A LENDÜLET ÉS A PERDÜLET ÖSSZEFÜGGÉSE A LORENTZ-TRANSZFORMÁCIÓVAL

Kuczmann Imre
Nádasi Ferenc Gimnázium, Budapest

A kvantummechanikában a lendület valamely irányú összetevőjét a hullám adott irányban vett térfüggése határozza meg. Az x összetevő például a $\partial\psi/\partial x$ deriválttól függ. Forgó mozgás esetén, polárkoordináták használata mellett a perdület z tengelyre eső összetevőjét a $\partial\psi/\partial\varphi$ derivált, vagyis a hullám φ polárszög mentén megfigyelhető viselkedése határozza meg [1]. A lendület és perdület szempontjából tehát a hullám térbeli „formája" a mérvadó. Az alábbiakban azzal foglalkozunk, hogy ez a forma a Lorentz-transzformáció esetén – áttérve egy másik vonatkoztatási rendszerre – miként változik.

Ha a hullám különböző pontjai között valamely vonatkoztatási rendszerben nincs fáziskülönbség, akkor azt hihetnénk, hogy egy másik, az előzőhöz képest mozgó vonatkoztatási rendszerben sincs. Ez esetben egy állóhullám egy másik vonatkoztatási rendszerben is állóhullám lenne, legfeljebb a relatív sebességnek megfelelően tolódna. Csakhogy a relativitáselmélet transzformációs képletei egyszerre transzformálják a tér és az idő koordinátáit, ez pedig az egyidejűség relativitásának megjelenéséhez vezet. Ha a rezgések valamely vonatkoztatási rendszerben mindenütt azonos fázisban is zajlanak, egy hozzá képest mozgó vonatkoztatási rendszerben ez nem lesz így.

Az egyidejűség relativitásának következményeivel a haladó és a forgó mozgás esetén is számolhatunk. Egy állóhullámból a megszokott Lorentz-transzformációval valódi haladó hullámot kapunk, de a forgó mozgáshoz is konstruálhatunk olyan transzformációs képleteket, amelyek a hullám ilyen jellegű átalakulását eredményezik. A transzformációk követésével közelebb kerülhetünk a de Broglie-hullám értelmezéséhez, forgó mozgás esetén pedig a perdület adagos jellegének mechanizmusát is megfigyelhetjük.

Transzformáció egyenesvonalú egyenletes mozgás esetén

Tekintsük át, hogyan transzformálják a megszokott

$$x' = \frac{x - v\,t}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \quad \text{és} \quad t' = \frac{t - \dfrac{v\,x}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \tag{1}$$

Lorentz-transzformációs képletek (x a helykoordináta, t az idő az eredeti, K vonatkoztatási rendszerben, x' és t' a K-hoz képest v sebességgel mozgó K' rendszerben, c a fénysebesség) a

$$\Psi = A\sin(\omega t) \tag{2}$$

függvényt, amely valamilyen mennyiség harmonikus változását fejezi a K vonatkoztatási rendszerben. A függvényt az egész teret kitöltő konstans amplitúdójú (végtelen hullámhosszúságú) állóhullám megadásának is tekinthetjük. Valójában az érdekelhetne bennünket, hogy egy összetettebb, Compton-hullámhosszal jellemezhető hullámtér hogyan transzformálódik, de (2) transzformációjával is fontos információt kapunk a de Broglie-hullámokról.

A K' rendszerben akkor látjuk a rezgések térfüggését tisztán, ha egy adott t' pillanatban készítünk felvételt, vagyis a K' rendszerben egyidejű eseményeket vizsgálunk. Belátható, ha a (1)-ben a t koordinátát növeljük, akkor ugyanannál a t' koordinátánál, rezgések esetén pedig ugyanannál a fázisnál akkor maradunk, ha a

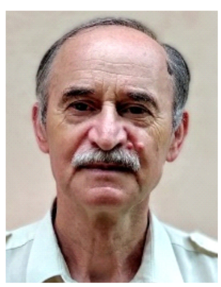
$$\frac{v\,x}{c^2}$$

tagban is egy megnövelt x koordinátát veszünk. Ha a K rendszerben T periódusidővel növelt $t+T$ időpontra térünk át, akkor K'-ben az azonos fázis megtartásához egy olyan $x+\Delta x$ koordinátájú helyre kell áttérnünk, ahol teljesül a

$$T = v\frac{\Delta x}{c^2}, \quad \text{azaz a} \quad \Delta x = T\frac{c^2}{v} \tag{3}$$

feltétel. A K' rendszerben a szomszédos, azonos fázisú helyek egymástól való távolságát keressük, ez jelent λ' hullámhosszat.

