A NÖVEKVÉS RÉTEGE GÖMBHÉJBAN.

Fuchs Károly pozsonyi tanártól.

Az élet jelenségeiből már-már annyit tanultunk, hogy az anyag feldolgozása a mathematikai phyzika alapján, vagyis az elméleti szervtan megalakítása máris szükségessé vált. Az elméleti szervtan terén mozog azon dolgozatom, a szerves hengerek keletkezéséről, mely a bécsi Akadémia által a folyó évben közölve lett. Ott egyebek közt a következő eset is van tárgyalva: Van egy végtelen, H vastagságu sík lemez, M anyagból. Balra tőle van egy közeg N_1, melynek állandó sürüsége P_1, jobbra pedig egy közeg N_2, melynek állandó sűrüsége P_2. E két anyag a lemezbe szivárog különböző gyorsasággal, megfelelően a ω_1 és ω_2 szivárgási állandóknak. Azon útban, melyben a két anyag találkozik, vegyül is, még pedig $n_1 : n_2$ arányban, hol $n_1 + n_2 = 1$, és a vegyület eredménye az M anyag. E növekvési rétegnek távolságai a két felülettől h_1 és h_2 $(h_1 + h_2 = H)$ ki vannak számitva.

A jelen dolgozatban ugyanazon problemát tárgyaljuk, csakhogy gömbhéjat veszünk alapul, melynek belső súgara R_1, külső súgara R_2; és a növekvés súgara R_0 azon mennyiség, a melyet keresünk. A számolás következőleg folyik:

Először az N_1 anyagot tekintjük, mely R_1-től R_0-ig a növekvés rétegébe szivárog. Minden gömbfelületen át akkor másodperczenként egyenlő mennyiségü N_1 kell hogy áramoljék. Ha ω_1 a diffusio állandója, r_1 a súgár, ρ_1 a N_1-nek sűrüsége, M_1 pedig N_1-nek azon tömege, mely másodperczenként bármely gömbfelületen átszivárog, akkor áll:

$$M_1 = 4\pi r_1^2 . \omega_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial r_1}$$

Ha azt akarjuk, hogy a növekvés rétegébe, a melynek sugara R_0, másodperczenként minden területegységbe N_1-ből az m_1 tömeg jusson, akkor kell hogy álljon

$$4\pi R_0^2 m_1 = M_1$$

M_1-nek kiküszöbölése által

$$r_1^2 \omega_1 \frac{\partial\rho_1}{\partial r_1} = R_0^2 m_1$$

Már most világos, hogy a mi esetünkben positiv ∂r_1-nek negativ $\partial\rho_1$ felel meg, mert a sűrüségnek görbéje R_1-től R_0-ig esik, a minek evidencziában tartása végett az iménti $\partial\rho_1$ helyett — $\partial\rho_1$-et használunk és igy:

$$\partial\rho_1 = -\frac{R_0^2 m_1}{\omega_1}\frac{\partial r_1}{r_1^2}$$

Integnátio által megtaláljuk N_1 sűrüségének görbéjét. Ez

$$\rho_1 = \frac{R_0^2 m_1}{\omega_1 r_1} + c,$$

A c állandó az által van meghatározva, hogy $r_1 = R_0$-hoz $\rho_1 = o$ tartozik, tehát

$$o = \frac{R_0^2 m_1}{\omega_1 R_0} + c \quad \text{vagyis} \quad c = -\frac{R_0^2 m_1}{\omega_1 R_0}$$

Ezt bevezetve,

$$\rho_1 = \frac{R_0^2 m_1}{\omega_1}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{R_0}\right)$$

Ha $r_1 = R_1$, akkor kell, hogy $\rho = P_1$ legyen,

$$P_1 = \frac{R_0^2 m_1}{\omega_1}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_0}\right) = \frac{m_1 R_0}{\omega_1 R_1}\left(R_0 - R_1\right)$$

Egészen megfelelő módon találjuk N_2 — t illetőleg

$$P_2 = \frac{R_0^2 m_2}{\omega_2}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_0}\right) = \frac{m_2 R_0}{\omega_2 R_2}\left(R_2 - R_0\right)$$

E két képlet kiadja a két távolságot

$$h_1 = R_0 - R_1 \quad \text{és} \quad h_2 = R_2 - R_0$$

Ugyanis behelyettesitve a h-kat a két képletünkből nyerjük

$$P_1 = \frac{m_1 h_1}{\omega_1} \cdot \frac{R_0}{R_1} \qquad P_2 = \frac{m_2 h_2}{\omega_2} \cdot \frac{R_0}{R_2}$$

A két távolság aránya tehát

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\omega_1 m_2 P_1 R_1}{\omega_2 m_1 P_2 R_2}$$

független a R_0-től.

