

ASZIMMETRIKUS ELOSZLÁSOK ÉS OPTIMÁLIS CIKLUSOK: ÉRDEKESSEGEK A DISZKRÉT POPULÁCIÓDINAMIKÁBÓL

Domokos Gábor

az MTA levelező tagja, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Szilárdságtani és Tartószerkezeti Tanszék – domokos@it.bme.hu

Bohák András

egyetemi hallgató, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Számítástudományi és Információelméleti Tanszék – andras@bohak.hu

A populációdinamika alapmodelljei

A populációdinamika a biológiai populációk létszámának időbeli változását vizsgálja. Aszerint, hogy a létszámot illetve az időt folytonosnak vagy diszkrétnek tekintjük, négy alapvető modell típust különböztethetünk meg. Folytonos idejű modelleket akkor alkalmazunk, ha a létszám gyakran, rendszeresen változik. Ilyen esetben a létszámot is folytonosnak szokták tekinteni, és a feladat közönséges differenciálegyenlet(ek)re vezet. Diszkrét idejű modelleket akkor alkalmazunk, ha a létszám szabályos időközönként változik, viszonylag ritkán. Ilyen esetben a feladat véges dimenziós leképezés(ek)re vezet. Tekintettel a vizsgált populációk nagy méretére, korábban a létszámot folytonos mennyiségnek tekintették ezekben a modellekben is. Az utóbbi években vetődött csak fel a kérdés (King et al., 2002; Domokos – Scheuring, 2002), hogy nem követünk-e el ezzel lényeges hibát. Dolgozatunkban ennek a kérdéskörnek néhány érdekes részletét tárgyaljuk.

Az irracionális számok furcsaságai

A probléma gyökerei messzire nyúlnak vissza, folytonos létszám feltételezése esetén

ugyanis azt is megengedjük, hogy a létszám irracionális értékeket is felvegyen. Az irracionális számok létre először a pithagoreusok következtettek, ez az új fogalom azonban annyira ellentétes volt világgépünkkel, hogy felfedezőjét megölték, és megtiltották, hogy bárki beszéljen az új típusú számokról. Első pillantásra talán furcsa ez a heves reakció, mégis érthetőbbé válik, ha meggondoljuk, hogy egyetlen irracionális szám végtelen mennyiségű információval írható csak le. Jogsnak tűnhet tehát a XX. századi intuicionisták megközelítése, akik szerint más módon tekinthetők létezőnek a racionális és az irracionális számok (Brouwer, 1975). Míg az előbbieket „statikus” értelemben léteznek, az utóbbiakat csak mint egy végtelen, soha be nem fejeződő folyamatot képzelhetjük el. Ha az irracionális számokat a racionálisokkal azonos módon létező objektumoknak fogjuk fel, akkor gödéli értelemben feloldhatatlan (vagyis egyszerre bizonyíthatatlan és cáfolhatatlan) állításokhoz juthatunk.

Rényi Alfréd mutatott rá elsőként (Rényi, 1957), hogy az irracionális számok nem csupán a formálisan eldönthetetlen kérdésekkel, de a véletlennel is szoros kapcsolatban állnak. Az általa vizsgált leképezéscsoport talán legegyszerűbb illusztrációjaként tekintünk az

$$x_{i+1} = 2x_i \text{ mod } 1 \quad (1)$$

(úgynevezett diadikus) rekurzióval megadott sorozatot, mely véletlen jellegű tulajdonságot mutat, ha az x_0 kezdőérték irracionális szám. Konkrétan a diadikus leképezés esetében, irracionális kezdőpont esetén a sorozat elemei egyenletes eloszlást fognak mutatni az egységintervallumon, függetlenül a kezdőpont helyzetétől. Rényi olyan determinisztikus rendszerre mutatott itt példát, melynek hosszú távú viselkedése megjósolhatatlan, az ilyen rendszereket nevezzük kaotikusnak. Ilyen típusú viselkedést valós populációkon is megfigyelhetünk.

