ÉRTESITŐ

AZ ERDÉLYI MUZEUM-EGYLET

ORVOS-TERMÉSZETTUDOMÁNYI SZAKOSZTÁLYÁBÓL

II. TERMÉSZETTUDOMÁNYI SZAK.

*XIII. kötet.* 1891. *III. füzet.*

# A MADÁR-REPÜLÉS ÁLTALÁNOS ELMÉLETE.

(Harmadik közlemény.)

*Dr. Martin Lajos egyetemi tanártól.*

1.

Multkor csak a lebegésre reflectáltam' s kifejeztem a lebegési munkát az állat testsúlyában s a másodperczenként megtett szárnycsapások számában. Az eredmény az volt, hogy a lebegési munka a súlyhoz egyenes-, a szárnycsapásokhoz fordított viszonyban áll.

A meglepő eredmény helyes voltán a levezetési mód kifogástalan voltánál fogva kételkedni ugyan nem lehet; ámde theoretikus lefejtések csak akkor nyernek létjogosultságot, ha a tapasztalás tűzi próbáját kiállják; úgy a mi képletünk is. A míg tehát a tapasztalás adatokkal nem szolgál, addig a theoriát problematikusnak kellett tekintenünk.

Igen nehéz feladat a szabadon repülő madaron méréseket megtenni, mivel a madár, ha repül, megközelíthetetlen. Igy tehát majdnem lehetetlennek látszik a képletünk kiprobáltatására szükséges adatokat megszerezni. S íme még ez is sikerült.

Dr. Entz Géza müegyetemi tanár szives közbenjárásával ugyanis szerencsém volt a bpesti kir. term. tud. társulat könyvtárából „Revue Scientifique“ 1888-dik évfolyambeli II-ik kötetét rövid időre kézhez kapni, a melynek 10-dik számában (pag. 297 et sequs) Marey hírneves franczia physiologusnak (melyről már 1888-ban tartott népszerü előadásomban említést tettem) „Le Probléme mécanique du vol“ czímü eredeti közleményét találtam.

Marey a mondott czikkben leirja azon (akkor még egészen új) kisérleteket, melyeket momentphotographikus uton egy a végre berendezett helyiségben szabadon repülő madaron (sirályon) megtett. Az eljárása ugyan eléggé ismeretes s azóta úgy Mareytől, mint másoktól különféle módosításokkal ismételtetett, de miután arról magyar nyelven, tudtom szerint, még senki sem irt, nem tartom feleslegesnek most ez ötletből Marey első kisérleteiről rövid leirást adni.

A kisérleti helyiség podiuma s két egymásra rugó fala fekete kelmével huzattak be, fent a menyezet alatt s a két fekete fallal szemben egy-egy photographikus készülék állíttatott fel; objectiv lencséit egy-egy öt nyilással (fenêtre) ellátott korong takarta be. A három korong synchronikus forgásba hozatott másodperczenként 10—10 forgást megejtvén, úgy hogy egy ilyen berendezésü készülékkel, melyet Marey később photochronographnak nevez, másodperczenként 50 momentképet lehetett felvenni. Már most megérthetö, hogy a műszerek előtt elrepülő madárról összesen 150 momentkép nyeretett, melyek kellőkép összecombinálva a madár képét háromféle egymásra merőleges irányból felvéve megadták.

Marey kezdetben sirálylyal experimentált; az állat testi súlyát 623 gr.-nyinak találta.

Mindjárt az első sikerült felvételből kitűnt, hogy az állat horizontalis irányban repülvén, másodperczenként öt szárnylengést végez, szárfelemelés és lecsapásra egyenlő időket fordít s a test súlypontja minden szárnylengésnél bizonyos vertikalis oscillatiókat ír le, melyeket Marey 45 m. m.-nyinek talált.

A három adat: $G = 0{\cdot}623$ kilogr., $h = 0{\cdot}045$ méter és $n = 5$ most alkalmat nyújt a munkát, melyet a lebegés fentartása igénybe vett, kétféle módon kiszámítani. Lássuk azt.

Miután Marey sirálya másodperczenként 5 lengést végzett s szárnyfelemelés és lecsapásra egyenlő időket fordított, esik $^1/_{10}$ másodpercz a lecsapásra. Az állat ezen idő alatt a szárnylecsapás következtében 0·045 méterre emelkedett; a munka tehát, melyet a szárny az alatt kifejtett (a mechanika alapelve szerint) volt $= \frac{G.h}{t}$ a hol G a súly, h a magasság s t az időt jelentik. Tehát a munka:

$$L = \frac{0{\cdot}623 \times 0{\cdot}045}{0{\cdot}1} = 0{\cdot}2804 \text{ méterkilogramm.}$$

Másfelől multkori lefejtésem szerint a lebegés munkája: $A = \left(\frac{m+1}{m-1}\right)^2 \frac{Gg}{4n}$. Ezen munka legkisebb, ha $m = \infty$, azaz ha a levegő ellenállása szárnyemelésnél elenyésző. A képek már most világosan mutatják, hogy az állat a szárnyat csakugyan oly ügyesen vezeti a felemelésnél, hogy a levegő ellenállását egészen kikerülje, tehát m tényleg $= \infty$ és $A = \frac{Gg}{4n}$. A mérés adatait bevezetvén a képletbe:

$A = \frac{0{\cdot}623 \times 9{\cdot}8}{4 \times 5} = 0{\cdot}3053$ méterkilogramm. Összetartván a kétféle eredményt, csak $8^1/_5$ százalék eltérést tapasztalunk, úgy hogy theoria és tapasztalás a jelen esetben egészen jól találnak.

