BOLYAI JÁNOS ÉLETE, MUNKÁSSÁGA ÉS KULTÚRTÖRTÉNETI HATÁSA[1]

Prékopa András
az MTA rendes tagja, egyetemi tanár,
a Bolyai Emlékkonferencia elnöke

1860. január 27-én halt meg marosvásárhelyi otthonában Bolyai János, a világhírű matematikus, a magyar tudomány legnagyobb alakja. 1802. december 15-én született Kolozsvárott, életének nagy részét Erdélyben töltötte. Úttörő volt a nemeuklideszi geometria megalkotásában, felépítette az abszolút és a hiperbolikus geometriát, melyek Eukleidész 5. posztulátuma figyelmen kívül hagyásán, illetve tagadásán alapulnak. Munkájának jelentőségét kortársai nem értették meg, halála után azonban nem sokkal megindult a világhír felé. Hatására az axiomatikus gondolkodás széles körben elterjedt, a matematika egésze átalakult, és az új gondolkodásmód nyomot hagyott az egyetemes emberi kultúrán. Bolyai János halálának emlékére a Magyar Tudományos Akadémia, a Pannon Egyetem Műszaki Informatikai Kara és a Sapientia Egyetem 2010. augusztus 30. és szeptember 4. között nemzetközi tudományos konferenciát rendezett, melynek helyszíne Budapest és Marosvásárhely volt.

Milyen sors vár arra, aki megold egy kétezer éves problémát, és nem a kor tudományos központjainak egyikében tevékenykedik, hanem azoktól távol, egy valószínűtlen helyről adja jelét korszakalkotó felfedezésének? Egy ilyen régi probléma megoldásának bejelentése önmagában is gyanút kelt, hiszen a felvetéstől a megoldásig eltelt idő túlságosan hosszú. Amit a sors Bolyai Jánosra kiszabott a párhuzamosok kétezer éves problémájának megoldása után, nem egyszerűen mellőzés vagy agyonhallgatás, hanem értetlenség és ledorongolás, éltében, holtában egyaránt. Amikor Carl Friedrich Gauss kézhez vette Bolyai János *Appendix* című művét, melyet János apja, Bolyai Farkas neki megküldött, 1832. március 6-i válaszlevelében ezt írta: „Most valamit fiad munkájáról. Ha azzal kezdem, hogy nem szabad megdicsérnem, bizonyára egy pillanatra meghökkensz. Mást azonban nem tehetek: ha megdicsérném, akkor magamat dicsérném, mert a mű egész tartalma, az út, amelyet fiad követ, és az eredmények, amelyekre jutott, majdnem végig megegyeznek részben már harminc-harmincöt év óta folytatott meditációmmal." Egy másik negatív vélemény ugyanennek az évnek szeptemberéből való, Gustav Adolf Geisinger írta, a bécsi cs. és k. Mérnök Akadémia felsőbb matematikaprofesszora, Bolyai szabadságkérelmének elbírálásakor: „Végül az alárendelt [véleményíró] nem kerülheti el, hogy ne méltányolja a szorgalmat és az éleselméjűséget, amellyel a szerző egy egyszer elfogadott hipotézisre egész munkáját felépítette, és az elkövetkezőkben azt kívánja, hogy gyümölcsözőbb témát válasszon." További mélypontot jelent Péterfi Károly református esperesnek, a Magyar Tudományos Akadémia levelező tagjának bejegyzése a marosvásárhelyi református egyház anyakönyvébe: „Híres, nagy elméjű mathematicus volt, az elsők között is első. Kár, hogy nagy talentuma használatlanul ásatott el."

Bolyai azonban teljes mértékben tisztában volt saját zsenijével és munkájának jelentőségével. Hogyan élt ez az ember, honnan származott, mit tudunk róla, a tudósról és az emberről? A Bolyai-kutatás mára már világos képet ad számunkra.

[1] A Bolyai János Emlékkonferencia megnyitó ülésén, 2010. augusztus 30-án, a Magyar Tudományos Akadémián elhangzott előadás szerkesztett változata.

Bolyai Farkas arcképe (MTAK Kézirattár)

A Bolyaiak élete

Bolyai Farkas (1775–1856), János apja is híres matematikus volt, az ő személyét is számon tartja a nemzetközi matematikatörténet. A németországi Göttingen patinás egyetemén tanult matematikát 1786–89 között, ahol megismerkedett a matematikusok leendő „fejedelmével", Gauss-szal. A két ifjú életreszóló barátságot kötött, mely azonban elválásuk után csupán levelezésben jutott kifejezésre, személyesen már nem találkoztak. Farkas taníttatásához a báró Kemény család adta az anyagi támogatást, tanulótársul vették fiuk, az ifjú báró Kemény Simon mellé. Ez a továbbtanulási lehetőség akkoriban gyakori volt tehetséges, de nem jómódú fiatalemberek körében.

A Bolyaiak ősi magyar nemesi család, a Nagyszeben melletti Bólya nevű településen volt váruk, birtokuk. A családi hagyomány szerint a Bolyaiak a honfoglaláskor telepedtek le Bólyán (a település nevét hosszú ó-val, a család nevét röviddel írjuk). A családdal kapcsolatos első írásos adat a 13. századból származik, a várkastély tulajdonlásáról szóló legkorábbi írásos emlékek a 16. századból valók. Egy akkori vitézlő Bolyai János tíz évig volt török rabságban, birtokai nagy részét elvesztette, a várat is azóta mások birtokolták, közöttük volt az Arany János által említett Toldi György. A Bolyai család tulajdonában egy kisbirtok maradt meg Bólyán, Farkas még itt született. Ehhez járult egy másik kisbirtok Domáldon, Marosvásárhely mellett, melyet Farkas édesanyja, Pávai Vajna Krisztina örökölt. Ez akkor került a Bolyai családhoz, amikor Farkas édesapja, Bolyai Gáspár házasságot kötött, Farkasnak azonban volt egy testvére, Bolyai Antal, így a domáldi birtokot ketten örökölték. A várkastély mára már romos, benőtte a gaz, de a háború után még épségben volt, 1960 körül orvosi rendelő működött benne.