A lemmingek titokzatos élete

Alfred Brehm (Brehm, 1990) szerint a lemmingek (*Lemmus lemmus*) Skandinávia legrejtélyesebb állatai. Az egérhez hasonló kis rágcsálók hosszú időszakokra eltűnnek, majd hirtelen ellepik a környéket. Nem kísérreljük meg, hogy megmagyarázzuk a lemmingek titokzatos viselkedését, csupán egy rendkívül egyszerű, kvalitatív modell segítségével próbáljuk meg bemutatni, hogy milyen populációdinamika állhat esetleg a jelenség mögött. Tételezzük fel, hogy a lemmingpopuláció azonos időnként megduplázódik, viszont ha elér vagy túllép egy rögzített N küszöbszámot, akkor N lemming elpusztul, a többi elvándorol, és a korábbi szabály szerint továbbszaporodik. A küszöbszámot indokolhatja a lemmingek adott környezetében fellelhető táplálék mennyisége. Képletbe foglalva a lemmingpopulációt szabályozó törvényt egy rekurzióhoz jutunk, mely az i -edik állapotban mérhető X_i létszám függvényeként adja meg az $(i+1)$ -edik állapot X_{i+1} létszámát:

$$x_{i+1} = 2x_i \text{ mod } N \quad (2)$$

Láthatjuk, hogy mindössze az $x_i = X_i/N$ transzformációt kell végrehajtanunk, és máris a diadikus leképezéshez érkezünk.

Az utóbbit már részletesen tárgyaltuk, felmerül tehát a kérdés, hogy mit tudunk mondani Rényi eredményei alapján egy nagy létszámú lemmingpopuláció hosszú távú viselkedéséről. Másként fogalmazva: milyen statisztikát kapunk, ha véletlenszerű időpontokban megszámloljuk a lemmingeket (nagy N küszöbszámot feltételezve). Vajon nagy N esetén a diadikus leképezés irracionális kezdőértékből induló trajektóriáira jellemző, determinisztikus de megjósolhatatlan, ergodikus viselkedést vagy jól megjósolható dinamikát fogunk-e látni? Vegyük észre, hogy a két feladat között alapvető különbség van: míg a diadikus leképezés (szakaszosan) folytonos, addig a kis rágcsálók populációit leíró leképezés diszkrét.

Először vizsgáljuk meg kis N küszöbszám esetén a lemmingpopuláció viselkedését! Az egyszerűség kedvéért tekintsünk el attól a problémától, hogy egy lemmingből hogyan lesz két lemming. Ha $N=13$, és három lemminggel indítunk, akkor a következő viselkedést tapasztalhatjuk: $3 \rightarrow 6 \rightarrow 12 \rightarrow 11 \rightarrow 9 \rightarrow 5 \rightarrow 10 \rightarrow 7 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 3$. (Vegyük észre, hogy ez egy $K=12$ hosszúságú ciklus.) Természetesen, ha zérus lemminggel kezdünk, akkor is „ciklikus” a viselkedés, a ciklus hossza egy: $0 \rightarrow 0$. Azt mondhatjuk, hogy az $N=13$ eset „emlékeztet” az irracionális számoknál tapasztalt viselkedésre, amikor is a diadikus leképezés a teljes intervallumon egyenletes valószínűségeloszlást produkált. Gyökeresen más a helyzet, ha az $N=16$ esetet vizsgáljuk, ekkor ugyanis azt tapasztaljuk, hogy függetlenül az induló létszámtól, a populáció legfeljebb négy lépésben kipusztul, vagyis az egyelemű $0 \rightarrow 0$ ciklusba (más néven fixpontba) fut bele a trajektória legfeljebb négy iteráció után. Néhány példa: $3 \rightarrow 6 \rightarrow 12 \rightarrow 8 \rightarrow 0$; $5 \rightarrow 10 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 0$; $7 \rightarrow 14 \rightarrow 12 \rightarrow 8 \rightarrow 0$. Nagy N -ek esetén is azt tapasztaljuk, hogy az N küszöbszám kismértékű megváltoztatása teljesen átrendezi a dinamikát.