Különben az amugy is csekély eltérést megmagyarázza azon körülmény, hogy Marey a madár képét csak 18 mm. nagyságban, tehát hozzávetőleg 14-szer kisebbített mértékben vehette föl s így a mértéket tetemesen kisebbített képről mérte, mely körülmény a mérési hibát növeszti. Ehez jő hogy M. nem a test súlypontját, melyet a szárny eltakar, hanem a madárszem útját mérte, mely a repülés közben tapasztalt taglejtés miatt a súlypontétól eltérhetett. S csakugyan mutatkozik különbség az oscillatio theoretikus s a M. által mért látszatos értéke közt; amaz $= h = A/G = 0{\cdot}049$, a szem oscillatiója ellenben $= 0{\cdot}045$ m.

Ezt akartam constatálni. Mert miután theoria és kisérlet tapasztalás szerint megegyezik, világos, hogy a körülmény a theoria helyes volta mellett szól. S most a mult közleményemben felállított repülési elmélet helyességében kételkedni már nem lehet.

A repülés elmélete azonban a lebegési munka formulájával még koránt sincsen befejezve. A madár-repülés problemája egy roppant terjedelmes és bonyodalmas feladat, melyet egy vágásra meg nem fejthetünk. Multkor csak azon specialis esettel foglalkoztunk, ha az állat csak annyi erőt fejleszt, mennyi szükséges, hogy a lebegés fentartassék. Ez nem más, mint az úgynevezett „egy helyen való lebegés", vagy rövidebben „absolut lebegés."

Miután ezt az esetet letárgyaltuk, haladjunk tovább s foglalkozzunk most a madár-repülés azon esetével, ha az állat több erőt fejleszt, mint a helyben való lebegéshez szükséges. A végre adjunk a számításnak más fordulatot.

2.

Multkor feltettem volt, hogy a madár két szárnya, ha másodperczenként n lengést (t. i. lecsapást és felemelést) végez, lecsapáskor P, felemeléskor Q vertikalis nyomásokat fejleszt. Ezen nyomások a G súlyu testben:

$$(1)\quad p = \frac{(P-G)}{G}p \quad \text{és} \quad q = \frac{(Q-G)}{G}.g$$ acceleratiókat ébresztettek; mi mellett, hogy a gravitatio munkája minimum legyen, a lecsapás (illetőleg a felemelés) ideje:

$$(2)\quad t = \frac{1}{2n}$$ és maga a lebegés munkája (a feltevés alatt, hogy Q a P-hez képest elenyészik)

$$(3)\quad A = \frac{Gg}{4n}$$ találtatott.

Legyen $n_1 > n$ és L a munka, melyet a két szárny $n_1$ csapásnál fejleszt, továbbá $P_1$ és $Q_1$ a két szárny vertikalis nyomása $n_1$ lengésnél, akkor a nyomások G súlyu tömegben

$$(4)\quad p_1 = \frac{P_1-G}{G}g \quad \text{és} \quad q_1 = \frac{Q_1-G}{G}$$ acceleratiókat fejlesztenek, melyek egymást felváltva a tömeget majd vertikalisan felfelé, majd lefelé hajtják, még pedig, ha T és $T_1$ a szárnylecsapás és illetőleg felemelést jelentik, a G súlyu tömeget:

$$(5)\quad h = \frac{P_1-G}{G}.\frac{gT^2}{2} \quad \text{és} \quad h_1 = \frac{Q-G}{G}.\frac{gT_1^2}{2}$$ oszlopmagassággal felfelé vagy illetőleg lefelé viszik. Ha tehát a szárny egy lengést végez, az állat súlypontja:

$$(6)\quad h-h_1 = \frac{(P_1T^2-Q_1T_1^2)g}{2G} - \frac{Gg}{2G}(T^2+T_1^2)$$ oszlopmagassággal feljebb fog szállani.

Itt a jobboldal első tagja a $P_1$ és $Q_1$ erők, s a második tagja a gravitatio oszlopmagasságát fejezi ki; $h-h_1$ felszállási oszlop tehát annál nagyobb, mennél kisebb a gravitatio oszlopmagassága; és amaz maximum, ha ez minimum. A minimumot meghatározhatjuk. Miután a szárnylengés $T+T_1$ ideig tart, ha a szárny másodperczenként $n_1$ ilyen lengéseket végez:

(7) $n_1(T+T^1)=1$, ebből: $T_1 = {}^1/n_1-T$. Amaz oszlopmagasság tehát így fejeztetik ki:

(8) $\left\{ \frac{g}{2}(T^2+T_1{}^2) = \frac{g}{2}\left(2T - \frac{2T}{n_1} + \frac{1}{n_1{}^2}\right) \right.$ Ez minimum, ha: $T = {}^1/_2 n_1$ a mikor egyuttal $T=T_1$. Ebből látni való, hogy lecsapás és felemelés egyenlő időket vesznek igénybe. Ezen idők egyenlősége tehát, hogy a gravitatio hatása minimum legyen, fenáll nemcsak a helyben való lebegésnél, hanem a felszálló repülésnél is, s miután a leszálló repülés nem más, mint nemleges felszállás, következik, hogy az idők egyenlősége még a leszálló repülésnél is fenáll, hogy a gravitatio hatása minimum legyen.