Bolyai Farkas Erdélybe való hazatérése után házitanító lett Kolozsvárott. Megnősült,

Bolyai János szülőháza Kolozsvárott, 1903-ban (MTAK Kézirattár)

elvette Árkosi Benkő Zsuzsannát, majd feleségével Domáldra költözött. Fiuk, János születése előtt felmentek Kolozsvárra, hogy a szülés jobb körülmények között mehessen végbe. 1804-ben Farkas elnyerte a marosvásárhelyi református kollégium matematika-, fizika- és kémiaprofesszori állását. A kollégiumban közép- és felsőfokú oktatás folyt, a felsőfokú oktatók megkapták a professzori címet. Ezt az állást 1851-ben bekövetkezett nyugdíjazásáig megtartotta. Felesége 1821-ben meghalt. Öt év múlva újra megnősült, ám ez a házasság sem volt tartós, a feleség 1833-ban fiatalon távozott az élők sorából. A második házasságból két gyermek született, Gergely és Berta, utóbbi azonban már kiskorában meghalt.

Bolyai Farkas főműve a kétkötetes *Tentamen* (1832–1833), melyet a kötelező tananyagon túl matematikát tanulni szándékozó fiatalok számára írt. Valójában a *Tentamen* a kor matematikájának magas színvonalú összefoglalása. Bolyai Farkas foglalkozott még energiatakarékos kályhák készítésével, kertészettel, erdészettel, drámaírással, színjátszással, zenével, és találmányai is voltak. A magyaron kívül folyékonyan beszélt németül, latinul, románul. 1832-ben a Tudós Társaság (a Magyar Tudományos Akadémia korábbi neve) levelező tagjává választotta, ám nem a Matematikai Osztályba, székfoglalója pedig egy néprajzi vonatkozású dolgozat volt. Farkas hosszú időn át kísérletezett az euklideszi 5. posztulátum bizonyításával, melynek lehetetlenségét éppen saját fia mutatta ki. Célja elérése érdekében a posztulátum egyenértékű változatait fogalmazta meg, amivel ő is biztosította helyét a matematikatörténetben, de voltak egyéb szép eredményei is. 1856. november 20-án halt meg, sírjára egy általa honosított pojnik almafát ültettek. Ma is van ott egy pojnik almafa, szorgos kezek ültették ötven évvel ezelőtt. Temetésekor meghagyása szerint semmi ceremónia nem volt, csak az oskola csengettyűje szólt.

Bolyai János 1802. december 15-én született Kolozsvárott, szülőházát emléktábla jelöli. Zsenialitása korán megnyilvánult. Hatéves korában egyedül tanult meg olvasni, hétévesen már németül és hegedülni tanult. Apja csak kilencéves korában kezdte meg rendszeres oktatását, óvakodott attól, hogy fia korai szellemi fejlődését erőltesse. Kilencéves korától kezdve azonban rendszeresen tanította, illetve a kollégium legkiválóbb tanulóival taníttatta fiát. János gyorsan tanult, hamarosan jártasságot szerzett a felsőbb matematikában. Tizenkét éves korában lett a kollégium rendes hallgatója, és 1817-ben hároméves kollégiumi tanulás után letette a rigorózumot. Időközben már felmerült János

Marosvásárhely látképe 1860 körül (MTAK Kézirattár)

Bolyai Farkas háza Marosvásárhelyen a lebontás előtt 1909-ben (MTAK Kézirattár) továbbtanulásának kérdése. Kézenfekvő volt, hogy Gausshoz, apja barátjához, Göttingenbe menjen tanulni, s ezalatt Gauss házában lakjon, de ez a terv nem valósult meg. Farkas 1816-ban Gausshoz intézett kérdezősködő levelére nem kapott választ. Vannak, akik ezt a levél hangnemének tulajdonítják. Bolyai Farkas levelei irodalmi remekművek, sok szellemes hasonlatot és fordulatot tartalmaznak, ez az egy azonban rosszul sikerült. Biztosra vette, hogy barátja igenlőleg válaszol, és inkább neki voltak kérdései, hogy elég jó-e fia számára Gauss háza: „Nincs-e lányod, ki akkor (reciproce) veszedelmessé válhatnék; egészségesek vagytok-e? […] Feleséged kivétel-e a nők között? Nem változékonyabb, mint a szélkakas?" Megértjük, hogy erre a levélre Gauss nem reagált. János Göttingenben való továbbtanulási szándékát az is motiválta, hogy a pesti és a bécsi egyetemeken akkoriban nem voltak olyan matematikusok, akiktől sokat tanulhatott volna.

A göttingeni tervek meghiúsulása után János még egy évet Marosvásárhelyen töltött, közben apja úgy döntött, hogy a Bécsi Császári és Királyi Hadmérnöki Akadémiára adja fiát. Az ehhez szükséges anyagiakat gróf Kemény Miklós és mások biztosították. A sikeres felvételi vizsga után János 1818-ban megkezdte tanulmányait az akadémián. Öt évet

A bécsi hadmérnöki akadémia épülete (MTAK Kézirattár)

A régi marosvásárhelyi kollégium (MTAK Kézirattár)

töltött itt. A rendes tanulmányi idő János számára (akit a negyedik osztályba vettek fel) négy év volt, ám őt, mint az egyik legjobb tanulót még egy évig további tanulmányokra visszatartották. Tanárai szerint János volt az évfolyam legjobb tanulója, diáktársai azonban csak a második helyet juttatták neki a János által unalmasnak tartott rajzolásban való gyengébb szereplése miatt. Az összesített eredmény is a második hely lett. Az akadémiai évek alatt intenzíven foglalkozott matematikával, elsősorban a párhuzamosok problémájával. Apja azonban óvta ettől, saját magából kiindulva vélte, hogy fia feleslegesen fecsérli idejét a megoldhatatlan problémával, és elzárja magát attól, hogy eredményeket érjen el más vonatkozásban. János, szerencsénkre, nem hallgatott a figyelmeztető apai szóra, és végül neki sikerült az áttörés, ha az nem is azzal az eredménnyel zárult, amit az apa elérni remélt.