Felteszszük már most, hogy valahányszor N_1-ből és N_2-ből az M-nek tömegegysége képződik, mindig az elsőből n_1, a másodikból n_2 tömeg fogyasztatik, ugy hogy

$$n_1 + n_2 = 1 \qquad m_1 : m_2 = n_1 : n_2$$

Ezek alapján a fentebbi képletekből

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\omega_1 n_2 P_1 R_1}{\omega_2 n_1 P_2 R_2}$$

Egyszerüség kedvéért a következő jelöléseket használjuk:

$$a = \frac{\omega_1 P_1}{n_1} \qquad b = \frac{\omega_2 P_2}{n_2}$$

mihez képest

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{a}{b} \cdot \frac{R_1}{R_2}.$$

E kényelmes képlet alapján könnyen meghatározható R_0, valamint h_1 és h_2 is, ha szem előtt tartjuk, hogy $h_1 + h_2 = R_2 - R_1 = H$. Utolsó képletünk ugyanis igy is irható:

$$\frac{R_0 - R_1}{R_2 - R_0} = \frac{a R_1}{b R_2}$$

miből

$$R_0 = \frac{R_1 R_2 (a + b)}{a R_1 + b R_2}$$

Egyszerübb lesz a képlet, ha

$$\alpha = \frac{a}{a+b} \qquad \beta = \frac{b}{a+b} \qquad \alpha + \beta = 1$$

irjuk, midőn aztán

$$R_0 = \frac{R_1 R_2}{\alpha R_1 + \beta R_2} \quad \text{vagyis} \quad \frac{1}{R_0} = \frac{\beta}{R_1} + \frac{\alpha}{R_2}$$

Végre az alapképletünknek még a következő alakokat is adhatjuk

$$\frac{h_1 + h_2}{h_2} = \frac{a R_1 + b R_2}{b R_2} \qquad \frac{h_1}{h_1 + h_2} = \frac{a R_1}{a R_1 + b R_2}$$

vagyis, mivel $h_1 + h_2 = H$:

$$h_1 = H \frac{a R_1}{a R_1 + b R_2} \qquad h_2 = H \frac{b R_2}{a R_1 + b R_2}$$

$$= H \frac{\alpha R_1}{\alpha R_1 + \beta R_2} \qquad = H \frac{\beta R_2}{\alpha R_1 + \beta R_2}$$

2. Ki akarjuk számitani az m_0 tömeget, mely idő- és területegységenként N_1 és N_2-ből képződik. A feltétel

$$m_0 = m_1 + m_2$$

Fennt azonban P_1 és P_2 számára találtunk két kifejezést, a melyek ezen alakokra hozhatók:

$$m_1 = \frac{\omega_1 P_1 R_1}{h_1} \qquad m_2 = \frac{\omega_2 P_2 R_2}{h_2 R_0}$$

$$= \frac{a n_1 R_1}{h_1 R_0} \qquad = \frac{b n_2 R_2}{h_2 R_0}$$

A nevezőket $h_1 R_0$ és $h_2 R_0$ előbbi képletekből határozzuk meg:

$$h_1 R_0 = \frac{\alpha H R_1^2 R_2}{(\alpha R_1 + \beta R_2)^2} \qquad h_2 R_0 = \frac{\beta H R_1 R_2^2}{(\alpha R_1 + \beta R_2)^2}$$

E nevezőket behelyezve

$$m_0 = m_1 + m_2 \quad ,$$

$$= \frac{a + b}{H} \frac{(\alpha R_1 + \beta R_2)^2}{R_1 R_2} (n_1 + n_2)$$

$$= \frac{(a R_1 + b R_2)^2}{H R_1 R_2 (a + b)}$$

nyerjük. E képletnek kényelmesebb alakot is adhatni. Ha sik lemezzel van dolgunk, az az ha $R_1 = R_2 = \infty$, akkor m_0-et μ_0-val jelölvén meg

$$\mu_0 = \frac{a + b}{H}$$

Most könnyen határozhatjuk meg, mennyivel fogyott a productio, ha eredetileg sík lemeznek gömbalakot adunk. A productió fogyása — δ

$$-\delta = \mu_0 - m_0 = \frac{1}{a+b}\left(\frac{a^2}{R_2} - \frac{b^2}{R_1}\right)$$