Ezt a feltételt elfogadván, a (6) alatti egyenlet, G-vel és $n_1$-el megszorozva, ebbe menend át:

(9) $G.n_1(h-h_1)=(P_1-Q_1)\frac{gn_1T^2}{2} - Gg.n_1T^2$., melyben $n_1(h-h_1)$ sorozat nem egyéb, mint azon oszlopmagasság, melyre az állat súlypontja $n_1$ szárnylengés, azaz egy másodpercz alatt emelkedik; azt H-val jelelvén s T időt (8) szerint $n_1$-ben kifejezvén, nyeretik végre:

(10) $GH = (P_1-Q_1).\frac{g}{8n_1} - Gg/4n_1$.

Minden függ most ezen egyenlet helyes értelmezésétől. A baloldala kétségkivül munkát fejez ki, tehát a jobboldalon álló két tag is csak munkákat fejezhet ki; még pedig az első tag nem más, mint a $P_1-Q_1$ nyomásnak, azaz a szárnynak a munkája, melyet az $n_1$ csapás alatt, azaz egy másodperczben végez; az utolsó tag végre a G teher munkája $n_1$ szárnylengés alatt, azaz egy másodperczben. Tévén $Q_1 = o$ és

(11) $L = P_1g/8n_1$ végre $A_1 = Gg/4n_1$ származik a (10)-ből:

(12) $GH = L-A_1$. Ezt G-vel elosztván:

(13) $\left\{ \begin{array}{l} H = L/G - A/G. \text{ E helyett irhatunk még:} \\ H = L/A.\,A/G - A_1/A.\,A/G = A/G\,(L/A - A_1/A). \end{array} \right.$

Ámde multkori lehozásunk szerint (ha $m = \infty$ tétetik) $A = Gg/4n$; ha ezt és a (11) allattiakat figyelembe vesszük, akkor utolsó egyenletünk ebbe változik át:

(14) $H = A/G . n/n_1 (P_1/2G - 1)$; írjunk 2G helyett P—t, végre:

(15) $H = A/G . n/n_1 (P_1/P - 1)$.

Hogy ezt az egyenletet átalakítsuk, vegyük tekintetbe, hogy $P_1$ és P ugyanazon szárny nyomásai, melyeket a levegő reá gyakorol, ha másodperczenként $n_1$, illetőleg $n$ lengést végez; a nyomások növekednek a gyorsaságok négyzetei szerint, a gyorsaságok megint növekednek a lengések száma szerint; áll tehát az arány: $P_1 : P = n_1^2 : n^2$ ennélfogva (15) helyett nyerni fogjuk:

(16) $H = A/G (n_1/n - n/n_1)$

Az egyenletben A munkát, G tehert, A/G tört tehát utat jelentvén, melyet G teher leír, ha azt $h_0$-al jeleljük, végre:

(17) $H = h_0 (n_1/n - n/n_1)$ egyenletre jutunk.

3.

Mi előtt tovább haladnánk, bizonyos mellékkörülményeket kell közelebbről vizsgálnunk, melyek elméletünk továbbfejlesztésénél számba veendők.

Jelenleg több mennyiség lép fel a formulákban, melyek majd a helybeli lebegésre, majd megint a felszálló lebegésre vonatkoznak. Ezek közt, ha combinálva fordulnak elő, bizonyos relatiók állanak fenn; a relatiókat ismernünk kell. Igy láttuk, hogy ugyanazon egy szárnynál, mely n csapásnál P ellenben $n_1$ csapásnál $P_1$ nyomást gyakorol, a proportio áll: $P : P_1 = n^2 : n_1^2$, miből rögtön az egyenlet következik:

(18) $Pn_1^2 = P_1 n^2$. Ezen egyenlet fölteszi azonban, hogy a szárny mindkét alkalommal egyenlő kilengési szögöt ír le; ha a kilengési szögök nem egyenlők, ha $\varphi$ és $\varphi_1$ volnának a kilengési szögök, akkor, mivel $P : P_1 = v^2 : v_1^2$ és $v : v_1 = \varphi n : \varphi_1 n_1$, elébbi egyenlet helyett:

(19) $P\varphi_1^2 n^2 = P_1 \varphi^2 n^2$ lesz érvényes.

Fennebb volt (11) szerint: $L = P_1 g/8n_1$; $A_1 = Gg/4n_1$ és $A = Gg/4n$; irjunk G helyett P/2, akkor nyerjük a három egyenletet:

(20) $8n_1 L = P_1 g$; $8n_1 A_1 = Pg$ és $8nA = Pg$. A két utóbbiból következik azonnal

(21) $An = A_1 n_1$; az első és másodikból, úgyszintén az első és harmadik egyenletekből g-t kirekesztvén, nyerjük:

(22) $PL = P_1 A_1$

(23) $PLn_1 = P_1 An$; ebből és a (19)-ből P és $P_1$ kirekesztetvén

(24) $Ln\varphi^2 = An_1\varphi_1^2$ s ha még azon kivül $\varphi = \varphi_1$,

(25) $Ln = An_1$; a (24) és (19)-ből n és $n_1$ kirekesztetvén:

(26) $PL^2\varphi^4 = P_1 A^2 \varphi_1^4$; s ha ebben $\varphi$ megint $= \varphi_1$:

(27) $PL^2 = P_1 A^2$. Végre ha P és $P_1$ a (22) és (26)-ból kirekesztetnek:

(28) $A_1 L\varphi^4 = A^2\varphi^4$; s ha ebben $\varphi$ megint $= \varphi_1$:

(29) $A_1 L = A^2$.