Bár a lemmingpopuláció kétségkívül igen komplex viselkedést mutat, első ránézésre talán nem egyértelmű, hogy ennek a komplexitásnak mi a kapcsolata a Rényi által a diadikus leképezésben felfedezett komplexitással. Az utóbbi esetében beszélhetünk a kezdeti feltételekre való érzékenységről. Bár a lemmingeknél esetenként tapasztalhatunk analóg jelenséget, de általánosságban nem érvényes ez a tulajdonság: gyakran előfordul ugyanis, hogy a trajektóriák nemhogy távolodnának, de éppenséggel közelednek, például a korábban említett $N=16$ esetben minden trajektória befut az $X=0$ fixpontba. Mi tehát az egzaktul megfogalmazott kapcsolat a diszkrét rendszer (lemmingek) és a folytonos (diadikus leképezés) között? A lemmingek leírására végtelenül sok diszkrét leképezést használunk, minden N -re más a leképezés szerkezetét jellemző gráf. Figyeljük meg azonban, hogy az összes diszkrét leképezés összes lehetséges trajektóriájához kivétel nélkül, egyértelműen hozzárendelhető a folytonos leképezés egy-egy trajektóriája, éppen a már bemutatott $x_1 = X_1/N$ transzformáció segítségével. A fenti megfigyelésből az következik, hogy a folytonos esetben tapasztalt, kezdeti feltételre való érzékenységgel analóg tulajdonság a diszkrét leképezésnél az N küszöbszámra való érzékenység. Legyen például $X_0=5$, $N_1=100$, $N_2=99$. Az első esetben négyelemű, a második esetben harmincelemű ciklusba jutunk. A radikális eltérést a folytonos leképezés kezdeti feltételekre való érzékenysége világítja meg, itt ugyanis az első trajektória az $x_0=5/100=0,05$, a második pedig az $x_0=5/99=0,050505$ kezdőértéknek feleltethető meg.

Ciklusok távolsága

és az eloszlások aszimmetriája

Iménti megfigyelésünket úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a diadikus leképezés esetén egymáshoz közeli N értékekhez tartozó ciklusok egymástól távol esnek. Megfigyeléseink szerint ennek oka a dinamika tágító

jellege, hiszen az „ N -érzékenység”-ről megmutattuk, hogy a kezdeti feltételekre való érzékenység okozza. A továbbiakban ezt az intuitív állítást próbáljuk matematikai tartalommal megtölteni. Mivel nagyon rövid ($n < 3$ hosszúságú) ciklusok esetén a dinamika tágító hatása nyilván nem jelentkezik, ezért ezeket a további vizsgálatokból kizárjuk.

Definiáljuk két ciklus távolságát: legyen a két ciklus C_1 és C_2 , hosszuk n_1 és n_2 , elemeik legyenek egész számok és jelölje őket

$$\gamma_{ij}, i = 1, 2; j = 1, 2, \dots, n_i$$

az utóbbi jelölést periodikusan kiterjesztjük, legyen tehát (3)

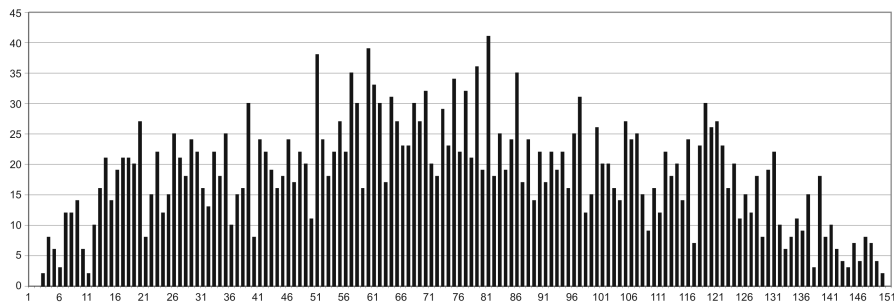
$$c_{ij} = \gamma_{i(j \bmod n_i)}, i = 1, 2; j = 1, 2, \dots$$

Két ciklus távolságának a következő mennyiséget fogjuk nevezni: (4)

$$\Delta(C_1, C_2) = \min_k \left\{ \frac{1}{n_1, n_2} \sum_{i=1}^{n_1, n_2} |c_{1,i+k} - c_{2,i}| \right\}, k = 0, 1, \dots, n_1 - 1 \quad (5)$$

A definíció szerint tetszőleges ciklus önmagától mért távolsága zérus. A távolság két ciklus között éppen d , ha az egyikből a másikat úgy hozzuk létre, hogy minden elemhez hozzáadunk d -t. Az imént leírtakból következik, hogy rögzített N esetén két ciklus távolsága legalább egységnyi, hiszen nem lehet közös elemük a ciklusoknak.

