A HAJLÍTHATÓ MATHEMATIKAI INGA MOZGÁSÁRÓL.

Szabó Péter tanárjelölttől.

I.

A dynamika alapja: a D'Alembert-féle elv. De ez elv csak azon esetben alkalmazható, ha a feltételek egyenletek alakjában vannak adva és nem egyenlőtlenségek által. Ha a feltételek egyenlőtlenségek által vannak képviselve, a szélső értékekre nézve külön kell a mozgást definiálnunk, mert erről a D'Alembert-féle elv semmit sem mond.

A következőkben egy pont-mozgástani problemát tárgyalok, mint példáját az említett esetnek. A jelzett kérdéssel való foglalkozás, úgy látszik, nem régi. Lagrange értekezése „Sur le mouvement d'un corps suspendu par une file flexible" (Misc. Tauriens. T III. p. 242.) csak látszólag tartozik ide. 1886-ban Nouvel cötheni tanár vizsgálta azon tárgyat, melylyel e sorok foglalkoznak. [1])

Először a síkban lengő hajlítható mathematikai inga elméletét fogom tárgyalni. Azután térre való kiterjesztését az elméletnek, a mennyiben ez sikerűlt.

*

Hajlítható mathematikai inga alatt értünk egy súlyos pontot, melyet egy mozdulatlan ponttal tökéletesen hajlítható, de nem nyújtható, súlytalan fonal köt össze. Feltételünk tehát az: hogy az ingaszál hosszával mint sugárral leirt körön belől és annak kerületén a pont általában minden helyzetet elfoglalhasson.

Válasszuk meg coordináta rendszerünket úgy, hogy origója a felfüggesztési pontba essék, a z tengely függőlegesen felfelé irányul-

[1]) Programm des Gymn. zu Cöthen 1886. „Ueber die Bewegung eines Fadenpendels, welches in einer Ebene schwingt." S. 3—20.

jon positiv felével, az y tengely az inga mozgási síkjába essék, a z-re merőlegesen.

Jelölje az ingaszál hosszát r, a mely constans; a pont által leirt pálya elemét ds, a folyó időt t és a gravitáczió constansát g, akkor a pont körös mozgását megillető differencziális egyenletek:

$$(1) \quad \begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} = \left[gz - \left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2 \right] \dfrac{y}{r^2}, \\[2ex] \dfrac{d^2z}{dt^2} = \left[gz - \left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2 \right] \dfrac{z}{r^2} - g \end{cases}$$

továbbá

$$z^2 + y^2 = r^2.$$

A midőn már $z^2 + y^2 < r^2$ a pont szabadon mozog, és felírt egyenleteink csakis addig állítják elő a mozgást, míg a pont körpályán mozog. Az (1) egyenletből

$$(2) \quad \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2g\,(h - z - r)$$

írván: $v_0{}^2 = 2gh$, hol v_0 azon értéke a sebességnek, mely $z = -r$-hez tartozik. Az inga legmélyebb helyzetét nyilvánvalólag minden lengés közben most is eléri és az nem más, mint $z = -r$.

Az inga lengési idejére nézve következő kifejezésünk van:

$$(3) \quad t = r \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{v_0{}^2 - 2gr\,(1 - \cos\varphi)}}$$

hol y és z poláris coordinátákban fejezvék ki:

$$y = r\sin\varphi, \quad z = -r\cos\varphi,$$

jelölve φ-vel, az inga-szál és a negativ z tengely által bezárt szöget.

Kérdés: az (1) egyenletek mikor állítják be szabad pont mozgását? Minthogy ekkor

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -g$$

tartozik lenni, akkor, midőn

$$\text{(I)} \qquad \left. g z_1 - \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 0 \right|_{z=z_1}$$

hol z_1 azon ponthoz tartozik, melyben a megszabadulás történik. Innen

$$\text{(4)} \qquad z_1 = \frac{2}{3}(h-r)$$

Azonban I-ből következik, hogy $z_1 > o$, e szerint:

$$h > r$$

másfelől z nem lehet r-nél nagyobb, az inga-szál nyújthatlanságánál fogva, és ez adja a feltételt, hogy:

$$h < \frac{5}{2} r.$$

Meg kell azonban még vizsgálnunk, hogy ezen megszorítások mellett t valós marad-e? mert megszabadulás csak ekkor jöhet valóban létre.

E végből (2) alatti egyenletünk szerint $z = -r$ és $z = z_1$ között

$$h - z - r > o$$

tartozik csak lenni. De a baloldal z nőttivel fogy, tehát mivel $z = z_1$ esetében positiv, $z = -r$ és $z = z_1$ között is az.

Tehát az adott megszorítás h-ra nézve, a mozgás realitását is biztosítja. Irván tehát:

$$h = kr$$

az áttérés lehetőségének szükséges és elégséges feltételei:

$$\text{(II)} \qquad 1 < k \leqq \frac{5}{2}$$

A megszabadulás pillanata:

$$\text{(5)} \qquad t_1 = \sqrt{\frac{r}{2g}} \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{h - 2r \sin^2 {}^1/_2 \varphi}}$$

tehát általában egy első osztályu ellipticus integrális által van meghatározva, melyet Legendre F. symbolummal jelölt.

A $z_1 = -r\cos\varphi_1$, kifejezésből következik, mivel z_1 positiv, r per definitionem positiv,

$$\varphi_1 > \frac{\pi}{2}$$

Irjuk ennélfogva

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2} + \varepsilon_1 \tag{6}$$

akkor

$$\left\{\begin{array}{l} z_1 = r\sin\varepsilon_1 \\ y_1 = r\cos\varepsilon_1 \end{array}\right., \quad \sin\varepsilon_1 = \frac{2}{3}(k-1) \tag{7}$$

ε_1 legnagyobb értékét éri el, a mikor $k = \frac{5}{2}$, és akkor

$$\sin\varepsilon_1 = 1, \quad \varepsilon_1 = \frac{\pi}{2}.$$

Ugyanekkor z_1 maximum, y_1 pedig minimum érték.