Az ily egyszerü úton lefejtett relatiók helyes megértésére az azokban fellépő mennyiségek helyes jelentésére kell ügyelnünk. A mennyiségek a következők: A P G n és $\varphi$. melyek rendre a szárny munkáját, nyomását, a madártest súlyát, a szárnylengések számát s kilengési szögét jelentik, ha az állat csupán csak a helyben való lebegést végzi; — továbbá L $A_1$ $P_1$ G $n_1$ és $\varphi_1$, melyek rendre a szárny összes munkáját, a szárny azon munkáját, melyet az állat a lebegés fentartására fordít, a szárny nyomását, a madár testi súlyát, a szárnylengések számát s a kilengési szögöt jelentik azon esetben, ha az állat nem csupán a lebegést végzi, hanem testi súlyát még azon kivül másodperczenként bizonyos H magasságra felemeli a súlypontja vertikálisában. Ezek szerint kétféle lebegési munkáról van itt szó; az egyik A a helyben való lebegésnél, s a másik $A_1$ a nemlebegésnél.

A mennyiségek közt n és $\varphi$ függetlenek egymástól; ez fontos s ezért kellett mind a kettő értékét a lebegés és nemlebegésnél egymástól megkülönböztetni, hogy a $\varphi$ befolyását fentartsuk. Azonban nem ritka eset, (sőt ez szokott leggyakrabban előfordulni) a mikor $\varphi = \varphi_1$ azaz a mikor egyenlő lengésü szárnyak összehasonlíttatnak; erre voltunk ügyelettel, valahányszor a $\varphi$-t az egyenletből kihagytuk.

Ezen esetek pedig a legfontosabbak. Igy pl. látjuk a (25) a. egyenletből, hogy L és A munkák a megfelelő $n_1$ és n szárnycsapások számai szerint növekednek, ha a szárny mindkét alkalommal egyenlő nagy kilengési szögeket leír. — De különösen figyelemre méltó a (29) alatti egyenlet, a melyben csak $AA_1$ és L munkák előfordulnak s mely a nevezetes törvényt mondja ki, hogy egyenlő nagy lengéseknél az A munka (melyet a madár a helyben való lebegésnél kifejt) mindig a nemlebegésnél fejlesztett $A_1$ és L munkák mértani középarányosa.

Ez vezet megint a (17) alatti egyenletnek egy nevezetes átalakítására. A (25) szerint ugyanis $L/A = n_1/n$, tehát a (17) helyett nyerjük léptenként:

$$(30) \qquad H = h_0\,(L/A - A/L) = h_0\left(\frac{L^2 - A^2}{AL}\right) = h_0\left(\frac{L - A_1}{A}\right).$$

4.

Ismervén a munka- és erőviszonyokat a nemlebegésnél, a mikor t. i. az állat vagy felszáll vagy leszáll, a szerint, a mint a levegő nyomása a lecsapó szárnyra vagy nagyobb, vagy kisebb, mint az állat kétszeres testisúlya, lássuk az elmélet tovább folytatását. A végre visszatérünk a (12) a. egyenletre. Szerinte, mihelyt $L > A_1$, bizonyos GH munkaerőt nyerünk. Ezt, miután $A_1$ a lebegési munka által már fedezve van, a madár egészen kénye-kedve szerint használhatja fel. Ha akarja, feljebb száll, a hol aztán H az oszlop magasságot meghatározza, melylyel az állat másodperczenként magasabbra száll; ha pedig akarja, úgy azt a GH disponibilis munkaerőt, melyről egészen szabadon rendelkezik, vagy egészen vagy részben más czélokra, pl. horizontalis mozgásra fordítja.

Repülési elméletünk azon feltevésből indul ki, hogy a levegő a fel- és alájáró szárnyakra bizonyos P és Q nyomásokat gyakorol, melyek vertikalis irányban fellépnek. Azt elérjük, ha a szárnyak forgási tengelyeinek bizonyos fix elhelyezkedést adunk, mely a szárny formájától fog függni. Adjunk ezeknek olyan alakot és formát, hogy a levegő összes nyomása N, melyet a csapdosó szárnyra gyakorol; vertikalis, ha a forgási tengely horizontalis.

A míg ezen szárny forgási tengelye horizontalis marad, a levegőnyomások vertikalisak maradnak, s ha $N = 2G$, az állat csak lebegni fog, ha $N > 2G$, az állat másodperczenként H oszloppal magasabbra fog szállani. — Ha most akkora szárnycsapdosást fentartunk, hogy az N nyomás értéke változatlan maradjon, úgy hogy N mindig $>2G$, s ha a forgási tengelyeket, mely körül a két szárny egyformán csapdos, vizszintes fekvésükből kimozdítjuk, úgy, hogy azok egyformán $\alpha$ szög alatt a vizszinteshez való lejtést kapjanak, akkor az N nyomás is épen akkora $\alpha$ szöggel fog a vertikalis iránytól eltérni. Ez most vertikalis nem lévén, két componensre bontható. Az egyik:

$$(31) \quad \begin{cases} P = N \cos \alpha \text{ vertikalis, a másik} \\ R = N \sin \alpha \text{ horizontalis.} \end{cases}$$

Az első a test G súlyával lép egyensúlyba, még pedig a lebegés fentartására épen elég, ha:

(32) $N \cos \alpha = 2G$, ebből

$\cos \alpha = 2G/N$. Ámde az N nyomás nem más, mint a levegő nyomása a szárnyra, melyet a fennebbiekben P illetőleg $P_1$-el megjeleltük volt, úgy hogy irhatjuk:

$\cos \alpha = 2G/P_1$. S miután 2G a fennebbiek szerint $= P$ végre:

$$(33) \quad \begin{cases} \text{Cos } \alpha = P/P_1. \text{ Azaz, ha (egyenlő kilengésü szárnyakat feltévén) (18)-ra figyelünk:} \\ \text{Cos } \alpha = (n/n_1)^2. \text{ Ez határozza meg a forgási tengely hajlását.} \end{cases}$$

A második R componens horizontalis irányban működvén, a G súlyu madártestet horizontalis irányban mozgásba hozza. Legyen u a horizontalis mozgás gyorsasága, továbbá $\zeta^1 \gamma$ a levegő ellenállási coëfficiense és sürüsége, végre F a madártest keresztmetszete, merőlegesen a horizontalis mozgás irányára, akkor:

(34) $\dfrac{\zeta_1 \gamma F u^2}{2g}$ = a levegő ellenállása a horizontalis mozgás ellen; következik tehát:

$2g \,.\, N \sin \alpha = \zeta_1 \gamma F u^2$ azaz ha (32)-re ügyelünk:

(35) $4Gg \tang \alpha = \xi_1 F u^2$.