Vizsgáljuk most meg, hogy iménti intuíciónk (nevezetesen, hogy közeli N értékekhez tartozó ciklusok távol esnek) mennyire igazolható a most bevezetett távolságfogalom segítségével. A numerikus vizsgálat során „közelinek” tekintünk két N értéket, ha különbségük legfeljebb 2. A diadikus leképezés összes, $n > 2$ hosszúságú ciklusára ($1 < N < 5000$) meghatároztuk, hogy az adott C_1 ciklushoz melyik C_2 ciklus esik legközelebb a közeli N értékek esetén. A legkisebb $\Delta(C_1, C_2)$ távolságot hozzárendeltük a C_1 ciklushoz, és elkészítettük a távolságok statisztikáját, melyet az 1. ábra mutat a $2 < N < 500$ intervallumra.



1. *ábra* • A diszkrét diadikus leképezés ($2 < N < 500$) összes, $n > 2$ hosszúságú (2763 db) ciklusához rendelt legkisebb Δ távolságok statisztikája közeli N értékek esetén. Figyeljük meg, hogy alig található kis ($\Delta < 1$) távolság (átlag: 72,68) és az eloszlás közel szimmetrikus (ferdeség = 0,04).

Azt figyelhetjük meg, hogy a statisztika várható értéke meglehetősen nagy (72,68), és a ciklusoknak alig van közeli ($\Delta < 1$) szomszédjuk. Ez igazolja korábbi intuíciónkat. Tévedés volna azonban azt gondolnunk, hogy ez általánosan jellemző a kaotikus leképezésekre. Egy másik, igen gyakran példaként is vizsgált, nevezetes kaotikus rendszert írja le az úgynevezett logisztikus leképezés:

$$x_{i+1} = l(x_i) = \mu x_i (1 - x_i), \quad (6)$$

melyre $\mu = 4$ esetén szintén jellemző, hogy tipikus kezdőpontból induló trajektóriái véletlenszerűen járnak be az egységintervallumot (itt a jellemző valószínűségegyenlet azonban távolról sem egyenletes). Bennünket természetesen a logisztikus leképezés diszkrétizáltja érdekelt:

$$x_{i+1} = L(x_i) = [\mu x_i (1 - x_i)], \quad (7)$$

mely hasonlóan a diszkrét diadikus leképezéshez, szintén véges hosszúságú ciklusokból és azokba bevezető trajektóriaszakaszokból áll. (A képletben $[\]$ a lefelé kerekített egészértéket jelöli.) A logisztikus leképezésnél, $\mu = 4$ esetében szintén meghatároztuk minden $n > 2$ hosszúságú ($2 < N < 5000$) ciklus legközelebbi szomszédját, és elkészítettük a minimális távolságok statisztikáját, melyet a

2. *ábra* illusztrál logaritmikus léptékben. Ez a statisztika gyökeresen eltér a diadikus leképezésnél látottól: nemcsak várható értéke kisebb lényegesen, de markánsan megjelennek a közeli ($\Delta < 1$) szomszédokkal rendelkező ciklusok is. A Δ -statisztikák közötti különbség leginkább az aszimmetria (ferdeség) segítségével számszerűsíthető:

$$f(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k) = \left[\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{\Delta_i - E}{\sigma} \right], \quad (8)$$

ahol E a statisztika várható értékét, σ pedig a szórást jelöli; f értékeket az ábrákon feltüntetettük.

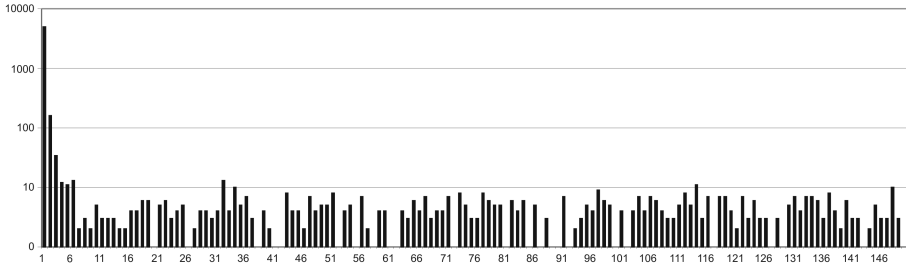
Talán a Δ -statisztikák ferdeségénél is élesebben mutatja a két leképezéstípus közötti különbséget a ciklusokon értelmezett szomszédsági gráf. A gráf csúcspontjai a ciklusok, él pedig ott létezik, ahol $\Delta < 1$. Minden csúcspont (ciklushoz) hozzárendelhetjük a rajta áthaladó leghosszabb él-út hosszát, ezt az egész számot nevezzük élindexnek. A diadikus leképezés esetén a szomszédsági gráfnak nincs éle, tehát minden élindex azonosan zérus. A logisztikus leképezés esetében azonban igen magas élindexek is léteznek, ezek eloszlását mutatja a 3. *ábra*. A numerikus vizsgálatok tehát azt mutatják, hogy diszkrétizált, kaotikus leképezések szerkezete között gyökeres

eltérés mutatkozhat, most ennek egyik fő okát fogjuk elemezni.