A $t = t_1$ időtől kezdve a pont parábolán fog tova mozogni. A parabolicus mozgás ismert egyenletei:

$$\frac{d^2y'}{dz^2} = 0, \quad \frac{d^2z'}{dt^2} = -g. \qquad \text{Honnan:}$$

$$y' = B\theta + B', \quad z' = -\frac{g}{2}\theta^2 + C\theta + C', \tag{8}$$

ha a parabolához tartozó coordinátákat index-szel különböztetjük meg és az áttéréstől számított időt θ jelöli. Ezen parabolikus mozgásnál a constansokat az a körülmény adja ki, hogy a $\theta = 0$ időben a parabolára és a körre kiszámított sebességi componensek, valamint coordináták ugyanazon értéküek legyenek. Evvel vagyon definiálva a válságos pontban a mozgás. A mondottakból következik, hogy

$$\left\{\begin{array}{l} B' = y_1, \quad C' = z_1 \\ B = -\frac{z_1}{r}v_1, \quad C = \frac{y_1}{r}v_1 \text{ hol } v_1{}^2 = gz_1 \end{array}\right. \tag{9}$$

v_1 jelentvén a z_1, y_1 ponthoz tartozó sebességet.

Evvel már ki van mondva, hogy a kör érintője az y_1, z_1 pontban, egyszersmind a parabolának is érintője. Mert jelölvén a parabola érintőjének hajlását az y tengelyhez ψ_p a köret ψ_k. általában

$$\mathrm{tang}\ \psi_p = \frac{C - g\theta}{B}$$

$$\mathrm{tang}\ \psi_k = -\frac{y}{z}$$

Midőn $\theta = 0$, $y = y_1$, $z = z_1$; a két érték összeesik, és ha ψ_p, ψ_k alatt a legkisebb ívetaka rjuk érteni, melynek tangense a felírt érték:

$$\psi_p = \psi_k\,,\ \text{a mikor}\ \theta = 0.$$

A parabola helyzetének közelebbi vizsgálata céljából irjuk ki részletesen a coordinátákat.

$$(9')\quad y' = -\frac{z_1 v_1}{r}\theta + y_1\,,\ z' = -\frac{g}{2}\theta^2 + \frac{y_1 v_1}{r}\theta + z_1\,;\ v^2_1 = gz_1$$

A parabola csúcsában $\frac{dz}{d\theta} = 0$ honnan

$$(10)\qquad \theta = \frac{y_1 v_1}{rg}.$$

A csúcspont coordinátáit jelen rendszerünkben jelölve a, b-vel: van

$$a = y_1\left[1 - \frac{z_1^2}{r^2}\right],\ b = z_1\left[1 + \frac{y_1^2}{2r^2}\right]$$

Könnyü látni, hogy $a^2 + b^2 < r^2$, $a < y_1$, $b > z_1$. Ha a csúcspontba toljuk át a kezdő pontot, a parabola egyenlete

$$(11)\qquad \eta^2 = 2p\zeta,\ \text{a}\ \theta\ \text{eliminálása után, hol}\ p = r\sin^3\varepsilon_1.$$

A (11)-ből látható, hogy a parabola főtengelye egyközű a mi z tengelyünkkel.

Akkor, ha $z_1 = 0$, $y_1 = r$; vagy $z_1 = r$, $y_1 = 0$ a pont végtelen kicsiny parabola-ívet ír le, összeesvén a csúcspont és a megszabadulás pontja.

A kör pályára visszatérést czélszerű úgy megállapitani, hogy vízsgáljuk: a kezdőponttól való távol mikor lesz az inga-szál hoszszával egyenlő. Jelöljük a parabolán mozgás alatt a kezdő ponttól való távolt R-el

$$R^2 = y'^2 + z'^2$$

Beírván ide y', z' (8) alatti értékeit, a kellő összevonások után

$$(12) \qquad R^2 = r^2 - \frac{g^2\theta^3}{4}\left(4\,\frac{y_1 z_1}{rg} - \theta\right).$$

Miután a zárjelzett mennyiség nem negativ, $R^2 < r^2$; ezek egyenlők, ha

$$(13) \qquad \theta = 4\,\frac{y_1 v_1}{rg}$$

Ez fejezi ki azon teljes időt, melyet a pont parabolán tölt. Ha a (10) egyenletet a (13)-al összehasonlítjuk, e következő tételt mondhatjuk ki:

Ha θ_1 időt tölt a pont parabolán, $^1/_4\theta_1$ idő alatt éri el a parabola csúcsát.[1])

θ_1 ismeretes lévén, a körre visszatérés helyzetét kijelölhetjük. Ha a mondott pont coordinátái y_2, z_2, van:

$$(14) \qquad z_2 = z_1\left(4\,\frac{z_1{}^2}{r^2} - 3\right), \quad y_2 = y_1\left(4\,\frac{y_1{}^2}{r^2} - 3\right)$$

vagy az ε argumentumot használva

$$((14)) \qquad z_2 = -\,r\sin 3\varepsilon_1\,, \quad y_1 = r\cos 3\varepsilon_1\,.$$

Az utóbbi formulákból, adva lévén a megszabadulás ε-ja, egyszerű geometriai szerkesztéssel meghatározhatjuk a visszatérés pontját.

A mozgásról nehány esetre képet ad következő kis táblázat:

mikor $\varepsilon = 0$; $z_1 = 0$, $y_1 = r$ $z_2 = 0$, $y_2 = r$

mikor $\varepsilon = \frac{\pi}{6}$; $z_1 = \frac{1}{2}r$, $y_1 = \frac{\sqrt{3}}{1}r$; $z_2 = -r$, $y_2 = 0$

---

[1]) E tétel Nouvel értekezésében nem található. A körre való visszatérést kissé hosszadalmas eliminatioval intézi el (i. h. 8. lap)

$$\varepsilon = \frac{\pi}{3}; \quad z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} r, \; y_1 = \frac{1}{2} r; \quad z_2 = 0, \; y_2 = -r$$

$$\varepsilon = \frac{\pi}{2}; \quad z_1 = r, \; y_1 = 0; \; z_2 = r, \; y_2 = 0$$

Látható, hogy a pont bármely pontban visszatérhet a körre, kivéve azon környegyedet, melyben épen áttér. Kétszer esik össze a megszabadulás és a visszatérés helye: ha $\varepsilon = 0$, és $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$. Első esetben a pont $\varphi = \frac{\pi}{2}$ szögig kitérvén visszatér, második esetben egész körön mozog tova. Mindkét eset felfogható úgy, hogy végtelen kis parabola ívet ír le a pont. Legmélyebbre esik vissza, midőn $\varepsilon = \frac{\pi}{6}$, az y tengelyen legnagyobb darabot metsz le, ha $\varepsilon = \frac{\pi}{3}$.

