

Vincze István

∴ Belgrádi Csillagvizsgáló Intézet
 ∴ ivince@aob.rs

A JEL–ZAJ ARÁNY KÉRDÉSE A MODERN CSILLAGÁSZATI FOTOMETRIÁBAN

*The Question of the Sign–Noise Proportion
 in Modern Astronomical Photometry*

A cikk röviden összefoglalja a jel–zaj arány meghatározásában felmerülő kérdéseket és megoldásokat a modern csillagászati fotometriában.

Kulcsszavak: csillagászati fotometria, CCD-detektor, jel, zaj

1. BEVEZETŐ

Attól a néhány esettől eltekintve, amikor a naprendszerhez tartozó égitestekre szondákat tudunk küldeni, és közvetlen méréseket végezhetünk rajtuk, a csillagászatban az égitestekről csak a hozzánk érkező részecskék detektálásával, az általuk hordozott információ értelmezésével szerezhetünk adatokat. A megfigyelés útján szerzett adataink kiértékelése nagyban függ attól, hogy mennyi bennük az értékes információt hordozó jel és a berendezésekben elkerülhetetlenül jelen lévő – a jeleket elhomályosító – zaj aránya. Méréseink minőségét ennek a S/N (signal-to-noise) arálynak a megadásával jellemezhetjük tömören, és mivel a csillagászatban észlelhető jeleink általában nagyon kicsik, a méréseknél a zaj csökkentése alapvető feladatunk.

A csillagászok a legfontosabb információhordozó, az elektromágneses sugárzás, azaz a fotonok (fénykvantumok), a neutrínók és más kozmikus részecskék, továbbá a gravitációs hullámok megfigyelésére óriási erőfeszítést tesznek. A fotonok összegyűjtésére – Galilei óta – távcsöveket használunk, amelyekkel szemben egyik alapvető elvárásunk, hogy minél több foton gyűjtsenek össze. Ezt úgy érhetjük el, ha növeljük a távcső objektívjének (főlcse vagy főtükör) átmérőjét.

A csillagászati megfigyelés történelme során a fotonok detektálására, pontosabban a hozzánk egységnyi idő alatt, egységnyi felületre érkező fotonok számának meghatározására (fotometria), a csillagászati megfigyelés történelme során kezdetben a szem volt a detektor, majd a fényérzékeny emulziók felfedezésével a fotólemez alkalmazták. A fotoelektromos jelenség felfedezésével újabb, a

szemnél és a fotoemulziónál is érzékenyebb detektorra tett szert a csillagászati fotometria. Ennek egyedüli komoly hátránya az volt, hogy egyszerre csak egy objektum mérésére volt alkalmas. A fotoelektromos detektoroknak ezt a hátrányát a múlt század utolsó két évtizedében a CCD-detektor kiküszöbölte.

2. A CCD-DETEKTOR

A CCD (Charge Coupled Device, azaz „töltés-csatolt-eszköz”) olyan félvezető detektor, amely nagyszámú (10^6 nagyságrendű), szorosan egymás mellett elhelyezkedő, kis méretű (10 mikrométer körüli) fényérzékeny négyyszögek rendszere (1. ábra: mellékletben). Ennek minden elemében a ráeső fotonok számával arányos számú elektron kerül „szabad” állapotba. Az így keletkezett elektronok mennyisége elektronikusan könnyen kiolvasható.

A CCD-detektor a fotólemez két fontos tulajdonságát, a 2-dimenziót és az időbeli integrálást egyesítette a fotoelektromos detektor érzékenységgel, és ezzel lett a modern csillagászati mérés technika egyik alapvető, ma már majdnem kizárólagos detektora.

3. A JEL–ZAJ ARÁNY

A mérések minőségét a jel–zaj aránnyal (viszonnal) lehet mennyiségileg értékelni, a jel–zaj arány (vagy az általánosan használt S/N [signal-to-noise] érték) tehát a mért mennyiség mellett a mérési eredmény egyik legfontosabb jellemzője.