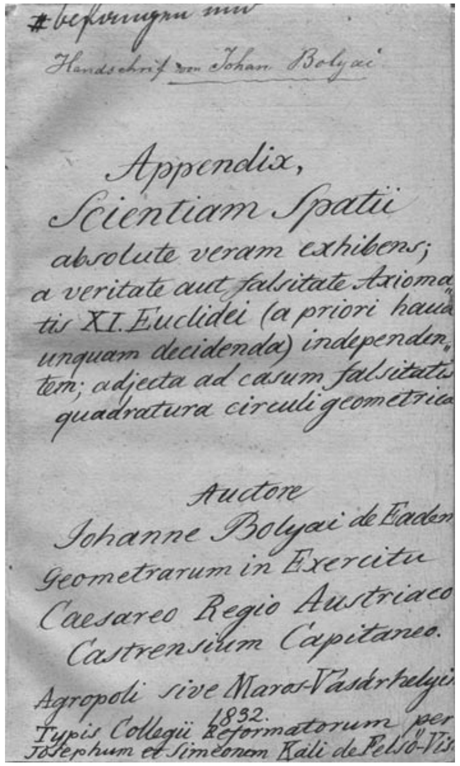
Jóllehet a hadmérnöki akadémia matematikatanárai nem tartoztak a kor nagy matematikusai közé, az általuk nyújtott fegyelmezett oktatás, amely kiterjedt a matematika fizikai és műszaki alkalmazásaira is, minden bizonnyal hasznára vált Bolyai Jánosnak. Erről az *Appendix* és egyéb írásai tanúskodnak. Az *Appendix*-ben könnyedén és elegánsan alkalmazza a geometriára az analízis módszereit, más kézirataiban műszaki problémákat old meg matematikai módszerrel.

János, miután 1823 szeptemberében megérkezett Temesvárra, ahová az erődítési igazgatóságra alhadnagyként kinevezték, még azon év november 3-án apjához intézett levelében tudósít felfedezéséről. A levél legfontosabb részleteit szinte mindenki ismeri: *„Kedves Édes Apám! Annyi teméntelen meg írni valóm van az ujj találmányaimról, hogy éppen most nem tudok másként segíteni magamon, mintha semmibe se ereszkedem belé, tsak egy kvartára írok;* […] *A feltételem már áll, hogy mihelyt rendbe szedem, el-késztem, s mód leszsz, a parallelákról egy munkát adok ki; ebbe a pillanatba nints kitalálva, de az út mellyen mentem, tsak nem bizonyosan ígérte a tzél el-érésit, ha az egyébaránt lehetséges; nints meg, de ollyan felséges dolgokat hoztam ki, hogy magam elbámultam, s örökös kár volna el-veszni; ha meg-látja Édes Apám meg-esméri; most többet nem szólhatok, tsak annyit: hogy semmiből egy ujj más világot teremtettem; mind az, valamint eddig küldöttem, tsak kártyaház a toronyhoz képest."*

Bolyai János új világa az abszolút és a hiperbolikus geometria világa, az első rendszeresen kifejtett nemeuklideszi geometriáé.

Jánost 1826-ban Aradra helyezték, ahol főnöke az a Wolter von Eckwehr lett, aki az

Mérnökkari tiszti díszegyenruha (MTAK Kézirattár)


Handschrift von Johan Bolyai

Appendix,
Scientiam Spatii
absolute veram exhibens;
a veritate aut falsitate Axioma-
tis XI. Euclidei (a priori haud
unquam decidenda) independen-
tem; adjecta ad casum falsitatis
quadratura circuli geometrica

Auctore
Johanne Bolyai de Eadem
Geometrarum in Exercitu
Caesareo Regio Austriaco
Castrensium Capitaneo.

Agropoli sive Maros-Vásárhelyini
1832.
Typis Collegii Reformatorum per
Josephum et Simeonem Kali de Felső-Vis.

Az *Appendix* címlapja Bolyai János kézírásával (MTAK Kézirattár)

akadémián számára a matematikát tanította. Időközben elkészült műve német nyelvű változatával, és azt Aradon átadta Eckwehrnek. Ez a mű sajnos elveszett. Jánost 1831-ben Lembergbe helyezték. Odamenet egy kitérővel meglátogatta apját Marosvásárhelyen, és valószínűleg ekkor adta át neki főműve, az *Appendix* kéziratát, ő pedig azt a *Tentamen* első kötete függelékeként 1832-ben megjelentette, ám különlenyomatként már 1831-ben is kiadta. A két változat címe lényegtelen különbséget mutat, az 1831-es változat latin címe: *Appendix, Scientiam Spatii absolute veram exhibens; a veritate aut falsitate Axiomatis XI. Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem; adjecta ad casum falsitatis quadratura circuli geometrica.* Magyarul: *Appendix, A Tér abszolút igaz Tudománya; a XI. Eukleidész-féle axióma (a priori soha el nem dönthető) helyes vagy téves voltától független tárgyalásban; annak téves volta esetére a kör geometriai négyszögesítésével.* A *Tentamen* második kötete egyébként 1833-ban jelent meg. Eukleidész művének a Bolyaiak által ismert kiadásában az 5. posztulátum a XI. jelű.

Jánost 1832-ben Olmützbe helyezték, ez volt katonai pályafutásának utolsó állomása. Egészsége már Aradon megromlott, megkapta a maláriát, később a kolerát is. Lembergből Olmützbe menet szekere felborult, és súlyos fejsérülést szenvedett. Matematikával akart foglalkozni, hogy elméletét továbbfejlessze. Háromévi szolgálatmentes szabadságot kért János főhercegtől, a hadmérnöki akadémia főigazgatójától, aki kérvényét elutasította, az ezzel kapcsolatos szakvélemény egy részletét már idéztük a cikk elején. Mindamellett másodosztályú kapitánnyá előléptették, de ebben a rangban 1833-ban nyugdíjazták. Olmützbe menet a határon összeszólalkozott a vámtisztekkel, nem akarván nekik ládáját kinyitni, akik azután feljelentették. Ez a tény valószínűleg hozzájárult korai nyugdíjazásához.

János kitűnő hegedűs és vívó volt. Gyakran játszotta Paganini virtuóz capriccióit. Ami a vívást illeti, egy valószínűtlen történet szerepel néhány életrajzában. Eszerint Aradon tizenhárom lovastiszt egyidejűleg párbajra hívta ki hősünket, aki mind a tizenhárom kihívást elfogadta azzal a feltétellel, hogy a párbajok között játszhat a hegedűjén. Ha a történet igaz, és a párbajokat lovassági karddal vívták, amiről köztudott, hogy igen nehéz (több mint 3 kg), akkor ez arra utal, hogy János nagy fizikai erejű fiatalember volt.

János 1833-ban apjához költözött Marosvásárhelyre. Egy év múlva kiköltözött Domáldra,


MAROSVÁSÁRHELYT
Csütörtökön. Május 4-kén 1843-ban
a' helybeli Lutheri Szentegyház' segillésire
AZ APOLLÓ-TEREMBEN
Mü-kedvellök által
adódik
HANG-VERSENY
KÉT OSZTÁLYBAN.