A midőn $\varepsilon = \frac{\pi}{4}$; $z_1 = y_1 = \frac{r}{\sqrt{2}}$; $z_2 = y_2 = -\frac{r}{\sqrt{2}}$.

A mozgó pont olyan körbeli pontra nem térhet vissza, melynek z-je nagyobb volna, mint a megszabadulás z-je.

Könnyen észrevehető, hogy a z_2 maximuma vagy minimuma nem esik össze z_1 szélső értékeivel. Mintán z_2 csak h-tól függ, a szélső értékeknél

$$\frac{dz_2}{dh} = 0,$$

$$\text{honnan } h' = \frac{7}{4} r, \quad z_2 = -r \quad \text{minimum}$$

$$\text{és } h'' = \frac{1}{4} r, \quad z_2 = +r \quad \text{maximum.}$$

II.

A parabolikus pályán a sebesség általános kifejezése

$$v^2 = v_1{}^2 - 2g\,(z - z_1)$$

Amikor $z = z_2$, $\theta = \theta_1$ legyen. Ekkor a parabola érintőjébe eső sebesség

$$\left.\begin{aligned} v_2' &= \frac{v_1}{r}\sqrt{z_1{}^2 + 9y_1{}^2} \\ \text{vagy} \quad & \\ v_2' &= v_1\sqrt{9 - 8\sin^2 \varepsilon_1} \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Azonban a kör és parabola érintői az (y_2, z_2) pontban nem esnek össze. És így a mozgás folytonossága itt megszűnik, a midőn ujra

$$y^2 + z^2 = r^2$$

lesz. Definiczióhoz kell folyamodni: a sebességet két komponensre bontjuk: egyik a kör érintőjére merőleges, a másik bele esik abba, és a mozgást úgy definiáljuk, hogy a v'_2 sebességnek a kör érintőjébe eső componensével mozog tova a pont. Jelölje ψ'_k, ψ'_p a kör, illetve a parabola érintőjének hajlását az y tengelyhez, δ a kettő által bezárt szögöt, akkor

$$\cos\delta = \cos\psi_p{}'\cos\psi_k{}' + \sin\psi_p{}'\sin\psi_k{}'$$

Ámde

$$\cos\psi'_p = \frac{\left(\frac{dz}{d\theta}\right)_{\theta=\theta_1}}{v_2'} \quad \sin\psi'_p = \frac{\left(\frac{dy}{d\theta}\right)_{\theta=\theta_1}}{v_2'}$$

$$\cos\psi'_k = \frac{y_2}{r}, \quad \sin\psi_k{}' = -\frac{z_2}{r}$$

honnan

$$(18) \quad \cos\delta = \frac{v_1}{v'_2} \cdot \frac{z_1 z_2 - 3y_1 y_2}{r^2}$$

A v_2' azon componense, melylyel a pont a körön tova mozogni kezd

$$v_2 = v'_2 \cos\delta \quad \text{vagyis:}$$

$$(19) \qquad v_2 = v_1 \frac{z_1 z_2 - 3y_1 y_2}{r^2}$$

Ezen sebesség positiv, zérus, negativ, a szerint, a mint

$$z_1 z_2 - 3y_1 y_2 \gtreqless 0.$$

Hogy könnyebben kiolvassuk a másodszori megszabaduláshoz szükséges feltételeket, írjuk be z_1, z_2, y_1, y_2 trigonometrikus alakjait és azután fejezzük ki az előjövő formulákat $\cos 2\varepsilon_1$ által. Ha következő rövidítést használjuk:

$$F(\cos 2\varepsilon_1) = 2\cos^2 2\varepsilon_1 + 2\cos 2\varepsilon_1 - 1$$

van:

$$(20) \qquad z_1 z_2 - 3y_1 y_2 = -r^2 F(\cos 2\varepsilon_1)$$

Tehát

$$v_2 \gtrless 0, \quad \text{a szerint a mint} \quad F(\cos 2\varepsilon_1) \lessgtr 0.$$

Az F funkczio magaviselete az $\varepsilon_1 = 0 \longrightarrow \varepsilon_1 = \frac{\pi}{2}$ intervallumban a következő. Tekintsük úgy, mint $\cos 2\varepsilon_1$ racionalis egész funkcióját. Mivel a derivált a maga jegyét megtartja, a mondott intervallumban egyenlő gyökök nincsenek. Csak egyszer vált jegyet az F_1 még pedig ha az gyök értékhez tartozó argumentum η;

$$0 < \eta < \frac{\pi}{4}$$

Az F az $\varepsilon_1 = 0$-nál positiv, $\varepsilon_1 > \eta$-nél már negativ, innen következik, hogy amint $\varepsilon_1 \lessgtr \eta$ a szerint $v_2 \gtrless 0$. Mikor $\varepsilon_1 = \eta$; $v_2 = 0$, s ekkor $\cos \delta = 0$, $\delta = \frac{\pi}{2}$.

Egyébiránt

$$\cos 2\eta = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \quad \text{tehát} \quad \eta = 34^0\, 15'\, 43{\cdot}5''$$

A v_1-et akkor tekintve positivnak, mikor a lengés az óra mutató járásával ellenkező irányban történik, a mint v_2 pos. vagy neg., vele a lengés az óramutató mozgásával ellenkezőleg, vagy egyezőleg indúl meg.