A jel–zaj arány, használati területétől függően, különbözőképpen definiálható. Nagy általánosságban talán a következő definíciót lehetne elfogadni: a jel–zaj arány (JZA) a jel teljesítményének (P_J) és a háttérzaj teljesítményének (P_Z) hányadosa, azaz képletben leírva:

$$JZA = \frac{P_J}{P_Z}.$$

Mivel e cikk a fotonok által kiváltott jellel foglalkozik, a JZA-t ennek megfelelően definiáljuk. Ebben az esetben jelként a mért objektumról a detektorra eső fotonok átlagos számát (μ), zajként viszont ennek a középérték körüli szórását (σ) vehetjük:

$$JZA = \frac{\mu}{\sigma}.$$

Aláhúzendó, hogy ezt a meghatározást csak abban az esetben lehet alkalmazni, amikor a jelnek csak pozitív értékei vannak (pl. a fotonok száma, fény fluxusa stb.). Mivel a csillagászati fotometriában a fotonok hozzák léte a jelet, a továbbiakban ezt a definíciót alkalmazzuk.

3.1. A JEL-ZAJ ARÁNY A CCD FOTOMETRIÁBAN

Nyilvánvaló, hogy a jel-zaj arány meghatározásához ismernünk kell a jel és a zaj értékét is. Ezek meghatározása azonban nem egyszerű feladat, mivel a mért mennyiség nemcsak a hasznos jelet tartalmazza, hanem a különböző hibákat is, amelyek lehetnek szisztematikusak és véletlenek. A szisztematikus hibák a számlálóra hatnak, a véletlen hibák pedig a zaj értékét, azaz a nevezőt határozzák meg. A számlálóban a tiszta, rendszeres hibáktól mentes jel értéke szerepel, tehát a mért jelet meg kell szabadítani a szisztematikus hibáktól; a véletlenszerű hibák értékét megbecsülve kaphatjuk meg a nevezőt.

A CCD-vel végzett méréseknél két, jól elkülöníthető, szisztematikus hibáról beszélhetünk. Az egyik a megfigyelt égitest irányából érkező, de nem a hozzá tartozó fotonoktól származik, ez az objektumból érkező sugárzás nélkül is megjelenne a detektoron („háttér”). A „háttér” több összetevőből áll. Például más égitestekről származó és légkörünkben szórt fotonokból (Holdról érkező szórt fény), vagy a naprendszerünkben található porszemeken szórt napfényből stb. A másik szisztematikus hiba, amelyet nem a fotonok váltanak ki, magában a CCD-ben keletkezik.

Először foglalkozunk azokkal a hibákkal, amelyek a mérőműszertől, azaz esetünkben a CCD-detektortól származnak. Kezdjük a CCD-től származó szisztematikus hibákkal. Már említettük, hogy a CCD-detektor nem más, mint szoroson egymás mellé helyezett, apró detektorok (képelemek, pixelek) egy-, vagy kétdimenziós sorozata. Ezek összessége alkotja magát a CCD-detektort vagy -kamerát. Minden egyes kis detektort önálló mérőműszerként foghatunk fel, habár ezek a kis detektorelemek nem teljesen függetlenek egymástól.

A pixelek kollektív szerepe majdnem minden csillagászati megfigyelésnél kifejezésre jut. Ez igaz a csillagászati fotometriára is, melynél még a pontszerű fényforrások fotometriai méréseit is több pixel igénybevételével lehet csak elvégezni. Ez megköveteli a pixelek mint önálló mérőműszerek összehangolt működését és kalibrálását, de most csak egy pixelnek mint fotometriai mérőműszernek a tulajdonságait fogjuk röviden áttekinteni.