Ez a képlet a horizontalis mozgás gyorsaságát G-ben fejezi ki; de lehet azt még a szabad esés gyorsaságában is kifejezni. Mert ha a madár kiterített szárnyakkal a szabad esésnek átengedi magát, a teste a földi vonzási erő hatása alatt bizonyos gyorsasággal indul lefelé; a levegő bizonyos P nyomást gyakorolván, a szabad esés gyorsasága bizonyos v határon túl nem növekedhetik, úgy hogy $2gP = \zeta\gamma f v^2$ egyenlet a gyorsaság határértékét meghatározza. Mivel most egyenlő idejü szárnylecsapás és felemelésnél a lebegéshez szükséges, hogy $P = 2G$ legyen, következik: $4Gg = \zeta\gamma f v^2$; ezt (35)-be betévén, nyeretik:

(36) $\zeta\gamma f v^2 \text{ tang } \alpha = \zeta_1 \gamma F u^2$. A v és u gyorsaságok viszonyát körülirja tehát a formula:

(37) $u = v . \sqrt{\frac{\zeta f}{\zeta_1 F}} . \sqrt[4]{\text{tang. } \alpha}$. Itt megint $\alpha$ n-ben kifejezhető, miután $\cos \alpha = (n/n_1)^2$; ennélfogva:

(38) $u = v \sqrt{\frac{\zeta f}{\zeta_1 F}} . \sqrt[4]{(n_1/n)^4 - 1}$.

Ámde v a vertikalis gyorsaság, melylyel a szárnyak nyomási pontjai a vartikalis irányában lecsapnak. A két nyomási pont mindegyike forog a saját szárnya tengelye körül; ez $\alpha$ szöggel tér el a horizontalistól, a nyomási pont forgási gyorsasága iránya tehát ugyanakkora $\alpha$ szöggel tér el a vertikalistól, még pedig: $\cos \alpha = (n/n_1)^2 = (v/v_1)^2$. Ha tehát v vertikalis gyorsaságot a (38)-ban ezen a forgási tengelyre merőleges $v_1$-ben kifejezzük, végre az egyletre jutunk:

(39) $u = v_1 \sqrt{\frac{\zeta f}{\zeta^1 F}} . \sqrt[4]{1 - (n/n_1)^2}$. S ez fejezi ki azon horizontalis gyorsaságot, melyet a madár képes felvenni azon feltevés alatt, hogy az állat még azon kivül a lebeǵést is fentartja.

Mielőtt másra áttérnénk, helyén valónak tartjuk, hogy még vavalamire reflectáljunk. Elébb meggyőződtünk, hogy a madár mily egyszerü módon hozza magát mozgásba horizontális irányban. A helyből való elindulás, vagyis a locomotio azonban nem csak abból áll, hogy a madár bizonyos irányban útra induljon s az irányban azt folytassa, hanem akármikor és akárhányszor felmerülhet a szükségesség, hogy a madár a repülési irányt megváltoztassa. Az irányváltozás megfejtése a kormányozhatás kérdéséhez tartozik. Lássuk tehát, mi módon kormányozhatja magát a madár.

A horizontalis mozgás elve a (31) alatti egyenleteken nyugszik. Szerinte feltétetik, hogy a két szárny mindegyike bizonyos $\alpha$ szög alatt beállíttatik; még pedig a milyen szög alatt van az egyik szárny beigazítva, ugyanakkora szög alatt igazítjuk be a másikat is; s ezen beigazitás mindkét szárnynál egyidejüleg történik. Válasszuk el most a két szárnyat s tegyük függetlenné egymástól úgy, hogy mindenik egyidejüleg ugyan, de külön-külön beigazítást kapjon. Nyilvánvaló, hogy az egyenes irányban való mozgást kapjuk, ha mindkét tengely beigazitása egyenlő es egyforma; de ha a két tengely egyidejüleg ugyan, de külöu-külön szög alatt beigazíttatik, ha az egyik $(+\alpha)$ a másik $(-\alpha)$ szög alatt hajlik: úgy az elsőre nézve a (31) szerint $R_1 = N_1 \sin(+\alpha)$, a másodikra nézve ellenben: $R_2 = N_2 \sin(-\alpha)$ tehát két egyenlő nagy, de ellenkező jegyü R. componensek fejlesztetnek. Ezen $+R$ és $-R$ componensek támadó pontjai összeesnek a két szárny nyomási pontjaival. Ezek megint a szárnyak symmetriája következtében a röpsiktól egyenlő, de ellenkező fekvésü távolságban vannak, s miután a test súlypontja a röpsíkban fekszik, látjuk. hogy a szóban forgó componensek egy erőpárt képeznek mely a testi rendszert a súlypontja vertikalisa körül forgásba hozza. A horizontalis mozgás irányát tehát megváltoztatja az állat, ha a fordulás czéljára a két szárnynak egyenlő, de ellenkező jegyü beállitást ad.