A transzformációs képletekkel azt vizsgáljuk, hogy az (x, t) adatokkal és az $(x+\Delta x,\ t+T)$ adatokkal adott eseménypár hogyan jelenik meg a K' rendszerben. Tekintettel (3)-ra, (1) alapján ezek az események a K' rendszer



Kuczmann Imre 1982-ben Pozsonyban diplomázott matematika–fizika szakos tanárként a Comenius Egyetemen, 2000-ben szintén Pozsonyban gazdasági informatikai diplomát szerzett a Közgazdasági Egyetemen. 2008 óta magyarországi középiskolákban tanít. 2019-ben PhD fokozatot szerzett az Eötvös Loránd Tudományegyetemen a Fizika Tanítása Doktori Iskola programjában a tanulói tévképzetek témakörében. GeoGebra-szimulációkat készít, amelyekkel a fizika egyes témaköreinek elsajátítását segíti.

$$\frac{x - v\,t}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}\,, \quad \text{illetve} \quad \frac{x - v\,t + \dfrac{c^2\,T}{v} - v\,T}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \tag{4}$$

koordinátájú pontjába transzformálódnak.

Távolságuk

$$\lambda' = \frac{\dfrac{T\,c^2}{v} - v\,T}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = T\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\;\frac{c^2}{v}, \tag{5}$$

ahol a

$$T' = T\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

szorzat a K' rendszerben mérhető lecsökkent periódusidő (K'-ben nagyobb a konstans x' helyen tapasztalható frekvencia, mint a K rendszerben a konstans x helyen tapasztalt frekvencia). A K' rendszerben az azonos fázisú helyek fázissebességgel mozognak, (3)-ból és (5)-ből pedig látjuk, hogy ez a sebesség c^2/v.

Az eddigiekből az látszik, hogy egy (2)-vel megadott egyszerű függvény hogyan transzformálódik Lorentz-transzformációval. De ha (5)-be egy m_0 nyugalmi tömegű kvantum

$$\frac{h}{m_0\,c^2}$$

periódusidejét helyettesítjük és figyelembe vesszük az

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

összefüggést, a

$$\lambda' = \frac{h}{m_0\,c^2}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\;\frac{c^2}{v} = \frac{h}{m\,v} \tag{6}$$

de Broglie-hullámhosszat kapjuk (általános, relativisztikus esetben). Ebből látható, hogy a de Broglie-hullámra, mint valamilyen állóhullám relativisztikus transzformáltjára tekinthetünk. (5) alapján rögzíthetjük a

$$\lambda' = T'\,\frac{c^2}{v} \tag{7}$$

összefüggést. A c^2/v fázissebesség csak a K és K' rendszerek egymáshoz viszonyított v sebességétől (és a fénysebességtől) függ, és mivel $v < c$, a fázissebesség nagyobb, mint a fénysebesség. Felírhatjuk, hogy

$$v_f v = c^2, \tag{8}$$

vagyis a fázissebesség és a két vonatkoztatási rendszer egymáshoz viszonyított v sebességének szorzata c^2 (lásd [2]-ben is).

Mérlegelésünkben a v sebességet olyan kvantum „haladási” sebességének tekinthetjük, amely a K rendszerben van nyugalomban, a K' rendszerben pedig v sebességgel mozog. Ilyenkor általában csoportsebességről beszélünk, de esetünkben nem foglalkoztunk különböző hullámhosszúságú hullámokból összetett hullámcsomaggal. A „kvantum” szóba egyébként valamilyen véges kis térfogatot kitöltő képződmény fogalmát nem célszerű beleérteni.

A K és K' rendszerekben zajló történések közti különbséget olyan ábrával szemléltethetjük, amely egy végtelen hullámhosszúságú állóhullám K' rendszerbe való transzformációját mutatja (*1. ábra*). Ez a transzformáció egy általam készített GeoGebra-szimulációban is tanulmányozható [3]. A kép felső felében egy konstans függvény „rezeg”, az alsó felében pedig e függvény K' rendszerből szemlélt képét látjuk, mint haladó de Broglie-hullámot.

A K rendszerben meglévő állóhullám K' rendszerbeli hullámmá való „gyűrődése” az egyidejűség relativitása nélkül nem lépne fel. (7)-ből látjuk, hogy ha a v sebesség a nullához tart, akkor a fázissebesség a végtelenhez tart és megszűnik a különböző helyeken fellépő rezgések közt a fáziskülönbség, visszakapjuk a végtelen hullámhosszat.