ELSŐ OSZTÁLY:
1. Nyitány: bűvös vadászból, Wéber C. M. től
2. Kettős-dal Paccinitől, „La Sposa fedele“ nevű dal-játékból Nagy Károly és Szathmári László által.
3. Polonoise Maysedertől; azután Paganini' Caprices-eiből és Sonatáiból: Maestoso, Adagio con dolcezza, Presto, Innocentemente, cs. k. kapitány Bolyai János által. *
4. Magány-dal Zámpából, Héroldtól, Szathmári László által.
5. Kar-ének az „Egy óra“ nevű melodrámából.

MÁSODIK OSZTÁLY:
1. Nyitány Oberonból, Wébertől.
2. Magánydal Varás Sipből, Mozárttól, Nagy Károly által.
3. Paganini Caprices-iből és Sonatáiból: Agitato, két Amoroso, Corrente, Presto; cs. k. kapitány Bolyai János által
4. Quartette Oberonból, Wébertől.
5. Kar-ének, Edinburgi tömlöczből, Caraffától.

Szent czélra nemes indulatból vállalkoztak keresztény részvétre számitnak azon reménnyel: hogy azon éldeleten kivűl, mellyel a' középszerűen is jádzott remek darabok táplálják a' lelket, ezen zenét az is szépiti, hogy úgy jelenik meg, mint anyja a' köz-atya tiszteletére szólandó új hangoknak; ha midőn a' halotti lepedő alól feltámadott természet, mint egy fel-virágzott 's gyöngyözött mátka a' réá mosolygó nap' elibe lépik a' megzendűlő köz-templomba, ezen nagy hármoniához, a' Lutheri keresztények' ezen városbeli kis templomából is egy ùj kis orgona' hangja járulhat.

Bémenti díj: elsőhely 50 xr. másodikhely 25 xr. karzat 15 xr. v. c.
Kezdete pontban 7 órakor.
Belépti jegyeket lehet váltani a' színház' külteremében.

* A' csak mások kivánságukra ezeknek előadását vállalt jádzó megelégszik, ha azon colossalis művésznek, itt még csaknem egészen ismeretlen, maguk nemökben egyetlen nagyszerű, de épen oly rendkivűl is nehéz és magán Paganinin kivűl más által alig hozzá hasonlólag utánzott 's előadásra választatni nem is szokott remekei merényével a' tisztelt közönségnek bár némi kis fogalmat lesz képes adni: annyival inkább, hogy más rendeltetését nézve, a' hegedüt mindig — közelebbről rég-óta — mellőzte.

A Marosvásárhelyen 1843. május 4-én a Lutheránus Egyház segítésére rendezett hangverseny plakátja (MTAK Kézirattár) ahol 1846-ig lakott, de az újabb kutatások szerint többnyire inkább Marosvásárhelyen tartózkodott, mert betegeskedett, és ott gyógyíttatta magát. Együtt élt Kibédi Orbán Rozáliával. Házasságról eleinte nem lehetett szó, mert a katonatiszteknél megkövetelt kauciót nem tudta letenni. Az 1848–49-es forradalom idején eltörölték a kauciót, János és Rozália házasságot kötött, amit azonban a hadsereg később nem ismert el. A Bolyai család legjobb ismerője, Oláh-Gál Róbert szerint a kapcsolatból négy gyermek született: Dénes (1837), Amália (1840), Klára-Eliza (1844) és Gyula (1855). Dénesnek három házasságából több gyermeke is született, egyes leszármazottai ma is élnek. Farkas, miután elégedetlen volt János domáldi gazdálkodásával, a birtokot 1846-ban bérbe adta. Ezt követően János családjával felköltözött Marosvásárhelyre, ahol házat épített. Hat év múlva azonban elköltözött családjától, Szőts Júlia nevű szolgálója gondozta.

A forradalom idején eljutott hozzá az orosz Nyikolaj Ivanovics Lobacsevszkij műve, melyet szerzője először oroszul publikált 1829–30-ban, majd németül 1840-ben, és melynek tartalma közel áll az *Appendix*-éhez. János előbb gyanakodott, hogy meglopták, később azonban higgadt fejjel végigolvasta Lobacsevszkij művét, és azt nagyra értékelte, ám kritikai megjegyzéseket is fűzött hozzá, amelyek *Észrevételek* cím alatt találhatók Bolyai kéziratainak jegyzékében.

Bolyai Jánosnak az *Appendix* mellett egy másik, régóta ismert tudományos eredménye a komplex számok elméletének megalapozása, amelyet 1837-ben egy lipcsei pályázatra reagálva foglalt írásba. A matematikatörténet ezt az eredményt az ír William Rowan Hamiltonnak tulajdonítja. Bolyai hasonló elveket alkalmazott és eredményét korábban érte el, mint amikor Hamilton a sajátját a dublini akadémiához benyújtotta (Bolyai műve már 1831-ben készen volt). A lipcsei pályázaton egyébként apja is részt vett, de egyikőjük sem nyert. A teljes díjat nem adták ki, felét odaítélték Kerekes Ferencnek, a debreceni kollégium tanárának.

Régebben azt tartották, hogy Bolyai János nyugdíjazása után nem írt már jelentős matematikai művet a *Responsio*-n kívül (ez volt a címe lipcsei pályamunkájának). A nemrég elhunyt Kiss Elemér marosvásárhelyi professzor volt az, aki erre rácáfolt. Gondosan tanulmányozta Bolyai János háromezer oldalnyi matematikai kéziratát, és abban olyan „matematikai kincseket" talált, melyek Bolyai idejében új tudományos eredmények voltak. Egyik számelméleti tételét, mely egyébként ma tananyag, James Hopwood Jeans angol matematikus harmincnyolc évvel Bolyai halála után publikálta. A háromezer oldalnyi kézirat tanulmányozása óriási feladat volt, Bolyai ugyanis nem mindig rendelkezett megfelelő papírral, feljegyzéseit gyakran arra írta, ami éppen a keze ügyébe esett: boríték hátlapjára, színlapra, kisfia teleírt füzetébe stb. A nem matematikai jellegű kéziratokat Benkő Samu kolozsvári professzor tanulmányozta át nagy gonddal, tizenhat év munkájával, és írt alapos és szép könyveket Bolyai János vallomásairól, a két Bolyai kapcsolatáról stb. A nem matematikai írások, szám szerint kb. 11 ezer oldal, között van az ún. *Üdvtan*, mely afféle utópia. Az *Üdvtan*-nal nem kívánunk bővebben foglalkozni. Gondolati tartalmában hasonlít Bolyai János korának egyéb utópisztikus írásaira, jelentősége azonban nem mérhető az *Appendix*-éhez.