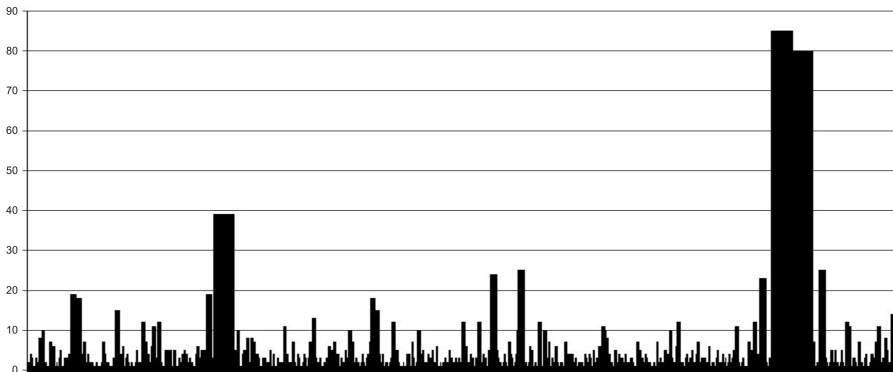
A kritikus pont és az optimális ciklusok

A diadikus és a logisztikus leképezés közötti legmarkánsabb különbség az, hogy míg az előbbi tágító jellegű, tehát deriváltjának abszolút értéke egynél mindig nagyobb, addig az utóbbinál a derivált egy pontban ($x=1/2$) zérussá válik, vagyis rendelkezik kritikus ponttal. A folytonos leképezések közötti ezen markáns különbség okozza a diszkrétizált leképezések szerkezetében tapasztalt lényeges eltérést is. A kritikus pont környezetében a diszkrét leképezés azonos értékeket ($X=N-1$) vesz fel. Mivel a

(7) leképezés másodfokú, ezért a környezet nagyságrendileg \sqrt{N} sugarú, és (7) alapján $L(N-1)=3$, ezért az $N/2$ környékén elhelyezkedő, közelítőleg \sqrt{N} darab cella képe a [3] cella lesz, bármely N esetén. Amennyiben a [3] cella valahányadik képe beleesik az $N/2 \sqrt{N}$ sugarú környezetébe, úgy egy ciklus jön létre. Különösen érdekes ez a ciklus, ha minimális számú elemet tartalmaz, vagyis [3], és $[N-1]$ között monoton növekszik. Az ilyen ciklusokat optimálisnak nevezzük, ugyanis különleges tulajdonságokkal rendelkeznek. Természetesen általában nem találunk ilyen ciklusokat, hiszen a [3] cella iterált képe általában nem esik bele az $N/2 \sqrt{N}$ sugarú környezetébe.



2. ábra • A diszkrét logisztikus leképezés ($2 < N < 5000$) összes, $n > 2$ hosszúságú ciklusához rendelt legkisebb Δ távolságok statisztikája közeli N értékek esetén logaritmikus léptékben. Élesen különválnak a közeli ($\Delta < 1$) és távoli ($\Delta > 1$) ciklusok, az eloszlás ferdesége $f=45,37$.



3. ábra • Az egyes ciklusokhoz rendelt legmagasabb élindexek eloszlása N függvényében a logisztikus leképezés esetén a $2 < N < 5000$ intervallumban.