A de Broglie-hullám frekvenciája

$$\nu' = \frac{\nu_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}.$$

A $h\nu'$ szorzat a kvantum K'-beli energiája. A K rend-

1. ábra. A K rendszer végtelen hullámhosszúságú állóhulláma a [–1; 1] függvényértékek között rezeg, a K' rendszerben viszont ezt haladó hullámként látjuk.

szerben csak az időbeli periodicitásnak megfelelő $h\nu_0$ nyugalmi energia van jelen, a K' rendszerben viszont a $h\nu' = \hbar\omega'$ energia mellett a $k' = 2\pi/\lambda'$ hullámszámmal leírható térbeli periodicitás és a neki megfelelő hk' lendület (impulzus) is. Az energia és impulzus együtt négyesvektort alkot. Az $(\omega'/c;\ k')$ négyes hullámszám az $(\omega_0/c;\ 0)$ négyes hullámszám relativisztikus transzformáltja. Számítással ellenőrizhetjük, hogy ezek azonos nagyságú vektorok. Belőlük Planck-állandóval való szorzás után az $(E'/c;\ p')$ négyesimpulzus kapható, amelynek nagyságát az

$$E'^2 - p'^2\,c^2 = m_0^2\,c^4 \tag{9}$$

összefüggés mutatja gyökvonás után (bal oldalon a pszeudoeuklidészi metrika miatt a négyzetek különbsége van). A négyesimpulzus nagyságában a kvantum m_0 nyugalmi tömege szerepel. Ez a transzformáció során nem változik, ez az invariáns tömeg.

A kvantumot az ő nyugalmi rendszerében csak három dimenzióban működő sajátdinamika jellemezheti, amely az adott kvantum sajátságait hordozza és a kvantum létezési módját is tükrözi. Egy geometriai pont nem foglalhatja magában a teljes kvantumot, egy pontban legfeljebb azt követhetjük, hogy a kvantum dinamikája ott milyen tér- és időbeli változásokkal jár. A pontszerűség végtelen energiasűrűséget jelentene, ami a fizikában nem megengedett. Egy kvantum teljes hatása esetenként igen kis tartományban is jelentkezhet, de ez nincs ellentmondásban a hullámjelleggel.

A kvantumok hullámjellegének elsődlegességére a kvantumelmélet jellegéből is következtethetünk. A részecskejelleg a kvantumok megszámlálhatóságában és változatlan formában való reprodukálhatóságában merül ki (nem állíthatunk elő harmad vagy negyed elektront), de ez a részecskejelleg nem jár valamiféle véges mérettel vagy pontszerűséggel. A „részecskék” pontszerűségének gondolatától *Dirac* is elzárkózott [4].

Transzformáció egyenletesen forgó rendszerbe

Felmerül a kérdés, milyen formában jelentkezik a K inerciarendszert állóhullámként kitöltő tér olyan K' vonatkoztatási rendszerben, amely a K rendszerhez képest egyenletesen forog például a z tengely körül. Ez a forgás az x és y koordinátát érinti.

Jelentsen a (2) függvény csomófelületektől mentes háromdimenziós állóhullámot a K rendszerben. Ψ csak az időtől függ, a térkoordinátáktól nem. A K' rendszer szögsebessége legyen Ω, az O és O' kezdőpontok végig essenek egybe. A vonatkoztatási rendszerek egymáshoz viszonyított helyzetét mérjük a φ azimutszöggel. Mivel a z tengely mentén nem történik változás, a valóságnak csak egy „szeletét” vizsgáljuk, mintha csak kétdimenziós rezgést transzformálnánk.

A haladó mozgások esetén érvényes (1) transzformáció mintájára a transzformációt a

$$\varphi' = \frac{\varphi - \Omega\,t}{\sqrt{1 - \dfrac{r^2\,\Omega^2}{c^2}}} \quad \text{és a} \quad t' = \frac{t - \dfrac{r^2\,\Omega\,\varphi}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{r^2\,\Omega^2}{c^2}}} \tag{10}$$

képletekkel végezzük (nézzük a hasonló képletet [2]-ben, de hasonlítsuk össze [5] 2. fejezetével is). Az előzőekhez hasonlóan két eseményt transzformálunk, most az origótól adott r távolságban megfigyelt

$$(\varphi,\ t) \text{ és } (\varphi+\Delta\varphi,\ t+T)$$

eseményeket. Azt keressük, hogy a K' rendszerben mekkora $\Delta\varphi'$ szög választja el a szomszédos, azonos fázisú rezgéseket hordozó irányokat. A K' rendszerben egyidejű eseménypárt kell kapnunk.