Marosvásárhelyen János régi és új betegségeivel küszködve élte magányosan utolsó éveit haláláig, 1860. január 27-ig. Két nappal

később, a temetésen az előírt katonai kíséreten kívül mindössze két civil jelent meg. Illő dolog tehát, hogy a nemzet lerója kegyeletét Bolyai János sírjánál, halálának 150. évfordulója alkalmából.

A helybéliek nem szereztek tudomást arról, hogy mit, és milyen jelentőset alkotott Bolyai János. Ám azidőtájt a szakmán belül sem tudták felmérni annak jelentőségét.

Bolyai Jánosról nem maradt fenn kép. Volt egy, mely őt katonaruhában ábrázolta, ezt azonban Bolyai egy alkalommal dührohamában karddal szétkaszabolta. További képek is voltak róla, de mindegyik megsemmisült. Újabban az a nézet vált elfogadottá (Weszely Tibor munkássága nyomán), hogy a marosvásárhelyi kultúrpalota homlokzatának tetején lévő domborművek egyike őt ábrázolja. Az összesen hat dombormű közül ötnek az esetében sikerült megállapítani, hogy valóban azokat a személyeket ábrázolják, akiknek a neve a domborművek alatt olvasható. A hatodik alatt Bolyai János neve áll, és közvetlenül Bolyai Farkas domborműve mellett helyezkedik el. Van azonban egyéb bizonyíték is, mégpedig azok tanúságtétele, akik a kultúrpalota építése idején még éltek és Bolyai Jánost személyesen ismerték, továbbá az a feltűnő hasonlóság, ami a dombormű és Klapka György ismert portréja között van. Márpedig jól ismert, hogy Bolyai János feltűnően hasonlított Klapka György tábornokhoz. Az említett dombormű felhasználásával készült a 2002. évi Bolyai-évfordulóra, Széchenyi Kinga Bolyait ábrázoló plakettje.

A két Bolyai síremléke Marosvásárhelyen

Bolyai János (Széchenyi Kinga plakettje)

Bolyai János legfontosabb tudományos eredményei és hatásuk

A deduktív bizonyítás módszere létrejöttének okát tudománytörténészek a görög demokráciában jelölik meg. A demokrácia ugyanis szükségessé tette, hogy bírósági tárgyalásokon a pereskedő felek bizonyítsanak, ne egy tirannus mondja meg, kinek van igaza. Vita van azon, hogy a matematikusok vagy a filozófusok voltak-e az elsők a deduktív bizonyítási mód tudományos alkalmazásában, valószínűbb azonban, hogy inkább az utóbbiak. A deduktív bizonyítást a matematikában Thalész és Püthagorasz alkalmazta először, a Kr. e. hatodik században, munkásságuk révén létrejött a deduktív geometria és általában a deduktív matematika.

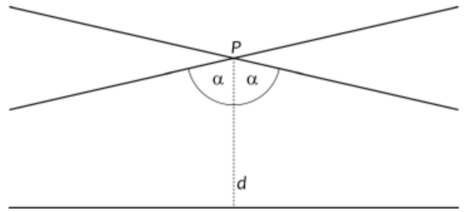
Eukleidész, a híres alexandriai matematikus, Platón iskolájának egykori tanítványa, Kr. e. 300 körül írta *Elemek* című művét. Ez tizenhárom könyvből áll, és általános bevezetést nyújt a kor matematikájába, nem csupán a geometriába. Ennek fényében értjük meg, hogy Eukleidész a kiinduló alapfeltevéseit két csoportba sorolta: követelmények és közönséges ismeretek. Az első csoport kifejezetten geometriai állításokat tartalmaz, a második csoportban azonban általánosabb érvényű állítások foglalnak helyet. Az előbbieket latinosan posztulátumoknak is nevezzük, az utóbbiakat későbbi kommentátorok axiómáknak nevezték el. (Az *axióma* szót Eukleidész nem használta, de Arisztotelész óta ismert volt a görög filozófiában.) Elfogadottá vált az a felfogás, hogy az axióma nyilvánvaló igazságot fejez ki, a posztulátum pedig általunk bevezetett feltételezés. (Ma már nem teszünk különbséget közöttük, és bármilyen matematikai elmélet kiinduló állításait axiómáknak nevezzük.) Eukleidész posztulátumai előírják például, hogy két pont meghatároz egy egyenest, a derékszögek egyenlők stb. Az 5. posztulátum azonban olyan állítást tartalmaz, amely nem szemléletes, mert nem tudunk egyeneseket végtelenbe menően követni. Ez eredeti formájában a következő: ha egy egyenes metsz két egyenest és az azonos oldalon lévő belső szögek összege kisebb két derékszögnél, akkor a két egyenes a végtelenségig meghosszabbítva metszi egymást azon az oldalon, amelyen a szögösszeg kisebb két derékszögnél. Ezzel egyenértékű az az állítás, hogy adott egyeneshez egy rajta kívül fekvő ponton át egy és csakis egy olyan egyenes húzható, mely nem metszi az adott egyenest, továbbá egyenértékű az is, hogy a háromszög szögeinek összege 180°. Kérdés: bebizonyítható-e az 5. posztulátum Eukleidész egyéb posztulátumára és axiómáira támaszkodva? A több mint kétezer éves problémára a választ a magyar Bolyai János és az orosz Nyikolaj Ivanovics Lobacsevszkij adta meg: az 5. posztulátum független a többitől. Annak elvetése esetén új geometriákat kapunk, mégpedig, ha legalább két nem metsző egyenes húzható, akkor a Bolyai–Lobocsevszkij-féle (más szóhasználattal: *hiberbolikus*) geometriát, ha pedig egy sincs, akkor az elliptikus geometriát kapjuk. Ilyen például a gömbi geometria, ha egyeneseknek az ún. főköröket tekintjük.

Bolyai továbbment, és kiépítette az ún. abszolút geometriát is; ez olyan állításokat tartalmaz, melyek az 5. posztulátum elvetése vagy előírása esetén egyaránt érvényesek. Az alábbiakban ízelítőül felvázolunk néhány tételt a Bolyai-geometriából.

