a törzs mozgásáról. Kétszeres integráczióval nyerjük:

$$\frac{dc}{dt} = \left(\frac{dc}{dt}\right)_{2k} - g(t - t_{2k}) + \frac{e\,\tau}{\pi} - \frac{e\,\tau}{\pi}\cos\frac{\pi}{\tau}(t - t_{2k}).$$

$$c = c_{2k} + \left(\frac{dc}{dt}\right)_{2k}(t - t_{2k}) - \tfrac{1}{2}g\,(t - t_{2k})^2 + \frac{e\,\tau}{\pi}(t - t_2{}^k) -$$

$$- \frac{e\,\tau^2}{\pi^2}\sin\frac{\pi}{\tau}(t - t_{2k}).$$

Ezek érvényesek $t = t_{2k}$-tól $t = t_{2k+1}$-ig. A visszacsapás idejére $t = t_{2k+1}$-tól $t = t_{2k+2}$-ig használandó:

$$\frac{d^2c'}{dt^2} = -g.$$

Integráljuk s az integrácziós konstans megválasztásánál a t_{2k+2} időt vesszük tekintetbe, egyuttal $\left(\frac{dc'}{dt}\right)_{2k+2} = \left(\frac{dc}{dt}\right)_{2k}$ tesszük.

$$\frac{dc'}{dt} = \left(\frac{dc}{dt}\right)_{2k} - g\,(t - t_{2k+2})$$

Ezt ismét integráljuk s $c'_{2k+2} = c_{2k}$-t teszünk bele.

$$c' = c_{2k} + \left(\frac{dc}{dt}\right)_{2k} (t - t_{2k+2}) - \tfrac{1}{2}\, g\,(t - t_{2k+2})^2$$

Még két mekszorításunk van az integrácziós konstansokat illetőleg. Az egyik:

$$\left(\frac{dc'}{dt}\right)_{2k+1} = \left(\frac{dc}{dt}\right)_{2k+1},$$

c mely szerint

$$g\,(t_{2k+2} - t_{2k}) = 2\,\frac{e\,\tau}{\pi}.$$

A másik megszorítás:

$$c'_{2k+1} = c_{2k+1},$$

a melyből nyerjük:

$$\left(\frac{dc}{dt}\right)_{2k} = \tfrac{1}{2}\, g\,\tau - \frac{e\,\tau}{\pi} = \tfrac{1}{2}\left(g - \frac{2\,e}{\pi}\right)\tau$$

t_{2k+2} és $\left(\frac{dc}{dt}\right)_{2k}$ értékét szubsztituálva

$$c = c_{2k} + \tfrac{1}{2}\, g\,(t - t_{2k})\,(t_{2k+1} - t) - \frac{e\,\tau^2}{\pi^2} \sin \frac{\pi}{\tau}(t - t_{2k})$$

$$c' = c_{2k} + \tfrac{1}{2}\, g\left(t - t_{2k}) - \frac{2\,c\,\tau}{\pi\, g}\right)(t_{2k+1} - t)$$

A sebességek kifejezései pedig:

$$\frac{dc}{dt} = \tfrac{1}{2}\, g\,(t_{2k+1} + t_2{}^k - 2t) - \frac{e\,\tau}{\pi} \cos \frac{\pi}{\tau}\, t$$

$$\frac{dc'}{dt} = \tfrac{1}{2}\, g\,(t_{2k+1} + t_{2k} - 2t) + \frac{e\,\tau}{\pi}$$

Észrevehetjük, hogy $c_2{}^k = c_{2k+1} \equiv c'_{2k+1} = c'_{2k+2}$: A lecsapásokat és a (hatástalan) visszacsapásokat ugyanazon helyen kezdi és végzi a gép.

Legmélyebb helyét akkor éri el a repülőrendszer, midőn $\frac{dc}{dt} = o$; a legmagasabbat pedig akkor, midőn $\frac{dc'}{dt} = o$. A $\frac{dc}{dt}$-t o-sá teszi $t = t_{2k} + \frac{1}{2}(t_{2k+1} - t_{2k})$, a $\frac{dc'}{dt}$-t pedig $t = \frac{e\tau}{\pi g} + \frac{1}{2}(t_{2k+1} + t_{2k}) = t_{2k+1} + \frac{1}{2}(t_{2k+2} - t_{2k+1})$. Legmélyebb helyét tehát a lecsapás közepén, a legmagasabbat a visszacsapás közepén éri el a törzs.