Könnyen belátható azonban, hogy mivel $N/2$ környékén a függvényérték állandó, ezért N értékének kisebb módosítása (vagyis a diszkrét négyzettrács kismértékű zsugorítása/tágítása) tipikusan nem változtatja meg az optimális ciklusok szerkezetét. Ha tehát $N=N_0$ esetén találtunk optimális C_1^* ciklust, melynek hossza n_1 , akkor $N=N_0 \pm 1$ esetén tipikusan találni fogunk egy másik, azonos hosszúságú optimális C_2^* ciklust úgy, hogy $\Delta(C_1^*, C_2^*) = 1/N$. Az $1/N$ távolságot éppen a legnagyobb függvényérték 1-gyel történő módosítása okozza, egyébként a két ciklus azonos. Kellően nagy N esetén a függvény meredeksége a [3] cella környékén ~ 4 , ezért ha $N=N_0$ esetén találtunk egy optimális C_1^* ciklust, melynek hossza $n_2 = n_1 + k$. A fentieket összefoglalva megállapíthatjuk, hogy N értékét egyesével növelve, optimális ciklusokat (melyek egymástól $\Delta=1/N$ távolságra helyezkednek el) csoportosan $N_0 < N < N_0 + c \cdot \sqrt{N_0}$ között majdnem minden N -re találhatunk, a következő csoport első elemét pedig $N=4N_0$ környékén kell keresnünk. Néhány ilyen csoport (zárójelben az optimális ciklusok hossza):

- 15 < N < 26 ($n=3$),
- 64 < N < 86 ($n=4$)
- 266 < N < 307 ($n=5$)
- 1086 < N < 1167 ($n=6$)
- 4378 < N < 4545 ($n=7$)

Ezek a csoportok tartalmazzák a legmagasabb élıindexszel rendelkező ciklusokat, a csoportokhoz rendelt négy „torony” világosan elkülönül a 3. ábrán. Megjegyezzük: a diszkrét leképezés optimális ciklusai lényegében a folytonos leképezésben $\mu=4-\varepsilon$ paraméterértéknél fellelhető, úgynevezett szuperstabil ciklusok diszkrét képének tekinthetők. Ezek a ciklusok áthaladnak a kritikus ponton, ebből adódik szuperstabilitásuk.

Összefoglalás

Dolgozatunkban diszkrét, kaotikus leképezések szerkezetével kapcsolatos néhány

kérdést vizsgáltunk populációdinamikai modellekkel kapcsolatban. Elsőként a diadikus leképezést mutattuk be, és azt is illusztráltuk, hogy a biológiai paraméternek tekinthető N szám kis megváltozása a dinamika drasztikus változásához vezetett. A változás leginkább a diszkrét ciklusok hosszának és szerkezetének módosulásával volt illusztrálható. Ennek számszerűsítése céljából bevezettük a két ciklus távolságát mérő Δ mennyiséget, és bemutattuk a diadikus leképezés ciklusain végzett numerikus vizsgálat eredményét. Ez igazolta korábbi, intuitív megállapításainkat, mely szerint közeli N értékhez tartozó ciklusok tipikusan távol esnek egymástól. Ezután bemutattuk a populációdinamikai modellekben használt logisztikus leképezést és annak diszkrét változatát. Itt a távolságstatisztikára vonatkozó numerikus vizsgálat gyökeresen más mutatott, ugyanis kiderült, hogy a ciklusok jelentős hányadának van közeli szomszédja. A két eloszlás közötti különbséget leginkább ferdeségük, vagyis a harmadik momentum segítségével lehetett számszerűsíteni. Ezután megkíséreltük megmagyarázni, hogy mi okozza a radikálisan eltérő viselkedést. Megmutattuk, hogy a kritikus pont jelenléte úgynevezett optimális ciklusok létrejöttéhez vezet. Ezek a ciklusok szabályos szerkezetben, nagy csoportokban bukkanak fel, és egymástól mért távolságuk minimális. Ezek és hasonló társaik okozzák a logisztikus leképezésre vonatkozó távolságstatisztika nagymértékű ferdeségét.

A diadikus és logisztikus leképezésnél tapasztalt viselkedést más példákön (többek között a jól ismert Ricker-modellen) is vizsgáltuk, és azt tapasztaltuk, hogy lényeges eltérés mutatkozik aszerint, hogy az adott leképezés rendelkezik-e kritikus ponttal. A vizsgált példák jellemző adatait az 1. táblázatban foglaljuk össze (további részletek: http://www.iit.bme.hu/~domokos/doc/domokos_bohak_1.doc) A bemutatott leképezések közül kritikus ponttal rendelkezik a logisztikus, a