Vegyünk fel a síkban egy *l* egyenest, egy rajta kívül fekvő *P* pontot, majd egy arra illeszkedő olyan egyenest, mely *l*-et metszi. Az utóbbi egyenes elforgatása során előáll egy olyan helyzet, hogy a *P* pontra illeszkedő egyenesünk „elpattan" *l*-től, annak egyik oldalán. A másik irányba való forgatáskor egy másik elpattanó egyenes adódik. Bolyai meghatározta az ábrán látható α szög és a hiperbolikus geometriai *d* távolság közötti kapcsolatot, melyet az alábbi formulával adott meg:

$$\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2} = e^{\frac{k}{d}}$$

A formulában szereplő *k* állandó univerzális, független attól, hogy mely *l* egyenest és *P* pontot vesszük. Ugyanez a *k* fordul elő más geometriai mérőszámok képletében is Bolyai geometriájában.



Elpattanó egyenesek

Bolyai kiépítette az abszolút és a hiperbolikus geometria trigonometriáját, és alkalmazta az ívhossz, a felszín és a köbtartalom meghatározására. Például az *r* sugarú kör kerülete a hiperbolikus geometriában az alábbi értékkel egyenlő:

$$\pi k\left(e^{\frac{r}{k}}-e^{-\frac{r}{k}}\right) = 2\pi k\,\mathrm{sh}\frac{r}{k}$$

ahol *k* a már ismert, az egész térre nézve univerzális állandó. Ezt a későbbi matematikai művekben a tér görbületének reciprokával azonosították. Ha $k \to \infty$, akkor a fenti formula határeseteként $2r\pi$ adódik, ami a kör kerületének jól ismert képlete az euklideszi geometriában. (Az sh a szinuszhiperbolikusz függvény rövidítése, jelentése a formulából kiolvasható; lentebb szerepel a ch szimbólum, ez a koszinuszhiperbolikusz függvényt jelöli, mely az előbbitől abban különbözik, hogy mínusz helyett plusz áll a képletben.)

Bolyai János egyik legszebb, az abszolút geometriában érvényes tétele az alábbi. Egy háromszög szögeinek szinuszai úgy aránylanak egymáshoz, mint azoknak a köröknek a kerületei, amelyeknek sugarai rendre megegyeznek a szemben lévő oldalakkal. Ha a szögeket *A, B, C*, a szemben lévő oldalakat *a,b,c*, az *r* sugarú kör kerületét $\bigcirc r$ jelöli, akkor tehát Bolyai tétele a

$\bigcirc a : \bigcirc b : \bigcirc c = \sin A : \sin B : \sin C$

formulával fejezhető ki. Az euklideszi geometriában $\bigcirc r = 2\pi r$, a fenti formula tehát az ismert $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$ alakot ölti.

A hiperbolikus geometria esetében viszont

$$\bigcirc r = 2\pi k\,\mathrm{sh}\frac{r}{k}$$

amiből következik, hogy

$$\mathrm{sh}\frac{a}{k} : \mathrm{sh}\frac{b}{k} : \mathrm{sh}\frac{c}{k} = \sin A : \sin B : \sin C$$

Ha egy háromszög szögei α, β, γ, akkor az euklideszi geometriában $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, a hiperbolikus geometriában azonban $\alpha+\beta+\gamma<\pi$. A két szám $\pi-(\alpha+\beta+\gamma)$ különbségét a háromszög defektusának nevezzük. Bolyai bebizonyította, hogy a háromszög Δ területe egyenlő az alábbi mennyiséggel:

$$\Delta = k^2\,(\pi-(\alpha+\beta+\gamma))$$

ahol *k* a korábbról ismert univerzális állandó. Ezt a formulát Johann Heinrich Lambert, a nemeuklideszi geometria előfutára is ismerte, Bolyai viszont szabatosan bebizonyította.

A hiperbolikus geometriában egy derékszögű háromszög *a, b* befogóira és *c* átfogójára (a szög az „egyenesek" metszéspontjában található szöget jelenti) érvényes az alábbi formula:

$$\mathrm{ch}\frac{c}{k} = \mathrm{ch}\frac{a}{k}\,\mathrm{ch}\frac{b}{k}$$

Ha $k \to \infty$, akkor határesetként a $c^2=a^2+b^2$ formulát kapjuk, ami Pitagorasz tételét jelenti.

Bolyai János munkája nagyban hozzájárult ahhoz, hogy a geometria, melynek korábban természettudományi jellege volt, önálló, elvont matematikai struktúrák tudományává vált. Ám éppen ez segítette hozzá, hogy széleskörű alkalmazást nyerjen, ne csak közeli fizikai világunk térformáit írjuk le geometriai fogalmakkal. A „folytonos" nemeuklideszi geometriákon kívül létrejöttek a „diszkrét" és a „véges" geometriák, az utóbbiakat alkalmazzák a kódolás elméletében, kísérletek tervezésében stb. Az axiomatikus módszer a matematika minden ágába bevonult, és a matematika átalakulását eredményezte. Az euklideszi geometria egyeduralmának megtörése utat nyitott a huszadik század modern fizikai elméletei számára.

Az axiomatikus gondolkodásmód a számítógépes alkalmazásban is meghonosodott a matematikai modellek alkalmazása révén. Amikor egy gyakorlati problémát megoldunk – ma már általában számítógép segítségével –, akkor feltevéseinket rendszerbe foglaljuk, minden ilyen rendszer egy axiómarendszer, majd a számítógéppel elvégeztetjük a feladatmegoldáshoz szükséges számításokat.