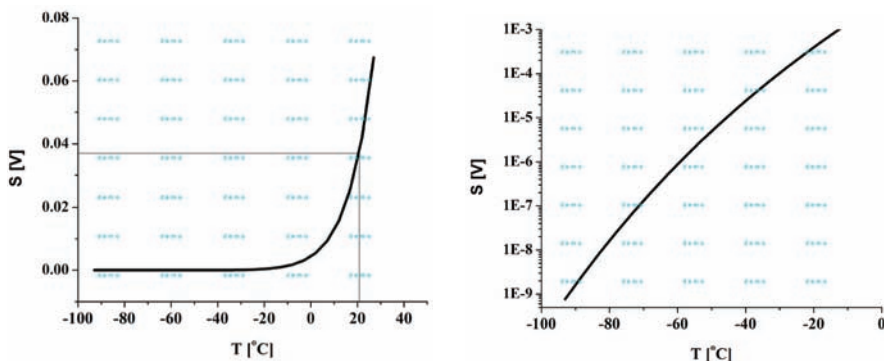
A fotonok hatásának kitett pixelben elektromos töltés halmozódik fel, mégpedig a fotonok fluxusával arányos mennyiségben. Ideális esetben, lemérve az egységnyi idő alatt felhalmozott elektromos töltés mennyiségét, a fotonok fluxusa meghatározható, ha ismerjük az arányossági tényezőt. A gyakorlatban azonban a mérés több zavaró hatásnak van kitéve, ami szisztematikus és véletlenszerű hibát visz be a mért eredménybe.

Egyik fontos hibaforrás a „sötétáram”. A sötétáram olyan elektronoktól származik, amelyek a hőmozgás hatására keletkeznek a detektorban. Minél magasabb a hőmérséklet, annál több ilyen elektron keletkezik, és elméletileg ezek hőmérséklettől való függését a következő képlettel lehet kifejezni:

$$D = C \cdot T^a e^{\frac{-V_g \cdot q}{2 \cdot kT}}$$

A képletben szereplő C állandó mennyiséget jelent, ennek értéke a jel (D) mértékegységétől függ. Az a kitevő, a képlet levezetéséhez használt elmélettől függően, különböző, de 1.5 körüli értéket vesz fel; a V_g a chip anyagára jellemző elektromos potenciál (1eV nagyságrendű), a q az elektron elektromos töltése ($\approx 1.6 \cdot 10^{-19} \text{C}$), a k pedig a Stefan–Boltzmann állandó ($1.38 \cdot 10^{-23} \text{J/K}$). Ha a sötétáramot voltban mérjük, akkor a C értéke $3.36 \cdot 10^6$.

$V_g = 1.36 \text{ V}$ és $a = 1.5$ tipikus értékek esetén bekövetkező eredményt a 2. ábrán látható két grafikon mutatja. Szembeötlő, hogy a hőmérséklet csökkenésével a sötétáram értéke nagyon gyorsan csökken. Pl. $20 \text{ }^\circ\text{C}$ értéke $\approx 4 \cdot 10^{-2} \text{ V}$ (lásd a 2. ábra bal grafikonját), de már $-40 \text{ }^\circ\text{C}$ értéke $\approx 2 \cdot 10^{-5} \text{ V}$ -ra esik le (lásd a 2. ábra jobb grafikonját). Nyilvánvaló tehát, hogy a sötétáram csökkentése érdekében a pixeleket le kell hűteni. A csillagászati gyakorlatban ezt alkalmazzák is, hiszen, pl. $-40 \text{ }^\circ\text{C}$ hőmérsékletű pixel kb. 200-szor kevesebb elektront termel másodpercenként, mint szobahőmérsékleten.



2. ábra. A sötétáram függése a hőmérséklettől

A sötétáram által létrehozott jel nagysága arányos az integrációs (expozíciós) idővel (t):

$$D = \left(C_1 \cdot T^a e^{\frac{-V_g \cdot q}{2 \cdot kT}} \right) \cdot t + C_2.$$

A C_2 egy konstans mennyiség (nagyságrendje 10^{-2} V), amely a pixelben levő jel értéke a mérés megkezdésének pillanatában ($t = 0$), és független a hőmérséklettől. A fenti összefüggésből látható, hogy a fotonok által létrehozott jelhez az integrálás ideje alatt hozzáadódik a pixel hőmérsékletétől és az expozíciós időtől függő, nem kívánt komponens is.