5.

A kis digressio után térjünk vissza tulajdonképeni feladatunkra, a horizontalis mozgás mikénti létrehozására. Fennebbi lehozásaink minden felmerülhető kérdésre adnak ugyan feleletet, ámde az még nem elég; hátra vannak még azon következtetések, melyek a lehozásokból levonhatók. Bár milyenek legyenek is a következtetések, annyi bizonyos, hogy az eljárás a horiz. mozgás létrehozására nagyon egyszerü. A madárnak, ha lebegve locomotiót akar elérni, csak azt kell tennie, hogy a szárnyakat bizonyos szög szerint beigazitsa s a szárnylengésnél a szárnyemelést és lecsapást egyformán meggyorsítsa.

Az eljárás azonban bizonyos tekintetben hátrányos, sőt körülmények közt életveszélyes. A dolog felette fontos; lássuk azt.

Elméletünk azon az elven nyugszik, hogy a madár sulypontja, ha a szárnyakat fel és alá viszi, bizonyos vertikalis oscillatiókat végez; még pedig volt:

(40) $h - h_1 = \frac{g}{2G}[Pt^2 - G(t^2 + t_1^2)]$ a hol P a szárny nyomása lecsapáskor, G a test súlya, a P-vel járó rész a szárny munkája, a G-vel járó pedig a gravitatio munkája. Hogy e második munka, mely a szárnyak munkájából elvész, minimummá tétessék, feltétetett, hogy $t = t_1$ azaz $t = 1/2n$ legyen. Ámde épen ezen feltétel képezi a veszedelmes pontot. Mert a P nyomás növekedik a fennebbiek szerint az n quadratumai szerint, ellenben a szárny munkája: L (a (11) szerint) csak n első hatványai szerint növekedik. Ennek az a következése, hogy a szárny $n^2$-szor nagyobb nyomást kénytelen kitartani, ha n-szer nagyobb munkát akar fejleszteni; s már most megérthető, hogy a munka megnövesztése a szárnyat csakhamar oly nyomásoknak teszi ki, melyek hordképességét meghaladják. Ez veszélyezteti az állat existentiáját; a szárnynyomás gyors megnövekedése képezi tehát a veszedelmes pontot az elméletben. Nem szenved kétséget, hogy a természet a veszedelmet ki tudja kerülni; tehát olyan elv után kell kutatnunk, mely a veszedelmet kerüli. Nem nehéz azt az elvet felfedezni.

A szárny hordképessége annak szilárdsági viszonyaitól s ezek megint a szárny kiméreteitől függvén, miután ezek constansok, a hordképesség is constans, azaz; miután a madár csont- és izomrendszere s ezek szilárdsági viszonyai ugyanazon egy állatnál állandókul tekintendők, a szárny hordképessége is állandó határnak tekintendő, melyen az állat koczkázat nélkül túl nem mehet.

Tegyük fel tehát, hogy P állandó, akkor L a (11)-ben még csak úgy lehet variabilis, ha n variabilis; másfelől P nyomás függ a nyomási pont gyorsaságától, ez megint a lecsapási időtől; P tehát csak úgy constans, ha t lecsapási idő constans. Ámde ha $t_1$ a szárnyemelés ideje és $n_1$ a lengések száma, akkor:

(41) $n_1(t + t_1) = 1$ egyenlet szerint, n constans t-nél csak úgy variabilis, ha $t_1$ idő variabilis. Ezt a variabilis $t_1$-et a constans t-vel kapcsolatba hozván, legyen:

(42) $t_1 = \theta t$, a hol $\theta$ egy új variabilis, akkor a (41) ebbe megy által:

(43) $n_1 t(1 + \theta) = 1$; ezt a (40)-be betévén s az egyenletet $(Gn_1)$-el szorozván, nyerjük:

$$(44)\quad \begin{cases} GH_1 = L_1 - A_1 \quad \text{a hol} \\ L_1 = \dfrac{Pg}{2n_1(1+\theta)^2} \quad \text{és} \\ A_1 = \dfrac{Gg}{2n_1} \cdot \dfrac{1+\theta^2}{(1+\theta)^2} \end{cases}$$

Mindenekelőtt $\theta$ iránt kell tisztába jönnünk. A variabilis (42) szerint csak igenleges értéket kaphat, hehát $\theta = 0$ és $\theta = \infty$ a legkisebb és legnagyobb értékei. A (45)-ben $\theta = 0$ tévén, nyerjük

$$(45)\quad \begin{cases} GH_0 = L_0 - A_0, \quad \text{a hol} \\ L_0 = \dfrac{Gg}{2n_1} \text{ és } A_0 = \dfrac{Gg}{2n_1}; \text{ — ha megint } \theta = \infty, \text{ akkor} \\ \text{(44)-ből nyerjük:} \end{cases}$$

$GH_\infty = L_\infty - A_\infty$, a hol

$A_\infty = \dfrac{Gg}{2n_1}$. Összehasonlítván látjuk, hogy $A_1$, ha $\theta = 0$ vagy $= \infty$, mindkét alkalommal ugyanazt az értéket: $Gg/2n^{1}$ kapja; kell tehát 0 és $\infty$ közt oly $\theta$-nak lennie, melynél $A_1$ maximum vagy minimum. A $\theta$ értéket megkapjuk, ha

$$(46)\quad \begin{cases} U = \dfrac{1+\theta^2}{(1+\theta)^2} \text{ kifejezés maximumát vagy minimumát} \\ \text{meghatározzuk. Ámde:} \\ \dfrac{dU}{d\theta} = \dfrac{2(\theta-1)}{(1+\theta)^3} \text{ és } \dfrac{d^2U}{d\theta^2} = 2\,\dfrac{4-2\theta}{(1+\theta)^4}. \text{ Az elsőből} \\ \text{nyerjük:} \end{cases}$$

$\theta = 1$ s miután a második egyenlet jobb oldala a $\theta$-nál igenleges, látjuk, hogy $A_1$-nak $\theta = 1$ értéknél csakugyan minimuma van. Ezt most közelebbről kell vizsgálnunk.