Megnevezés	Leképezés	Ciklusokat jellemző paraméterek ($2 < N < 5000$)					
		D	D^*	$n_{\text{át}}$	$C_{\text{át}}$	F	c_1
<i>Diadikus</i>	$X_{i+1} = 2X_i \text{ mod } N$	81 797	75 132	29,88	16,36	0,05*	0,00%
<i>Logisztikus</i>	$X_{i+1} = [4x_i(1-x_i)]$	21 210	12 707	10,65	4,24	45,37	38,84%
<i>Negyedfokú</i>	$X_{i+1} = \left[N - \frac{16}{N^3} \left(X_i - \frac{N}{2} \right)^4 \right]$	16 581	9035	9,34	3,31	49,64	76,00%
<i>Ricker</i>	$X_{i+1} = \left[b \cdot X_i \cdot e^{-c \cdot X_i} \right]_{b=2,5; c=1}^5$	18 994	11 192	5,70	3,80	45,91	88,40%
<i>p-adikus</i>	$X_{i+1} = [2 \cdot X_i] \text{ mod } 1$	27 975	16 973	13,15	5,59	0,174	0,00%

1. táblázat • A bemutatott leképezések és a $2 < N < 5000$ intervallumra vonatkozó statisztikai adatok (d - a ciklusok száma; d^* - a kettőnél hosszabb ciklusok száma; $n_{\text{át}}$ - a ciklusok átlagos hossza; $C_{\text{át}}$ - átlagos ciklusszám rögzített N esetén ($C_{\text{át}} = d/4999$); E - a ciklusok legközelebbi szomszédjainak átlagos távolsága; f - a távolságstatisztika ferdesége (f a (2) leképezés esetén ezt az adatot a ciklusok nagy száma miatt a $2 < N < 5000$ intervallumból számoltuk, de azt tapasztaltuk, hogy f értéke N függvényében alig változik, tehát ez jó nagyságrendi becslésnek tekinthető.); c_1 - azon ciklusok aránya, melyek rendelkeznek közeli ($\Delta < 1$) szomszédal)

negyedfokú, valamint a Ricker-modell, tágitó a diadikus, valamint a p-adikus modell. Figyeljük meg, hogy a ferdeség alapján világosan elválnak a tágitó és a kritikus ponttal rendelkező leképezések. Természetesen léteznek olyan leképezések is, melyek se nem tágitóak, se nem rendelkeznek kritikus ponttal. Ilyen esetre az itt vázolt elmélet nem ad egyértelmű útbaigazítást.

A bemutatott elmélet és a vizsgált példák alapján a biológiai alkalmazások szempontjából érdekes tanulságokat szűrhetünk le. Amennyiben a populáció dinamikája kaotikus, és azt tágitó leképezés írja le, úgy az igen érzékeny azon külső paraméterek megváltoztatására, melyek a populáció maximális létszámát szabályozzák. Amennyiben a dinamika ka-

otikus ugyan, de a leíró leképezésnek van kritikus pontja, akkor a diszkrét rendszer jóval stabilabban reagál az említett külső paraméter kis változására. Természetesen az itt említett érzékenység/stabilitás nincs közvetlen kapcsolatban a populáció létszámának véletlen megzavarásával szembeni érzékenységgel/stabilitással. Utóbbiak megállapítása további vizsgálatokat igényel.

Szerzők Scheuring Istvánnak és Tél Tamásnak mondanak köszönetet értékes javaslataikért és megjegyzéseikért. A munka az OTKA TS 049885 témája támogatásával készült.

Kulcsszavak: *populációdinamika, diszkrét leképezés, káosz, stabilitás*

IRODALOM

Brehm, Alfred (1990): *Az állatok világa*. ÁKV-Maece-nas, Budapest
 Brouwer, L[uitzen] E[lgbertus] J[lan] (Heyting, A. [ed.]) (1975): *Collected Works*. Vol.1. North Holland/American Elsevier
 Domokos Gábor – Scheuring István (2002): Random Perturbations and Lattice Effects in Chaotic Population Dynamics. *Science*. 297, 5590, (Sept. 27). 2163.
 Domokos Gábor – Szász Domokos (2003): *Ulam's Scheme Revisited: Digital Modeling of Chaotic*

Attractors Via Micro-Perturbations. Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series A. Vol. 9. No. 4. 859–876.
 King, Aaron A. – Deshmais, R. A. – Henson, S. M. – Costantino, R. (2002): Random Perturbation Effects in Chaotic Population Dynamics. *Science*. 297, 2163b.
 Rényi Alfréd (1957): Real Numbers and Their Ergodic Properties. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* 8, 477–493.
 Szépfalusi Péter – Tél Tamás (1982): *A Káosz*. Akadémiai, Budapest