Nyilvánvaló, hogy a fotonoktól származó jelet (S^*) úgy kapjuk meg, hogy a mért jelből (S) levonjuk a sötétáramból származó jelet (D):

$$S^* = S - D.$$

Ehhez természetesen meg kell határozni a sötétáram értékét úgy, hogy változatlan hőmérséklet mellett, a fotonok hatását kizárva, ugyanazzal az integrációs idővel megismételjük a mérést. Hozzá kell tenni, hogy a sötétáram így kapott értéke – a mérés véletlen hibája miatt – nem egyenlő azzal az értékkel, amely a fotonok mérésénél ténylegesen volt. A véletlen hibát a mérés megismétlésével lehet csökkenteni, ezért ha lehetséges, a sötétáram mérését többször is meg kell ismételni, és a középértékét kell számításba venni a kiértékelésnél.

A fotometriában azzal a problémával is szembe kell nézni, hogy a megfigyelt égitest képe a CCD-chipen nemcsak egy pixelre esik, még akkor sem, ha a fényforrás pontszerű, mint pl. a csillagok esetében. Tehát a fluxust több pixelben összegyűjtött jel összegeként kapjuk meg, azaz a mérést egy időben több detektor végzi, amelyeknek egyenként megvan a saját sötétáram-egyenlete, a saját paramétereivel (a , V_g , C_2), amelyeknek pixelenként nem ugyanaz az értékük. Ez jól látható a 3. ábrán (1. melléklet), amelyen egy chip sötétáramképének kicsi részéről (5×25 pixel) készült grafikonon a pixelekben mért jelek értékei vannak feltüntetve.

Amint a képről is látható, a legtöbb pixel értéke 105–110 körüli, de vannak ettől eltérő pixelértékek is, amelyek jóval az átlag fölé emelkednek. Ezeket a pixeleket nevezik forró („hot”) pixeleknek. A forró pixelek nem hatnak a mért eredményre, mert redukciókor ugyanúgy, mint a többi pixel sötétárama is, a jelből le lesz vonva. Természetesen, az ezekre való helyes korrekció nélkül az adataink szisztematikus hibája nagy lenne, ami torzítaná mérésünket.

A fentiek alapján azt is mondhatjuk, hogy egy CCD-chip egy időben, kollektíven, többszörös mérőműszerként működik, és a sötétáram helyett a csillagászok inkább sötétképről („dark frame”) beszélnek.

3.2. FLAT FIELD KÉPEK

Mint már említettük, az egyes pixeleket önálló mérőműszerként lehet fel-felgöngyöztetni, amelyek a rájuk eső fotonok számával (N) arányos jelet (S) mutatnak:

$$S = k \cdot N + C$$

A k arányossági tényező a mérőműszer érzékenységet, a C pedig a nulláját adja meg, vagyis azt a jelet, amely akkor keletkezik, amikor a beeső fotonok száma egyenlő nullával. A k és a C konstansok pixeltől pixelre változnak. A redukció folyamán ezeket a változásokat ki kell küszöbölni. A C -t a sötétképek

segítségével levonjuk a mérésből. A k értékeit pedig minden pixelre kiegyenlítjük az ún. „flat field” segítségével.

A „flat field” képek úgy készülnek, hogy a chipet egyenletesen megvilágítjuk, amihez vagy a még elég fényes égről készítünk felvételt, vagy egy egyenletesen kivilágított ernyőről. Ilyenkor elvben minden pixelre azonos számú foton esik, és a pixelben a mért jel az érzékenységgel lesz arányos. Tehát a redukció folyamán a pixelek érzékenységét egyszerűen úgy lehet kiegyenlíteni, hogy a mérendő képet elosztjuk a „flat field” képpel, pontosabban annak átlagával osztott hányadosával. (Ha minden pixel érzékenysége azonos lenne, akkor ez 1 lenne minden pixelre, a gyakorlatban pedig 1 körüli értékek lesznek, így a mérések skáláját nem módosítjuk nagyságrendileg.)