Mielőtt tovább kutatnók, minő feltételek szükségesek és elégségesek ahhoz, hogy az inga több ízben térhessen át parabolikus pályára, meg kell vizsgálnunk, vajjon nem lehetséges-e, hogy a körre visszatérés után nem a körön folytatja mozgását. A körre nézve állanak az (1) alatt felírt mozgási egyenletek. Csakis akkor volna lehető, hogy a z_2, y_2 pontba érve a mozgó pont ne körön folytassa pályáját, ha

$$gz_2 - \left(\frac{ds}{dt}\right)^2_{\substack{z = z_2 \\ y = y_2}} = 0$$

volna. Ez azonban nem lehetséges. Ha z_2-t trigonometricus alakban írjuk, azután $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = v_2{}^2$-nak $\cos 2\varepsilon_2$-ben kifejezett értékét beírjuk a következő kifejezés jelváltásáról van szó

$$(21) \qquad g(\cos 2\varepsilon_1) = 2\cos^4 2\varepsilon_1 + 4\cos^3 2\varepsilon_1 - \cos 2\varepsilon_1 + 1$$

Azonban ha $\varepsilon_1 = 0 \longrightarrow \varepsilon_1 = \frac{\pi}{2}$-ig változik, g nem vált jegyet, folytonosan positiv. Ha $\varepsilon_1 = \frac{\pi}{2}$, $g(\varepsilon_1) = 0$, de ez csak azon már megállapított eset, a midőn végtelen kis parabola ívet ír le a pont. Az alsó félkörre ez már a priori világos volt, nem úgy a felsőre, de a bizonyítás az egész körpályára áll.

Áttérhetünk ezek után az újra megszabadulás lehetőségének vizsgálatára. Az első parabolára térésnél döntő volt a h értékének megszorítása, melyet nyertünk az inga azonsúlyi*) helyzetéhez tartozó sebességből. Most az azonsúlyi helyzethez tartozó sebesség (w) meg van szorítva az előző feltételekből. Általában:

$$v^2 = w^2 - 2g(z + r).$$

Miután v egy értéke ismeretes nevezetesen $z = z_2$-nél, így w_6 meghatározható, még pedig a (19) tekintetbe vételével:

$$(22) \qquad w^2 = 2g\left[\frac{z_1}{2}\left(\frac{z_1 z_2 - 3 y_1 y_2}{r^2}\right)^2 + z_2 + r\right]$$

Irván $w^2 = 2gh'$, h' nem más, mint a zárjelezett kifejezés. Arra, hogy új áttérés lehetséges legyen, h'-ra is állani kell ugyanazon megszorításoknak, mint a melyeket h-ra megállapítottunk.

Az már előre bizonyos, hogy $h' > h$ nem lehet, mert ez azt tenné, hogy a pont mozgási energiája, minden recompenzáczió nélkül

---

*) Azonsúly, súlyazonság, helyes az egyensúly, súlyegyen szó helyett.

gyarapodott. Azért azon hosszadalmas vizsgálat, melyet a h—h' különbségre vonatkozólag Nouvel ur tesz*), nézetem szerint nem épen szükségképeni. Minthogy a tett megjegyzés szerint h-val h' is $< \frac{5}{2} r$, csupán arra keresünk feltételt, mikor lehet

$$h' \geqq r$$

Most (22)-ből válasszuk ki h'-et. Ha a $\frac{h'}{r} - 1$ különbséget az egyenlet egyik oldalára hozzuk, trigonometrikus összevonásokkal a következő alakhoz jutunk:

$$(23)\quad \frac{h'}{r} - 1 = \frac{1}{2} \sin \varepsilon_1 [4 \cos^4 2\varepsilon_1 + 8 \cos^3 2\varepsilon_1 - 8 \cos 2\varepsilon_1 - 1],$$

legyen rövidség okáért

$$f(\cos 2\varepsilon_1) = 4 \cos^4 2\varepsilon_1 + 8 \cos^3 2\varepsilon_1 - 8 \cos 2\varepsilon_1 - 1.$$

A kérdést az dönti el, hogy f az ε_1-el miként változik. Ezáltal meg lesz állapítva az is, hogy h' miként változik h-val, minthogy a h és ε_1 közötti reláczió (4)-ből (7) által ismeretes.

Midőn $f(\cos 2\varepsilon_1) = 0$, $h' = r$, tehát több áttérés nem lehetséges. Olyan érték pedig az $\varepsilon_1 = 0 \longrightarrow \varepsilon_1 = \frac{\pi}{2}$ intervallumban kettő van, melynél $f(\cos 2\varepsilon) = 0$. Ezen értékek közül az egyik 0 és $\frac{\pi}{4}$ a másik $\frac{\pi}{4}$ és $\frac{\pi}{2}$ között van. Még pedig első ízben jegyet vált f positivról negativra, második esetben negativról positivra. Mivel $f'(\cos 2\varepsilon_1)$ csak egyszer vált jegyet a mondott interwallumban, $f''(\cos 2\varepsilon_1)$ pedig jegyét megtartja, tehát $f(\cos 2\varepsilon_1)$-nek két és csakis két realis gyöke van az $\varepsilon_1 = 0 \longrightarrow \varepsilon_1 = \frac{\pi}{2}$ intervallumban. (Rolle tétele). Jelölje a két gyökhöz tartozó ε értékeket ϑ_1, η_1 akkor

$$0 < \eta_1 < \frac{\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{4} < \vartheta_1 < \frac{\pi}{2}$$

*) L. c. 14—17. old.

Ha $\varepsilon < \eta_1$, akkor $\frac{h'}{r} - 1$ külömbség positiv, mert $\sin \varepsilon_1$ folytonosan positiv. Ekkor még lehetséges áttérés. Ha

$$\eta_1 < \varepsilon_1 < \vartheta_1,$$

$f(\cos 2\varepsilon_1)$ negativ, áttérés több énem lehetséges. Ha pedig $\vartheta_1 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$, akkor a különbség újra positiv, áttérés újra lehetséges.