Tegyük fel tehát, hogy $\theta = 1$, akkor a (44) alattiak ebbe változnak át:

(47) $\begin{cases} GH = L - A \\ L = Pg/8n \\ A = Gg/4n \text{ a hol:} \\ 2nt = 1 \text{ és } t \text{ a lecsapás ideje. Azonnal látjuk, hogy} \\ \quad\text{a képletek a (11) és (12) alattiakkal teljesen meg-} \\ \quad\text{egyeznek.} \end{cases}$

Hasonlítsuk most ezeket össze.

A (44) és (45) alattiakból nyerjük:

(48) $\begin{cases} L_1(1+\theta)^2 = L_0 \text{ és} \\ A_0(1+\theta^2) = A_1(1+\theta)^2 \text{ tehát ha összeszorozzuk:} \\ A_1L_0 = A_0L_1(1+\theta^2). \text{ Ebből } \theta\text{-t meghatározván, lesz} \\ \quad\text{léptenként:} \end{cases}$

(49) $\begin{cases} 1+\theta^2 = \dfrac{A_1L_0}{A_0L_1} = \dfrac{A_1}{A_0} \cdot \dfrac{L_0}{L_1} \text{ vagy ha:} \\ L_1/L_0 = \lambda \text{ és } A_1/A_0 = \alpha \text{ tétetik,} \\ 1+\theta^2 = \alpha/\lambda \text{ ebből végre} \\ \theta = \sqrt{\dfrac{\alpha-\lambda}{\lambda}}. \text{ Ez áll minden } \theta\text{-nál, tehát még akkor} \\ \quad\text{is, ha } \theta = 1, \text{ a mikor aztán } A_1 \text{ és } L_1 \text{ } A \text{ és } L\text{-be} \\ \quad\text{átmegy; az utolsó egyenletből, ha } \theta = 1, \text{ követ-} \\ \quad\text{kezik tehát:} \end{cases}$

(50) $\begin{cases} \alpha = 2\lambda \text{ azaz:} \\ A/A_0 = 2L/L_0. \text{ Ezt a (47) alatti első egyenletbe be-} \\ \quad\text{tévén:} \end{cases}$

(51) $\begin{cases} GH = L[1-2A_0/L_0] \text{ azaz tekintettel a (45)-re:} \\ GH = L[1-2G/P]. \end{cases}$

Már most csak tőlünk függ, hogy milyen magyarázatot adunk az egyenletnek. A feltétele az, hogy $\theta = 1$ s annyi bizonyos, hogy a GH szorzatba involvált A ezen $\theta$-nál minimumát eléri, tekintve továbbá, hogy $L_1$ a (48) szerint ezen $\theta$-nál szintén minimumát eléri, tegyük fel, hogy a H is akkor minimum az igenleges H értékek sorában: ha $H = 0$, ez által (51) ebbe változik át:

(52) $0 = L[1-2G/P]$. Ebből, miután L null nem lehet, következik:

(53) $P-2G = 0$. A P nyomás tehát csakugyan constans, a mint az előre bocsátott hypothesis azt feltette volt; s ennélfogva nincs a szárny a P nyomás növekedése által veszélyeztetve.

Még egyszer (44)-re visszatérvén s abban P helyett (2G)-t irván:

$$
(54)\quad \left\{
\begin{array}{l}
L_1 = \dfrac{Gg}{n_1(1+\theta)^2} \text{ tehát} \\
GH_1 = \dfrac{Gg}{n_1(1+\theta)^2} - \dfrac{Gg(1+\theta^2)}{2n_1(1+\theta)^2} \text{ azaz összevonva} \\
\text{és rövidítve:} \\
H_1 = g/2n_1\left(\dfrac{1-\theta}{1+\theta}\right).
\end{array}
\right.
$$

A repülés lefolyása, ha az állat a rövidített szárnyemelés elvét használja, következőkép történik:

A madár ha repülni akar, a szárnyakat fel és alá jártatja, s ha csak lebegni akar, lecsapást és emelést egyenlő időkben végez, ha a lebegésen kivül még más mozgásokat akar tenni, meggyorsítja a szárnyemelést. Ez által történik, hogy a szárnycsapásból a tömegben visszamaradó eleven erő a testet bizonyos H oszlopra emeli, melyet a madár tetszés szerint felhasznál. Ámde a H-nak határa van, melyet elér, ha $\theta = 0$, de a melyet a madár, bárhogy is rövidítse a szárnyemelés idejét, soha sem képes elérni; a H megnövesztése ennélfogva más jóval alantabb fekvő határhoz marad kötve. A határ függ a madár súlyától és munkaképességétől; függ tehát az állat szerves berendezésétől.