A gyakorlatban az egyenletesen megvilágított ernyőről készült képeken lehet olyan statisztikát elérni, amely megfelel céljainkra, ezért ezzel kalibráljuk a méréseinket. A „flat field” mérésekben nem csupán a pixelek érzékenységének különbségét mérjük, hanem minden olyan hibát, amely a távcsövön áthaladó fény fluxusát megváltoztatja, mint például a CCD-kamera védőablakára ráakódott porszemek, vagy a színszűrőkre rakódott porszemcsék.

A távcsőben és az optikai elemeken szóródott fények torzító hatására azonban hamis „flat” értékek keletkeznek, ezeket ki kell küszöbölni a rendszerből, mert egyébként szisztematikus hibákat hozunk be mesterségesen a korrekciók során.

3.3. ZÉRÓ (BIAS) KÉPEK

A méréseknél a detektoraink nulla szintjének meghatározása alapvető, így a CCD-nél is. Ezeknek az értékeit nevezzük „bias frame”-nek, vagy magyarul „zérókép”-nek, és a redukció során minden frame-ből le kell vonnunk a zéróképet, így a többi kalibrációs mérésből is. Természetesen figyelembe kell venni, hogy a zérókép is mérés eredménye, azaz mérésről mérésre véletlenszerűen változó értékeket vesz fel, így a zérókép értékeinek pontosabb meghatározásához több kép középértékét kell igénybe venni.

4. A CCD FOTOMETRIAI MEGFIGYELÉS REDUKCIÓJA

A megfigyelésből kapott CCD-képek pixeljeinek jelét a redukció folyamán meg kell szabadítani a szisztematikus hibáktól, majd összegezve a mérendő égitest képével letakart pixelekből mért jeleket $S(i,j,t)$, megkapjuk az égitest megfigyelt jelét $S(t)$:

$$S(t) = \sum_{i,j} S(i, j, t).$$

A megfigyelt jel egységnyi időre redukált értékéből (S) az égitestről származó jelet (S^*) úgy kapjuk meg, hogy az egységnyi időre redukált háttérből származó jelet (B) levonjuk az égítést megfigyelt jeléből (S):

$$S^* = S - B.$$

A háttér nem más, mint az a jel, amelyet az égítést irányából kapnánk, ha az égítést nem lenne ott. A gyakorlatban azonban ennek a jelnek a meghatározása nehézségekbe ütközik, hiszen az égítést irányából származó háttér jelet (B) nem tudjuk lemérni, mert összekeveredik a mérendő égítéstől származó jellel. A problémát általában úgy oldják meg, hogy a megfigyelt égítéstet környező égbolt sugárzását mérik le, amely ugyanakkora térszögből érkezik hozzánk, mint amilyen térszög alatt látjuk a mérendő égítéstet. Ennek az eljárásnak helyessége azon a feltevésen alapszik, hogy a háttér a megfigyelt égítést irányában egyenlő az őt környező háttérrel, azaz semmiképpen ne legyen ott másik égítést. Ezt általában nehéz teljesíteni.

Ezzel az eljárással megkapjuk az égítéstől származó jelet, azaz a jel-zaj arányának számlálóját. Az arány nevezőjét, a zajt, az égítést jelének megállapításához szükséges mért jelek zajának összessége adja meg. A jelek zajának meghatározása igen körülményes is lehet, főleg olyan esetekben, amikor nincs alkalom a meghatározáshoz szükséges CCD-képek időbeli sorozatának elkészítésére. A legrosszabb esetben, ami a fotometriában gyakori, csak egy CCD-kép áll rendelkezésünkre a jel és a zaj meghatározására. Most egy ilyen esetet vizsgálunk meg a jel-zaj arányának meghatározása szemszögéből.

Tegyük fel, hogy egy CCD-képen elvégeztük a megfelelő redukciókat, kalibráltuk őket, és a képen már fotometriai mérést végezhetünk. Itt az úgynevezett apertúra fotometria mérési eljárást alkalmazzuk. Az eljárás lényegét egy konkrét megfigyelésünk alapján és a 4. ábra (1. melléklet) segítségével magyarázzuk el.