Megjegyzendő, hogy azon η szög, melynél v_2 jegyet vált η_1 és ϑ_1 között fekszik; következik ez onnan, hogy ezen η értékre áll

$$\frac{\pi}{6} < \eta < \frac{\pi}{4}, \quad \text{de ha } \varepsilon_1 = \frac{\pi}{6}$$

$f(\cos 2\varepsilon_1)$ már negativ, és annál nagyobb értékü negativ $\varepsilon = \eta$-nál.

Ha $0 < \varepsilon_1 < \eta_1$ akkor a pont még végtelen sokszor áttérhet parabolikus pályára. Még pedig, ha az első ε ezen két határ közé esett, az inga ε_1 által meghatározott z_1-nél leválik a körpályáról áttér parabolikus pályára, az áttérés után irányt változtat. Visszaleng egy bizonyos ε_1-ig, mely az első ε_1-nél kisebb, és ez ugy megy tovább, mert ha a harmadik, negyedik áttérésre vonatkozó h-t h″, h‴ ... jelöli a (23) ismételt alkalmazásával láthatólag:

$$h > h' > h'' > \ldots > r$$

Ha Nouvel szerint*) az $\varepsilon = 0 \longrightarrow \varepsilon = \eta_1$ terjedő körívet első övnek nevezzük, akkor áll a tétel:

Ha a z_1 az első övben feküdt, akkor a pont végtelen szokszor áttérhet parabolikus pályára, és pedig mindannyiszor lengési irányt változtatva.

Ha pedig $\eta_1 < \varepsilon_1 < \vartheta_1$, $\frac{h'}{r} - 1$ negativ lesz. A mozgó pont egyszer áttér parabolikus pályára, de azután visszatér a körpályára, még pedig irányváltozással, vagy anélkül, a szerint, a mint $\varepsilon_1 \lessgtr \eta$. Ezen szakaszt nevezzük második mellék-övnek. Innen a pont visszatérvén körpályára, ide-oda leng. Nevezzük (φ definitiója 44 old.) a

$$\varphi = o \longrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

*) I. h. 17. l.

szakaszt első mellék-övnek. Innen folyólag: Ha a második mellék-övből tért át a pont parabolikus pályára, egyszeri áttérés után az első mellékövben marad és ide-oda leng.

Ha $\varepsilon_1 > \vartheta_1$ az áttérések más viszonyt mutatnak.

Tegyük fel, hogy k-szor lehetséges a visszatérés, egy bizonyos ε_1-nél, akkor az egymásután következő h-kat következő egyenletsor köti össze:

$$(24)\quad \begin{cases} \dfrac{h}{r} - 1 = \dfrac{3}{2}\sin\varepsilon_1 \\ \dfrac{h'}{r} - 1 = \dfrac{1}{2}\sin\varepsilon_1\, f(\cos 2\varepsilon_1) = \dfrac{3}{2}\sin\varepsilon_2 \\ \dfrac{h''}{r} - 1 = \dfrac{1}{2}\sin\varepsilon_2 f(\cos 2\varepsilon_2), = \dfrac{3}{2}\sin\varepsilon_3 \\ \dotfill \\ \dfrac{h^{(k)}}{r} - 1 = \dfrac{1}{2}\sin\varepsilon_k\,.\, f(\cos\varepsilon_k) = \dfrac{3}{2}\sin\varepsilon_{k+1} \end{cases}$$

Megjegyzendő, hogy két egymásután következő ε_1-et összekötő egyenlet így írható:

$$(25)\qquad \sin\varepsilon_i = \frac{1}{3}\sin\varepsilon_{i-1}(3 - 64.\ \sin^2\varepsilon_{i-1}\cos^6\varepsilon_{i-1})$$

(24)-ben $\varepsilon_2, \varepsilon_3 \ldots \varepsilon_k$ jelölik ε-nak azon értékeit, melyekkel bir a másodszori, harmadszori ... k-adszori áttérésnél.

Vegyük közelebbi vizsgálat alá a (24) második egyenletét, miután a mit erre nézve megállapítottunk lesz, ép ugy következtethető továbbra is. A míg ε $0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$-ig változik, f kétszer zérus, positivból negativ és újra positiv lesz. Azonban az egyenlet jobb oldalán az első faktor folyton positiv és $0 \longrightarrow 1$-ig nő. A $\sin\varepsilon_2$ egyértelmüleg határozott minden ε_1-nél. $\varepsilon_2 = 0$, ha

$$\varepsilon_1 = \begin{cases} \eta_1 \\ \vartheta_1 \end{cases}$$

minden más esetben különböző ε_1-oknak különböző ε_2-k felelnek meg. Ha a $\varepsilon_2 = \eta_1$, vagy $\varepsilon_2 = \vartheta_1$ akkor írván $\sin\eta_1 = n$, $\sin\vartheta_1 = m$, látni való, hogy $n < m$, és ε_1 számára való két egyenletünk, melyből ε_1 az m és n-hez tartozó értéket nyeri.

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{3}\sin \varepsilon_1 f(\cos 2\varepsilon_1) &= m \\ \frac{1}{3}\sin \varepsilon_1 f(\cos 2\varepsilon_1) &= n \end{aligned}\right\}$$

Az elsőből meghatározott ε_1-nek értékét jelölje η_2, a másodikból eredőét ϑ_2. Világos, hogy $\vartheta_2 > \eta_2$. Mert $\varepsilon_1 > \vartheta_1$ feltevés miatt $\eta_2 > \vartheta_1$ és ϑ_1-en túl a baloldal folyvást positiv marad és növekvő ε_1-el nő.

Végtelen sok áttérést kaphatunk, ε_1-et úgy kell választva, hogy $\vartheta_1 < \varepsilon_1 < \eta_2$ legyen. Ugyanis ha $\vartheta_1 < \varepsilon_1 < \eta_2$, akkor ε_2-re nézve áll

$$0 < \varepsilon_2 < \eta_1 .$$

Mert ha $\varepsilon_1 = \vartheta_1$, $\varepsilon_2 = 0$ ha $\varepsilon_1 = \eta_2$, $\varepsilon_2 = \eta_1$. Nevezzük a $\vartheta_1 \longrightarrow \eta_2$ szakaszt második övnek. Akkor áll a tétel: ha a második övbe esett z_1, egyszeri parabolára térés után első övbe jut a pont, melyben megmarad: végtelen sokszor áttérve és irányt változtatva.