Még átlátszóbb lesz a képlet a következő helyettesités által

$$D = \frac{R_1 + R_2}{2} \quad R_1 = D - h \quad R_2 = D + h$$

Ezt behelyezve a productió gyarapodása $+\delta$ fejében nyerjük

$$\delta = m_0 - \mu_0$$

$$= \frac{1}{a+b} \cdot \frac{h(a^2+b^2) - D(a^2-b^2)}{D^2 - h^2}$$

Lemezünket először síknak vesszük fel, úgy, hogy $D = \infty$. Legyen $a > b$, tehát $a^2 - b^2$ positiv. Sík lemezekben áll

$$h_1 : h_2 = a : b$$

ugy, hogy a fentebbi feltétel mellett a növekvés rétege közelebb fekszik N_2-höz, azaz jobbra a középrétegtől, hogy tehát $h_1 > h_2$. A δ most természetesen $= o$.

D-nek először positiv értéket adunk, azaz a lemezt úgy görbitjük, hogy bal oldala, a hol N_1 fekszik, homorú lesz, jobb oldala pedig domború. Ha D mindig kisebb lesz, a görbület tehát mindig nagyobb, akkor δ szükségkép negativ lesz, miután D a h-hoz mérten nagy, a productio a növekvő réteg egységeként tehát szükségkép fogy mindaddig, mig a számláló $= o$, vagyis mig

$$D = h\left(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)$$

De ha D-nek ezen értékét behelyezzük, akkor a görbe héjakra szóló alapképletből

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{a}{b}\,\frac{R_1}{R_2} = \frac{a}{b}\,\frac{D-h}{D+h} = \frac{b}{a}$$

Ennek pedig az a jelentése, hogy a növekvés rétege symmetricusan fekszik azon helyzethez, a melylyel sík lemezben bírt. Ha ezek után D még kisebb lesz, akkor δ megint szükségkép pozitiv lesz.

Ha D-nek negativ értéket tulajdonítunk, azaz ha azon oldalt tesszük homoruvá, melyhez közelebb van a növekvés rétege, akkor δ a D-nek minden értéke mellett pozitiv, azaz a productio a növekvő réteg területegységeként szükségkép fokozódik. Eredmenyük tehát következőleg hangzik:

Ha a lemezek azon oldalát homorítjuk, a melyhez közelebb fekszik a növekvés rétege, akkor a növekvés rétegében a productio területegységenként szüksegkép fokozódik.

Ha az ellenkező oldalt homorítjuk, akkor a productio fogy mindaddig, mig a productio rétege az eredeti helyzethez symmetrikus helyzetbe jut. Ezentul a productio megint fokozott lesz.

3. Eddig azt tekintettük, mikép változik a productio a productio rétegének területegységeként. Most azt kutatjuk, miként változik a productio felület egységeként. A productio rétegében a productio idő- és területegységenként, mint fentebb láttuk

$$m_0 = \frac{(a R_1 + b R_2)^2}{H R_1 R_2 (a + b)}$$

A productio rétegének területegységének megfelel (ugyanazon szögnyilással bír) a felületnek egy területe f, melynek értéke

$$f = \frac{R_2{}^2}{R_0{}^2}$$

ha a külső felületet tekintjük. Az anyagfogyasztás a felületegységre számitva nyilván annyi, mint m_0 / f. Már most előbbi értékek szerint

$$\frac{1}{f} = \frac{R_0{}^2}{R_2{}^2} = \frac{R_0{}^2 R_2{}^2 (a + b)^2}{R_2{}^2 (a R_1 + b R_2)^2}$$

és ezekből az anyagfogyasztás m a felület egységére számítva

$$m = \frac{m_0}{f} = \frac{R_1}{R_2} \frac{a + b}{H} = \frac{R_1}{R_2} \mu_0$$

Valamelyik felület kidomborítása következtében tehát a productio felületegységenként szükségkép fogy; valamelyik felület homorítása következtében ellenkezőleg, a productio a felület egységeként szükségkép nől.