Az első körben van a mérendő csillag képe. A képen a körben kb. 315 pixel van. A mérés folyamán a körben levő pixelekből mért jeleket adjuk össze (integráljuk), amelyek a csillagtól és a háttértől származnak. A legnagyobb jelet a kör középpontjában található pixelben mérjük; esetünkben ez a jel 21991-et tesz ki. E pixeltől távolodva a pixelekből mért jel nagysága folyamatosan csökken (lásd az 5. ábrát: melléklet).

A háttértől származó jel nagyságát a külső gyűrűben mért jelek értékének egy pixelre átlagolt értékével fejezzük ki. Esetünkben az egy pixelre átlagolt érték 298.9-et tesz ki. Megszorozva ezt az értéket a középső körben elhelyezkedő pixelek számával (nálunk 314.16 pixel van a körben), megkapjuk a csillag háttérből származó sugárzás becslést értékét. Ezt levonva a körben kapott integrált jelből, megkapjuk a csillagról származó jel értékét (S^*), ami esetünkben 129331.4-et tesz ki. Ezzel meghatároztuk a jel-zaj arány számlálóját. A középső

gyűrűt nem használjuk mérésre, de a szélességét és pozícióját úgy igyekszünk megválasztani, hogy a külső gyűrűbe ne kerüljön be csillag képe.

A CCD-detektor esetében, amely sok egymás mellé helyezett (kisméretű) detektorból (pixelből) tevődik össze, a jel–zaj viszonyát általában úgy definiálják, mint a pixelekben kapott jelek átlagértékének és a pixelek szórásának hányadosát. A mi esetünkben, amikor egy CCD-kép áll rendelkezésünkre, ezt az eljárást nem tudjuk véghezvinni, hiszen csak egy mérésünk van. Ilyen esetben a jel–zaj arányának meghatározására közelítő eljárást alkalmaznak.

Több ilyen eljárást ismerünk; itt a háttér méréséből végezzük el a zaj értékének meghatározását, azaz értékének becslését. Az eljárás egyszerű: a háttérben (a külső gyűrűvel lefedett felület) mért jelek középértékének varianciájából (σ_B^2) gyökvonással kapjuk az egy pixelre eső zaj (σ_B) értékét. A mi esetünkben $\sigma_B=15.6$. Mivel a jelet (S^*) a belső körben levő n pixelben mért jelek összeadásából (integrálásából) nyertük, így a méréshez tartozó zajt az egyes pixelek varianciájának (σ_i^2) összegéből vont négyzetgyök értékeként kapjuk meg (ez a hiba, azaz a szórás terjedésére vonatkozó tételből következik). Mivel a pixelek varianciáját nem tudjuk külön meghatározni, feltételezzük, hogy értékük minden pixelre ugyanaz, és a háttér varianciájával egyenlő ($\sigma_i^2=\sigma_B^2$). Képletben mindez így írható le:

$$\sigma^* = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}; \quad \sigma_i = \sigma_B = cont \quad \Rightarrow \quad \sigma^* = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_B^2} = \sigma_B \sqrt{n} \quad .$$

Mivel egy pixel zaját a háttér zajával tettük egyenlővé, a csillagra kapott jel mérési zaját az egy pixel zaj értékének (15.6) és a pixelek számának (314.16) négyzetgyökével (17.72) való szorzásból nyerjük. Példánkban ez 465-öt tesz ki. Így véglegesen leírhatjuk, hogy a jel–zaj arányt a fent vázolt eljárásban a következő képlet adja meg:

$$JZA = \frac{S^*}{\sigma_B \sqrt{n}}.$$

E képlet használata, a bevezetett feltételezések kielégítése mellett indokolt. Egyes fotometriai redukciónál használt kereskedelmi feldolgozó programok e feltételeket nem közlik a felhasználóval, ezért gondosan meg kell vizsgálni, hogy a jel–zaj arány meghatározására mely eljárást alkalmazták.

The Question of the Sign–Noise Proportion in Modern Astronomical Photometry

This article shortly summarizes the main puzzles about the determination of the signal-to-noise ratio in contemporary astronomical photometry.

Keywords: astronomical photometry, CCD detector, signal, noise