Az $\eta_2 \longrightarrow \vartheta_2$ szakaszt harmadik mellék-övnek nevezzük. Ha $\eta_2 < \varepsilon_1 < \vartheta_2$, akkor $\eta_1 < \varepsilon_2 < \vartheta_1$, honnan következik: a harmadik mellék-övből egyszeri áttérés után a második mellék-övbe ér a pont, honnan még egyszeri áttéréssel (irányt változtatva, vagy nem) az első mellék-övbe tér, melyben megmarad és ide-oda leng.

Az világos, hogy ha egyszer valamely öv határán volt a pont, a következő áttéréseknél is mindig határpontokhoz jut.

Így folytatható a mozgás vizsgálata tovább, de a továbbvitel az eddigiek után felesleges, mert nem kell más tenni, mint az f függvényt iterálni.

Az övek és mellék-övek a mondottak szerint így következnek:

I. M. Ö., I. Ö., II. M. Ö., II. Ö., III. M. Ö., III. Ö. . . . .

Látható, hogy minden övet két mellékköv vesz közre. Azt is könnyü észre venni, hogy a mellékövek összege nagyobb, mint az öveké, mert az első mellékköv egyedül akkora, mint a többi fő- és mellékköv együtt véve. Az övek száma elméletileg határtalan, de mivel f minden ε értéknél $0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$ között véges, kell hogy az övek és mellékövek $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$-felé összezsúfolódjanak. *)

Ha tehát valamely súlyos pont hajlítható súlytalan fonalon mozog, megállapítjuk a hozzá tartozó h azután ε_1 illetve ezáltal z_1 értéket.

Az öveket ε_1 helyett z_1-re számitva mely ε_1 által teljesen adva van, következő eseteket különböztetjük meg:

1. $z_1 > r$. Ekkor a pont folyton-folyvást körön mozog, és egy meghatározott pontba mindig ugyanazon gyorsasággal ér.

2. z_1 a $\varkappa$-ik övben fekszik. Ezen esetben a pont ($\varkappa$—1)-szeri áttérés után a $\varkappa$—1, k—2 . . . .-ik övön keresztűl az első övbe jút, melyben megmarad és végetlen sokszor áttér, mindannyiszor irányt változtatva.

3. z_1 a $\varkappa$-ik mellék-övben fekszik. Ekkor a pont ($\varkappa$—2)-szeri áttérés után még egy áttéréssel vagy irányt változtatva vagy nem, az első mellékövbe jút, melyben megmarad és ide-tova leng.

4. z_1 határ-érték a $\varkappa$-ik, vagy $\varkappa + 1$-ik mellék- és a $\varkappa$-ik fő-öv között. Akkor ($\varkappa$—1), illetve $\varkappa$ áttérés után az összes kisebb határértékeken át az y tengelyhez ér a pont, melyet azután minden ide-oda lengésnél érint az inga-szál.

III.

Áttérek a három dimenziós térben való mozgás esetére. Megtartván az előbb használt jelöléseket s a harmadik coordinátát x-szel jelölvén, mozgási egyenleteink

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = \left(gz - \left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2\right)\dfrac{x}{r^2}, \quad \dfrac{d^2y}{dt^2} = \left(gz - \left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2\right)\dfrac{y}{r^2}, \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = \left(gz - \left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2\right)\dfrac{z}{r^2} - g, \end{cases}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

*) Lásd Nouvel 18—19. l.

A megszabadulás feltétele, illetőleg a sebesség általános kifejezése a következő:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = gz$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = b - 2gz$$

A b constansot más módon kell meghatároznunk, mint a síkban. Itt ugyanis z-nek legkisebb értéke nem $-r$, mert ha egyszer $-r$ volt, akkor már állandóan síkban leng a pont. Általánosabban jelöljük z minimális értékét $-c$-vel. Akkor hasonló eljárást követve, mint a síkban mozgás esetén:

ha $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2_{z=-c} = 2gh$ íratik, és z_1 a megszabadúlás z-jét jelöli.

$$(2) \qquad z_1 = \frac{2}{3}(h-c)$$

Tényleg bekövetkezik a megszabadulás, ha a $z = -c \longrightarrow z = z_1$ érték intervallumban minden z-hez reális x, y, [ez (1) utolsó egyenletéből láthatólag bekövetkezik, mihelyt

$$o < z_1 < r]$$

és egyszersmind reális t, illetőleg $\frac{dz}{dt}$ tartozik.

A z, r, t között fennálló egyenlet

$$(3) \qquad r^2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2g(r^2-z^2)(h-c-z) - a^2$$

Azonban a^2 constans nem tetszőleges; $z = -c$ minimumnál $\frac{dz}{dt} = o$ megszabja. A c—t nem a $\frac{dz}{dt} = o$ egyenletből, (mely z-ben harmadfokú) meghatározva gondoljuk, hanem adottnak tekintjük. Ezek szerint

$$(4) \qquad a^2 = 2gh(r^2-c^2)$$

Legyen ρ_0 a pont távola a z tengelytől, s a mikor $z = -c$, w_0 ugyanezen ponthoz tartozó szögsebesség, azaz

$$\rho^2_0 = r^2 - c^2, \quad w_0 = \frac{\sqrt{2gh}}{\rho_0}, \text{ úgy}$$

$$a = w_0 \rho_0^2.$$

Hátra van megvizsgálni c minő értéket vehet föl, hogy t, illetőleg $\frac{dz}{dt}$ valós maradhasson.

Irjuk rövidítésképen

$$F(z) = (r^2 - z^2)(h - c - z) - h(r^2 - c^2).$$

A (3) és (4) szerint ez tartozik positiv lenni.