Ahhoz, hogy a $(\varphi+\Delta\varphi,\ t+T)$ és $(\varphi,\ t)$ események egyidejű eseményekbe menjenek át, (10) alapján teljesülnie kell a

$$T = \frac{\Delta\varphi\ r^2\,\Omega}{c^2}, \quad \text{azaz a} \quad \Delta\varphi = T\frac{c^2}{r^2\,\Omega} \tag{11}$$

összefüggésnek. Az origótól adott r távolságban megfigyelt $(\varphi,\ t)$ és $(\varphi+\Delta\varphi,\ t+T)$ esemény (10) alapján a

$$\frac{\varphi - \Omega\,t}{\sqrt{1 - \dfrac{r^2\,\Omega^2}{c^2}}} \quad \text{és a} \quad \frac{\varphi + \Delta\varphi - \Omega\,(t+T)}{\sqrt{1 - \dfrac{r^2\,\Omega^2}{c^2}}}$$

szögkoordinátájú pontba transzformálódik. Az eltérésük, tekintettel (11)-re,

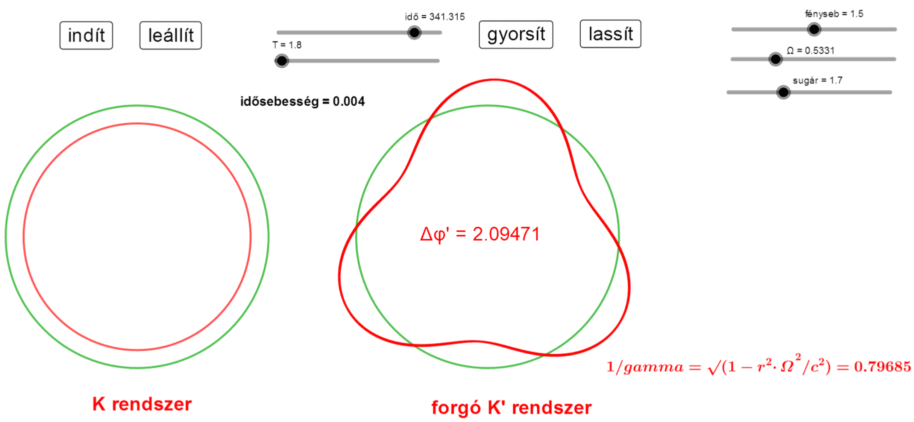
$$\Delta\varphi' = \frac{\Delta\varphi - \Omega\,T}{\sqrt{1 - \dfrac{r^2\,\Omega^2}{c^2}}} = \frac{T\dfrac{c^2}{r^2\,\Omega} - \Omega\,T}{\sqrt{1 - \dfrac{r^2\,\Omega^2}{c^2}}} =$$

$$= \frac{T\sqrt{1 - \dfrac{r^2\,\Omega^2}{c^2}}\ c^2}{r^2\,\Omega}.$$

Rögzíthetjük, hogy egy elkészített pillanatfelvételen a K' rendszerben az azonos fázist hordozó irányok szögeltérése

$$\Delta\varphi' = T\,c^2\,\frac{\sqrt{1 - \dfrac{r^2\,\Omega^2}{c^2}}}{r^2\,\Omega}. \tag{12}$$

A (12) összefüggés úgy ad meg mérőszámot a forgás hatására fellépő fáziskülönbségekre (gyűrődésre), mint a (6) összefüggés haladó mozgás esetén. A fáziskülönbségek akkor is megjelennek, ha a $\partial\psi/\partial\varphi$ derivált értéke a K rendszerben mindenütt nulla volt (a transzformált függvény értékei nem függöttek φ-től).



2. ábra. Rezgések transzformációja forgó vonatkoztatási rendszerbe.

Nézzük, mi történik, ha a K rendszerben a rezgések olyan

$$T = \frac{h}{m_0 c^2}$$

periódusidővel zajlanak, ami egy kvantum nyugalmi frekvenciájának felel meg. A (12)-be való behelyettesítés $v = \Omega r$ és

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

figyelembevételével a

$$\Delta\varphi' = \frac{h}{m_0 c^2} c^2 \frac{\sqrt{1 - \frac{r^2 \Omega^2}{c^2}}}{r v} = \frac{h}{m v r} = \frac{h}{L'} \qquad (13)$$

eredményt adja, ahol L' a K' rendszerben mérhető perdület (lásd [6]-ban a (29) képletet). Erre a haladó mozgásoknál érvényes $\Delta x' = \lambda' = h/p'$ képlet mintájára számíthattunk is. A $\Delta\varphi'$ szögeltérés a forgó K' rendszer adott t' pillanatban rögzített „pillanatfelvételén” lenne látható, ezt mutatja a *2. ábra* [3] alapján.