Bolyai és Lobacsevszkij eredménye a nem szakember számára ma is érthetetlennek tűnhet. Ugyanis a gyakorlati életben, környezetünk véges világában számtalan esetben alkalmazunk az 5. posztulátumra emlékeztető elvet, például földmérés során, tervezőmunkában, nem is kell, hogy törődjünk egyéb lehetőséggel, adott egyeneshez egy rajta kívül fekvő ponton át egy és csak egy párhuzamos egyenes szakaszt tudunk megrajzolni. Ha nem is lehet az 5. posztulátumot a többi állításból levezetni, érvelhetne valaki, a világ akkor is az euklideszi geometriát követi. Bolyai és Lobacsevszkij idejében mindenesetre ez volt a meggyőződés, és ezt minden idők egyik legnagyobb filozófusára, Immanuel Kantra való hivatkozással is alátámasztották. Mindezeket figyelembe véve megértjük, hogy a matematikusok körében megoszlottak a vélemények az új geometria jelentőségét illetően. Ámde nemcsak a matematikusokra kellett figyelni. Elterjedt vélemény sokak körében ma is, hogy Gauss birtokában volt az új geometriának, de nem merte azt közzétenni. Hagyatékában nem találtak erre vonatkozó bizonyítékot, de érdemes foglalkozni azzal, hogy vajon miért gondolták és gondolják ma is, hogy Gauss félt a nemeuklideszi eredményeket publikálni? Különös dolog félni igaz matematikai tételek közzétételétől, kiváltképp, ha az, aki fél, a történelem egyik legnagyobb matematikusa, és nemcsak mint egyetemi tanár, hanem mint közéleti személyiség is nagytekintélyű, a hannoveri királyság udvari tanácsosa, Herr Hofrat. Ez a megszólítás illette meg Gausst tudományos körökben is. A fentiek arra utalnak, hogy a nemeuklideszi geometria felfedezésének jelentősége túlmegy a matematikán. Valóban, az új geometria és annak későbbi kiterjesztései átalakították a matematikát és fizikai világképünket. Érdekes fejlemény: a geometria megszűnt természettudomány lenni, viszont az egyik legfontosabb természettudomány, a fizika számára ezáltal nyílt meg a geometrizálódás útja. Ám a Bolyai-geometria nemcsak a matematikára és fizikai világképünkre, hanem az emberi gondolkodásra is hatással volt. Megtudtuk, hogy van olyan zárt gondolati rendszer, melyben van eldönthetetlen probléma, nem is akármilyen, hanem olyan, ami kétezer év óta foglalkoztatta a legkiválóbb elméket. Egy másik, axiómarendszereken belül eldönthetetlen problémára vonatkozó példa a halmazelmélet keretében keletkezett a 20. században.

Az osztrák származású Kurt Gödel pedig megmutatta, hogy az axiomatikus rendszerekben mindig vannak megoldhatatlan problémák, a triviális esetektől eltekintve.

Ennek a nagyszabású mozgalomnak a Bolyai-geometria megalkotása volt a kiindulópontja. Morris Kline amerikai matematikatörténész azt írta összefoglaló monumentális művében, hogy az ókori görögök óta nem volt olyan nagy forradalom a matematikában, mint a nemeuklideszi geometria felfedezése. Hozzátehetjük: a logikában sem, Arisztotelész óta. Még távol vagyunk attól, hogy ismernénk akár nagy vonalaiban a nemeuklideszi geometria felfedezésének kultúrtörténeti hatását, a kutatómunka azonban elindult, és várhatóan sok fontos és érdekes eredményt fog hozni a közeli jövőben.

A modern fizikai elméletek jelentős része nemeuklideszi geometrián alapul. Az elméletek egy részét kísérletileg is alátámasztották, naprendszeri méretekben a tér nemeuklideszinek bizonyul. A legfrissebb kutatási eredmények szerint kozmikus méretekben azonban mégis jó közelítést nyújt az euklideszi geometria. Ugyanis a tér görbületét a tömeg jelenlétének tulajdonítjuk, a kozmoszban pedig az anyagsűrűség kicsi.

Publikáció és utóhatás

A tudományos eredményeket nem elég elérni, azokat széles körben meg kell ismertetni, ám ehhez jó publikálási lehetőségek kellenek, amik sem Erdélyben, sem Magyarországon akkoriban nem voltak. Bolyai Farkas azt javasolta fiának, hogy eredményeit a *Tentamen* appendixeként publikálja. Az apa ezt jó érzékkel tette, mert egyfelől, amint fiához írja: *„…félős, hogy más is kifejti és hamarább kiadja, mivel a dolgoknak meg van a maguk korszaka”*, másfelől azonban, úgy tűnik, nem is nagyon volt más lehetőség. A marosvásárhelyi kollégiumi tankönyv függelékeként publikált Bolyai-mű nem számíthatott arra, hogy a kor tudósai felfigyelnek rá. Volt azonban valaki, éppenséggel a kor és minden idők egyik legnagyobb matematikusa, a híres göttingeni professzor, Bolyai Farkas fiatalkori barátja: Gauss, aki tudomást szerzett az *Appendix*-ről. Ugyanis Farkas elküldte neki az 1831-ben különlenyomatként megjelent művet.

Az első, 1831 júniusában postán feladott példány elveszett. A második példányt az ifjú báró Zeyk József személyesen vitte el a híres tudóshoz. Gauss az *Appendix* kézhezvételekor azt mondta: „nagyra törsz Phaithón” (Phaithón a görög mitológiában a Nap fia, aki elbizakodottságában kormányozni akarja apja szekerét). Gauss mégis kedvezőtlen levelet írt Bolyai Farkasnak. Amint az 1832. március 6-án keltezett levélből már idéztük, azt állította, hogy a benne foglalt eredmények megegyeznek harminc-harmincöt éve folytatott meditációjával. Ám Gauss 1855-ben bekövetkezett halála után hagyatékában nem találtak olyan kéziratokat, melyek állítását alátámasztanák. A levél Jánost mélyen lesújtotta. Gauss magatartása még inkább bírálható, ha figyelembe vesszük, mit írt néhány héttel korábban, február 14-én, a marburgi professzor Gerlingnek: „Ezt a fiatal geométert, Bolyait, elsőrangú lángésznek tartom”. Ha ezt a Bolyaiaknak is megírja, bizonyára másként alakult volna János élete. János azonban apján kívül mástól nem kapott elismerést. Lipcsei pályázatát sem koronázta siker. Nem lett tagja a Tudós Társaságnak, bár a Bolyaiakat ismerő Döbrentei Gábor titoknok foglalkozott ennek lehetőségével. Úgy gondolta, hogy a deák nyelven írt *Appendix* nem teszi ezt lehetővé, minthogy a Tudós Társaság a magyar nyelv művelésére alapíttatott. A Tudós Társaság Matematikai Osztályán azonban Bolyai János művét nem méltányolták, talán nem is ismerték. Ez abból tűnik ki, hogy Vállas Antal matematikus akadémikus 1836-ban összefoglaló cikket közölt az akkori és a korábbi magyar matematikusok tudományos eredményeiről. Ebben Bolyai Farkas szerepel (előnytelen beállításban), de János nem. Vállas hosszasan magyarázza a bizonyítványunkat, hogy miért nem tudtunk nagyot alkotni, itt volt a tatár, a török stb. Közben pedig a világraszóló új tudományos eredményt tartalmazó *Appendix* már ott volt a Tudós Társaság könyvtárában, ahová azt Bolyai Farkas 1832-ben megküldte, saját művével a *Tentamen*-nel együtt.