A jobb oldal egyik raczionalis faktora $c + z_1$ mert feltevésünk szerint $z = -c$ az F-nek gyöke. Még pedig, ha

$$f(z) = z^2 - r^2 + (c - z)h,$$

akkor:

$$F(z) = (c + z) f(z).$$

Az első faktor positiv, mert z legkisebb értéke mellett zérus és aztán folyvást nő. Hogy a második faktor positiv maradhasson, szükséges, hogy

$$(5) \qquad c > z_1$$

legyen. Mert a két első tagnak mindig negativ érték felel meg. Ez a körülmény egyszersmind h—t is megszorítja, nevezetesen ennek révén a 2) egyenletből következik

$$(5)' \qquad h < \frac{5}{2} c.$$

Az f funkcziónak minimuma van, mikor $z = \frac{h}{2}$, azonban ezen értéket z_1 nem érheti el, mert 2)-ből következnék $h = 4c$, a mi (5)-tel ellenmondásban van. Mivel f folyton fogy, mikor z a $z = -c$ ⟶

$z = z_1$-ig nő, nyilvánvaló, hogy ha egy bizonyos c $z = z_1$-nél f—t positivvá teszi, akkor már $z = -c$-nél is positiv lesz.

Irjuk $h = kc$. Akkor (2) így alakúl:

$$z_1 = \frac{2}{3}(k-1)\,c$$

De I-ből kifolyólag $z_1 \geqq o$, tehát $k \geqq 1$. Ezt a megszorítást (5')-tel egybevetve

$$(6) \qquad 1 \leqq k < \frac{5}{2}$$

$c-l$ is a hozzá tartozó megszorítások alá vetjük, ha $F(z_1) \geqq o$ egyenlőtlenségnek megfelelőleg

$$c > \frac{3r}{\sqrt{(1+2k)(4-k)}}$$

tesszük, hol r faktora < 1 és tekintetbe vesszük, hogy a probléma alap-feltevéseinél fogva $c < r$ úgy, hogy

$$(7) \qquad r > c > \frac{3r}{\sqrt{(1+2k)(4-k)}}.$$

6) és 7) együtt a probléma lehetőségének szükséges és elégséges föltételei.

Legközelebbi feladatunk: a mozgó pont coordinátáinak, mint az idő funkczióinak kifejezése. Ha a formulákban $z = z_1$, $t = t_1$ írjuk, kinyerjük a megszabadúláshoz tartozó coordinátákat.

Már általánosabban ismeretes z mint elliptikus funkcziója t-nak, még pedig (3)-ból folyólag:

$$(8) \qquad z = \nu\, \mathrm{sn}^2\,(\mu t) - c,$$

hol ν, μ az integrál normál alakra hozásánál fellépő constansok, melyek ha kivánatos, könnyen felírhatók az adott constansokkal kifejezve.

Egyszerűség okáért czélszerű poláris coordináták r, φ, ψ bevezetése:

$$(9) \quad x = r \sin\varphi \cos\psi, \quad y = r \sin\varphi \sin\psi, \quad z = -r\cos\varphi.$$

φ a (8) alatti egyenlettel z értékéből közvetetlenűl meg van határozva. A ψ szögre vonatkozólag az általános elmélet a következő alakot adja :

$$\psi = a \int_0^t \frac{dt}{r^2 - z^2}$$

hol a a (4) által van értelmezve. Beirván ide z kifejezését, redukcziók után ψ mint két harmadik fajú elliptikus integrális összege állítható elő. [1]) Így mindenik coordináta elő van állítva, mint t funkcziója. A megszabaduláshoz tartozók pedig :

$$(10) \quad z_1 = \frac{2}{3}(k-1)c, \quad y_1 = \sqrt{r^2 - z_1{}^2} . \sin\psi_1, \quad x_1 = \sqrt{r^2 - z_1{}^2} . \cos\psi_1$$

hol a négyzet gyök positiv jellel veendő. A megszabadulás pillanatától kezdve a pont szabadon fog esni, tehát parabolát ir le. A mozgási egyenletek ennélfogva :

$$(11) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -g .$$

Honnan kétszeri integráczióval :

$$(12) \qquad x' = A\theta + A', \quad y' = B\theta + B', \quad z' = -\frac{g}{2}\theta^2 + C\theta + C'$$

hol θ a $t = t_1$ pillanattól számított időt jelenti. Azon megfontoláshoz folyamodunk, hogy az áttérés pillanatában a parabolán mozgás kezdő sebességi componensei összeesssenek a gömbi mozgás végső sebességi componenseivel. A sebességi componensek kiszámítására szolgáló egyenletek

$$(13) \left\{ \begin{aligned} & x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt} = 0 \\ & x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = a \\ & r^2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = -2g(c+z)(z^2 + (c-z)h - r^2) \end{aligned} \right.$$

---

[1]) A szférikus inga mozgása részletesen van tárgyalva : Durége, Elliptische Functionen 307. és köv.

A két elsőből

$$(13)' \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\left[\dfrac{zx}{r^2 - z^4} \dfrac{dz}{dt} + \dfrac{ay}{r^2 - z^2}\right], \\ \dfrac{dy}{dt} = -\left[\dfrac{zy}{r^2 - z^2} \dfrac{dz}{dt} + \dfrac{ax}{r^2 - z^2}\right]. \end{cases}$$

Jelölje ezen componenseket a $t = t_1$ időben, v'_z, v'_x, v'_y. Akkor a (12) alatti egyenletek így irhatók:

$$(12)' \quad x' = v'_x \theta + x_1, \quad y' = v'_y \theta + y_1, \quad z' = -\frac{g}{2}\theta^2 + v'_z \theta + z_1.$$

A gömbre visszatérés idejét azon módon számíthatjuk ki, mint a síkra nézve. Az eredmény, θ_1-el jelezvén a visszatérés időpontját:

$$\theta_1 = 4 \frac{v'_z}{g}.$$

Tehát a visszatérés pontjának helyhatározói

$$(14) \quad x_2 = x_1 + 4 \frac{v'_x v'_z}{g}, \; y_2 = y_1 + 4 \frac{v'_y v'_z}{g} \quad z_2 = z_1 - 4 \frac{v'^{\,2}_z}{g}$$

A teljes sebesség irány-cosinusai a gömbre való visszatéréskor az (x_2, y_2, z_2) pontban

$$(15) \frac{v'_x}{\sqrt{v'^{\,2}_x + v'^{\,2}_y + 9v'^{\,2}_z}} \quad \frac{v'_y}{\sqrt{v'^{\,2}_x + v'^{\,2}_y + 9v'^{\,2}_z}} \quad \frac{-3v'_z}{\sqrt{v'^{\,2}_x + v'^{\,2}_y + 9v'^{\,2}_z}}.$$

Azonban nem ez lesz a továbbmozgás sebessége, hanem úgy definiálunk, hogy az a componens, a mely a gömb érintő síkjába esík.