A K rendszerben a különböző φ szögkoordinátájú helyek közt nincs fáziskülönbség (a program egy lüktető kört mutat), a K' rendszerben viszont fáziskülönbségek jelennek meg a (10) transzformáció eredményeként, miközben a hullám forgást is végez. $\Delta\varphi'$ nagysága a két vonatkoztatási rendszer egymáshoz képest mért Ω szögsebességétől függ (állandó r esetén). Egyértelmű fázis a K' rendszerben csak bizonyos kitüntetett Ω szögsebességek beállításával kapható. Ilyenkor $\Delta\varphi'$ teljesíti a

$$\Delta\varphi' = \frac{2\pi}{n}, \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ 4 \text{ stb.} \qquad (14)$$

feltételt, ami annak kifejeződése, hogy K' rendszerben a fázis 2π szögű körülfordulás után a kiindulási értékbe tér vissza. A transzformáció eredményeként előálló (13) és (14) összefüggések együtt az impulzusmomentum kvantáltságát jelentik, hiszen

$$\frac{2\pi}{n} = \frac{h}{L'}, \quad \text{illetve} \quad L' = n\frac{h}{2\pi}. \qquad (15)$$

Szoros összefüggés van tehát a forgó vonatkoztatási rendszerbe vivő (10) transzformáció sajátságai és az impulzusmomentum kvantáltsága közt.

A *2. ábrán* a K' rendszerben $n = 3$ periódus látható ($\Delta\varphi' = 2{,}09471 \approx 2\pi/3$), amely alkalmas Ω szögsebesség mellett áll elő. Más alkalmas szögsebességek esetén más természetes n-nek megfelelő képhez jutunk. Adott r sugár mellett minél nagyobb az Ω, annál több periódusból áll a „stabil” hullámtér. A (14) összefüggés teljesítésével nem együtt járó szögsebességek esetén a K' rendszerben nem egyértelmű a fázis, önmagát zavaró a hullámtér.

Mivel egy fordított (forgó vonatkoztatási rendszerből inerciarendszerbe történő) transzformációnál hasonló viszonyokra számíthatunk, a kapott megkötést úgy is megfogalmazhatjuk, hogy egy inerciarendszerhez képest forgó vonatkoztatási rendszerben csak olyan frekvenciájú rezgések lehetnek jelen, amelyek jól illeszkednek a forgó rendszer szögsebességéhez. Jól mutatja ezt az, hogy amikor a szimulációban a T periódusidőt megváltoztatjuk, az állandósult hullámtér széthangolódik.

Összefoglalás

Leírásunkban a de Broglie-hullám, mint a kvantum nyugalmi vonatkoztatási rendszerében lévő állóhullám relativisztikus transzformáltja jelenik meg (a vonatkoztatási rendszerek kis relatív sebessége esetén is). A gondolatmenet haladó mozgások esetén a de Broglie-hullámhosszat szolgáltatja tetszőleges $v < c$ sebességre. Egyenletesen forgó vonatkoztatási rendszerre áttérve követhető, hogy a hullámtérben jelentkező fáziskülönbségek csak akkor osztói 2π-nek, ha a forgás szögsebessége jól illeszkedik a K rendszerben felvett frekvenciához. Egy kvantum nyugalmi frekvenciáját felhasználva ilyenkor a $h/2\pi$ mennyiség egész számú többszöröseit kapjuk, érzékelve a perdület kvantáltságának mechanizmusát.

Irodalom

1. Gombás P., Kisdi D.: *Bevezetés az elméleti fizikába, 2. kötet.* Akadémiai Kiadó Budapest, 1971.
2. D. Dieks, G. Nienhuis: Relativistic aspects of nonrelativistic quantum mechanics. *Am. J. Phys. 58/7* (1990) 650.
3. Kuczmann I.: https://www.geogebra.org/m/W3JSsfsF#chapter/508000
4. N. C. Petroni, J. P. Vigier: Dirac's Aether in Relativistic Quantum Mechanics. *Foundations of Physics 13/2* (1983) 253–286.
5. L. Hsu, Jong-Ping Hsu: *Exact Rotational Space-time Transformations, Davies-Jennison Experiments and Limiting Lorentz–Poincaré Invariance.* arXiv:1307.0662v1 [gr-qc] 2 Jul 2013.
6. R. D. Klauber: *New Perspectives on the Relativistically Rotating Disk and Non-time-orthogonal Reference Frames.* arXiv:gr-qc/0103076 22 Mar 2001.