A horizontalis mozgás gyorsasága itt is azon a módon jő létre, melyen létre jött az egyenlő lecsapási és emelési idők elvén alapuló repülésnél. A madár t. i. beigazítja szárnyait bizonyos szög alatt, ez által két componensre oszlik a deréklő nyomás. A vertikalis componens a test súlyával lép egyensúlyba, ez tartja fen a lebegést a horiz.

mozgás alatt. A horizontalis componens impulsust gyakorol a test tömegére, mely a horiz. mozgás gyorsaságát mindaddig növeszti, míg a levegő ellenállása az impulsussal egyensúlyba nem helyezkedik. A formula a (36) alattihoz analog lévén, talán nem szükséges, hogy azt a jelen esetben még egyszer lefejtsük.

Ámde a szárnyemelési időt rövidítni annyit teszen, mint a szárnylengések számát növeszteni állandó szárnnyomás mellett. Mert a (43) szerint volt:

(55) $n_1 t(1 + \theta) = 1$. Itt t constans, tehát P is constans, akármi is a $\theta$; ha $\theta = 1$, akkor $n_1$ átmegy n-be, annálfogva:
$2nt = 1$. Összehasonlítván, marad t kihagyása után:
$2n = n_1(1 + \theta)$. Másfelől, ha (54)-ben Gg helyett $\gamma L_1$ tétetik, a hol tehát:

$Gg = \gamma L_1$, marad az $L_1$ kihagyása után, ha még $n_1(1 + \theta)^2$ osztóval átszorozunk:

$n_1(1 + \theta)^2 = \gamma$. Összehasonlítván ezt az elébbivel, nyerjük:

(56) $2n(1 + \theta) = \gamma$. Ezt (55)-el összeszorozván:
$4n^2 = n_1\gamma$. A két egyenlet kimutatja, hogy n, $n_1$ és $\theta$

értékei $\gamma$-tól, azaz $Gg/L_1$ hányadostól függnek. A mennyiségek tehát nem tetszés szerint összecombinálandók, hanem mihelyt a három mennyiség közt egy tetszőlegesen felvétetett, a másik két mennyiség mint amannak és $\gamma$-nak a függvényei meghatározandók.

## 6.

Összefoglalván a mondottakat, az eredmény a következő:

A madár-repülés kétféle módon kivihető.

Az egyik mód azon az elven nyugszik, hogy a szárny emelése és lecsapása mindenkor egyenlő időkben történik.

A második mód megint támaszkodik azon elvre, hogy a szárny emelése és lecsapása csak az absolut lebegésnél vesz igénybe egyenlő időket; egyébkor az emelés mindig rövidebb időben történik, mint a lecsapás.

Az első mód szerint növekszik a szárnynyomás a szárnylengések quadratumai szerint, a második mód szerint állandó; s amaz kisebb, ez nagyobb szárnyterületet igényel. A repüléshez megkivántató munka növekszik mind a két módnál a szárnylengések első hatványai szerint; de a növekedés az első módnál nincs határhoz kötve; a másodiknál nem mehet a növekedés bizonyos határon túl. A szárnylengések száma az első módnál tetszés szerint növeszthető; a másodiknál a megnövesztés bizonyos határon túl nem mehet. A szárnyemelés ideje az első módnál tetszés szerint rövidithető ugyan, de vele együtt a lecsapás ideje is egyenlő mértékben rövidítendő; a második módnál a lecsapás ideje állandó, csak a felemelés ideje rövidíthető, de ezen rövidítés bizonyos határon túl nem mehet.

Ezek után a fontos kérdés veti fel magát: hogy a két repülési mód között melyik előnyösebb? A felett, hogy melyik előnyösebb, csak úgy dönthetünk, ha a hatásokat összehasonlítjuk, melyek a két mód szerint elérhetők. A végre tegyük fel, egy madár képes kedvekénye szerint akár az egyik, akár a másik mód szerint repülni. Legyen a súlya G, a szárnylengések száma puszta lebegésnél n, leggyorsabb felszállásnál $n_1$; első módnál legyen a felszállás oszlopmagassága $H_1$, a másik módnál $H_\theta$, akkor:

$$H_1 = h_0 (n_1/n - n/n_1) = g/4n (n_1/n - n/n_1) \quad \text{és}$$

$$H_\theta = g/2n_1 \left(\frac{1-\theta}{1+\theta}\right) = g/2n_1 . \, n/n_1 \left(\frac{1-\theta}{1+\theta}\right) =$$

$$= g/4n . \, 2n/n_1 \left(\frac{1-\theta}{1+\theta}\right)$$

a kettő közötti külömbség lesz:

$$(57) \quad H_1 - H_\theta = g/4n \left[n_1/n - n/n_1 - 2n/n_1 \left(\frac{1-\theta}{1+\theta}\right)\right]$$

Ámde $\theta$ értékét (55)-ből kikeresvén:

$\theta = 2n/n_1 - 1 = 2(n/n_1) - 1$ ennélfogva:

$$(58) \quad \frac{1-\theta}{1+\theta} = \frac{1-n/n_1}{n/n_1} = n_1/n - 1, \text{ ezt (57)-be betévén:}$$

$H_1 - H_\theta = g/4n[n_1/n - n/n_1 - 2n/n_1(n_1/n - 1)] = g/4n[n_1/n - n/n_1 - 2(1 - n/n_1)]$, összevonván végre:

(59) $$H_1 - H_\theta = g/4n. \frac{(n_1 - n)^2}{n\, n_1}$$

Ebből látni való, hogy $H_1 - H_\theta$ külömbség, akármi is az $n$ és $n_1$, mindig igenleges, ennélfogva:

(60) $H_1 > H_\theta$, azaz: a felszállás oszlopmagassága mindig nagyobb, ha a madár az első mód szerint repül.

Az első mód szerinti repülés tehát a felszállás gyorsaságára nézve előnyösebb, mint a második mód szerinti repülés.