Az (x_2, y_2, z_2) ponthoz tartozó érintő sík:

$$xx_2 + yy_2 + zz_2 - r^2 \equiv 0.$$

Azon irányi componenst kell kiszámitanunk, mely a parabola síkja és ezen érintő sík metszése által van meghatározva. Ha α', β', γ' ennek irány-cosinusait jelölik, az analitikai geometria ismert formulái segélyével találjuk:

$$(16) \begin{cases} \alpha' = \lambda\left[(v'_x z_2 + 3 v'_z x_2) z_2 - (v'_y x_2 - v'_x y_2) y_2\right] \\ \beta' = \lambda\left[(v'_y x_2 - v'_x y_2) x_2 + (3 v'_z y_2 + v'_y z_2) z_2\right] \\ \gamma' = \lambda\left[-(3 v'_z y_2 + v'_y z_2) y_2 - (v'_x z_2 + 3 v'_z x_2) x_2\right] \end{cases}$$

Itt λ egy constans faktor, mely az által van meghatározva, hogy mind a jobb, mind a baloldalok négyzeteinek összege az egységgel egyenlő. A sebességet (v_2), melylyel az inga útját a gömbön tényleg folytatja, kinyerjük, ha az (x_2 y_2 z_2) pontbeli teljes sebességnek (α', β', γ') irányi componensét képezzük:

$$(17) \qquad v_2 = v'_x \alpha' + 2'_y \beta' - 3 v'_z \gamma'$$

Meglehetős complikált kifejezéshez jutnánk, ha α', β', γ', v'_x v'_y, v'_z kifejtett alakjait beirnók, úgy, hogy következtetések kihuzására kevéssé volna alkalmatos. Hozzájárul a complikáltsághoz az, hogy x_2, y_2, z_2-vel bejutnak x_1, y_1, z_1, ezekkel meg elliptikus funkcziók combinátiói trigometriai függvényjelek mögött. Látható tehát, hogy mekkora analitikai nehézségbe ütköznék a tárgyalás véghez vitele olyan formán, mint az a síkban történt.

Egyszerüen utalni akarok csak azon módra, melylyel a numerikus számítás eldöntheti, vajjon egy adott c mellett történhetik-e még egyáltalában visszatérés, vagy nem?

A gömbre érkezés után állanak a szférikus mozgás egyenletei. Ha a mozgás constansait vonásos betükkel különböztetjük meg:

$$(18) \qquad r^2 \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = (r^2 - z^2)(b' - 2gz) - a'^2$$

Feladatunk: a constansokat a már ismert constansok segélyével kifejezni. A (16), (14) stb. által az új gömbi mozgás kezdő sebességét (v_2) az x_2, y_2, z_2 pontban meghatározottnak tekintsük. Ha az általános sebességet v jelöli

$$(19) \qquad v^2 = b' - 2gz$$

lévén, $z = z_2$ irtával nyerjük:

$$b' = v_2{}^2 + 2gz_2.$$

Ezen értéket irjuk be (18)-ba, melyet most z_2-re vonatkoztassunk. Megfontolva, hogy:

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2_{z = z_2} = (\gamma' v_2)^2$$

$$(20) \qquad a'^2 = v^2_2 (r^2 - \gamma'^2 r^2 - z^2_2)$$

Most a'^2 és b' értékeket irjuk be z minimumára vonatkoztatott $\left(\frac{dz}{dt} = o\right)$ után (18)-ba ; kapunk egy harmadfokú kifejezést, melyben a z változón kivűl csupa ismeretes mennyiségek fordúlnak elő. Ennek mindig van egy negativ gyöke, a melyik z minimumának felel meg. Számítsuk ki az új c'—t, és hasonlítsuk össze a (7) alatti alapföltétellel. Megállapítandók, hogy bír-e értelemmel a problema tovább vitele, szükséges h'-t kiszámítni. Ezen czélra megjegyezzük, hogy b' constans még írható

$$b' = v_0{}^2 - 2gc'$$

alakban is, hol v_0 a $-c'$ ponthoz tartozó sebesség. De megfelelőleg, mint az első áttérésnél $v_0{}^2 = 2gh'$ írva, tekintetbe véve (19)-t, h' kifejezhető így:

$$h' = \frac{r}{2g}(v'_x\,\alpha' + v'_y\,\beta' - 3v'_z\,\gamma')^2 + z_1 + c' \tag{21}$$

Hogy c'-nak a (7) feltételt kielégítő értékei mellett áttérés jöhessen létre, szükséges, hogy

$$h' = k'c', \quad 1 \leqq k' < \frac{5}{2}$$

legyen. Azon esetben, ha z_2 positiv, (21)-ből folyólag a tett feltevések mellett, mindig lehetséges még áttérés. A h' mindenesetre kisebb, mint h, mert a pont mozgási energiája a gömbre térésnél veszített,

Minden további visszatérésnél hasonló vizsgálat ismerteti velünk meg a mozgást. Nouvel úr az első részben idézett értekezésének elején kijelenti, hogy ő kidolgozta ezen részét is az elméletnek, de közlését más alkalomra igéri. Azonban mindeddig nincs tudomásom róla, hogy értekezésének ezen része is publicálva volna.