Az *Appendix*-re a kor matematikusai akkor figyeltek fel, amikor Gauss halála után hagyatékát feldolgozták. Ezt követően külföldön felgyorsultak az események. 1868-ban egy befolyásos német tankönyv (szerzője Richard Baltzer) már említi Bolyai eredményeit. Ekkoriban lépett színre a francia Guillaume Jules Hoüel, a matematikatörténet professzora Bordeaux egyetemén. Franciára fordította az *Appendix*-et, és mellékelte a magyarországi kapcsolata, Schmidt Ferenc temesvári építész által készített, a Bolyaiakról szóló életrajzot. Bolyai János elismertetése azonban vontatottan haladt, miközben a tudományos világ már ünnepelte Lobacsevszkijt. Hoüel szeretett volna információt kapni a Marosvásárhelyen ládákban szunnyadó Bolyai-kéziratokról. Levelet írt Marosvásárhelyre, válasz nem érkezett. Schmidt Ferencet mozgósította, ő sem járt eredménnyel. Időközben tudomására jutott, hogy Olaszországban olaszra fordították az *Appendix*-et, és az abban foglaltakat Rómában igen nagyra értékelték. Felkérte hát Balthasar Boncompagni herceget, a Római Akadémia tagját, tudománytörténészt, hogy ő írjon levelet báró Eötvös Józsefnek, aki akkor a Magyar Tudományos Akadémia elnöke és kultuszminiszter volt egy személyben. A levélben segítséget kér Eötvöstől ahhoz, hogy kapcsolatot létesítsen a marosvásárhelyiekkel Bolyai Jánosra vonatkozó információk szerzése céljából. Eötvös ezt követően azt írta fiának, Lorándnak, hogy nem tudja, örüljünk vagy piruljunk, majd tekintélyét latba vetette, és a Bolyai-ládák 1869-ben felkerültek az Akadémia könyvtárába átvizsgálás céljából, hogy ti. van-e a kéziratokban további jelentős tudományos eredmény (a kéziratokat János halála után helyezték ládákba, ma a marosvásárhelyi Teleki Tékában harmincöt vastag dossziét töltenek meg). A munka lassan haladt, végül egy levélen kívül, melyben János hírt adott apjának arról, hogy „a semmiből egy ujj más világot teremtettem”, az átvizsgálásra kiküldött bizottság érdemlegeset nem talált. A ládák 1894-ben visszakerültek Marosvásárhelyre. A hagyatékban szunnyadó matematikai írások egy részének átvizsgálására a 19. század végén sor került ugyan, a továbbiakkal, mint említettük, majdnem teljes körűen csak mostanában, száz évvel később történt meg ez.

Talán más lett volna a helyzet, ha Eötvös József nem halt volna meg 1871-ben, és még néhány évig szorgalmazta volna a Bolyai-kutatást. Eötvös egyénisége, nemzetközi elismertsége (könyvei németül, angolul is megjelentek) kellő alapot szolgáltatott volna Bolyai János nemzetközi elismertetéséhez is. Ez végül lassan megindult ugyan, főként a francia Hoüel és a német Paul Stäckel matematikatörténészek munkássága révén, ám külföldön Bolyai mind a mai napig gyakran háttérbe szorul Lobacsevszkij és Gauss mögött. Hozzájárul ehhez az is, hogy Bolyai Jánosról angol nyelven nincs elég széleskörű irodalom.

Száz évvel ezelőtt a Magyar Tudományos Akadémia megalapította a nemzetközi Bolyai-díjat. Ezt 1905-ben a francia Henri Poincaré, 1910-ben a német David Hilbert kapta meg. Mindketten igen fontos eredményeket értek el a geometria területén. A díj segítette Bolyai János jobb nemzetközi elismertetését, kiosztása azonban megszakadt. Néhány évvel ezelőtt az Akadémia a díjat felújította, és két alkalommal ki is adta. Az izraeli Saharon Shelah kapta meg 2000-ben és az orosz Misa (Mihail Leonyidovics) Gromov 2005-ben. Idén megint esedékes a díj kiadása.

Bolyai János a magyar tudomány legnagyobb és a nemzetközi tudomány kiemelkedő alakja. Megoldott egy kétezer éves matematikai problémát; ennek hatására elsősorban a geometria, de a matematika egyéb fejezetei is átalakultak; lehetővé tette, hogy a térről másként gondolkodjunk, és ezzel utat nyitott a huszadik század modern fizikai elméletei számára; megmutatta, hogy van olyan probléma, mely adott axiómarendszeren belül nem dönthető el, és ezzel jelentősen hozzájárult a logika és általában az emberi gondolkodás fejlődéséhez. Minthogy a modern, számítógépes alkalmazott matematikai feladatmegoldás is axiómarendszerek révén történik, Bolyai hatása közvetve ebben is megnyilvánul.

Az *Appendix*-nek a Magyar Tudományos Akadémia Könyvtára Kézirattárában lévő eredeti példányát 2009-ben az UNESCO felvette a Világemlékezet Listájára.

Legyünk büszkék nemzetünk nagy fiára, és ápoljuk kultuszát. Halálának 150. évfordulóján pedig zarándokoljunk el marosvásárhelyi sírjához, hogy lerójuk kegyeletünket a sokat szenvedett nagy tudós iránt, és gyarapítsuk életével, alkotásával kapcsolatos ismereteinket.

Kulcsszavak: *Bolyai János, Appendix, Bolyai Farkas, Tentamen, nemeuklideszi geometria, hiperbolikus geometria, abszolút geometria, axiomatikus módszer, matematikatörténet, kultúrtörténet*

IRODALOM

Alexits György (1977): *Bolyai János világa.* Akadémiai, Budapest

Ács Tibor (2004): *Bolyai János új arca – a hadmérnök.* Akadémiai, Budapest

Benkő Samu (1968): *Bolyai János vallomásai.* Irodalmi, Bukarest

Bolyai Farkas (1832–1833): *Tentamen.* Maros Vásárhely, 2. kiadás: http://mek.oszk.hu/06500/06507/

Dávid Lajos (1979): *A két Bolyai élete és munkássága.* Második kiadás. Gondolat, Budapest

Kiss Elemér (1999): *Matematikai kincsek Bolyai János hagyatékából.* Akadémiai, Budapest

Oláh-Gál Róbert (2009): *Erdélyi tájakon a Bolyaiak nyomában.* Pro-Print Kiadó, Csíkszereda

Prékopa András (2003): Bolyai János forradalma. Természet Világa. 134, 3–21.

Szénássy Barna (1970): *A magyarországi matematika története a 20. század elejéig.* Akadémiai, Budapest

Weszely Tibor (2002): *Bolyai János. Az első 200 év.* Vince, Budapest