

NAGYFREKVENCIÁS JELEK KÁBELBENI TERJEDÉSÉNEK FIZIKAI ALAPJAI – 2. rész

Simon Ferenc

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Fizika Tanszék és MTA–BME PROSPIN Lendület Kutatócsoport

Az első részben a nagyfrekvenciás jelek terjedésének fizikai alapjait mutattuk be. Legfontosabb ismeretek a távíróegyenletek, a kábel hullámimpedanciája (Z_0) és a kábelvégi lezáró impedancia (Z_1) szerepének fontossága voltak. Levezetés nélkül említettük, hogy a kábel végéről visszaverődést kapunk, ha a lezáró impedancia nem egyezik meg a kábel hullámimpedanciájával, azaz $Z_1 \neq Z_0$. Általános esetben a visszavert és a kábel végére érkező hullámok amplitúdójának arányára fennáll:

$$\Gamma = \frac{U_+}{U_-} = \frac{Z_1 - Z_0}{Z_1 + Z_0}, \quad (10)$$

ahol Γ a reflexiós tényező, $U_{+/-}$ a kábel vége felé haladó/visszavert hullámok amplitúdója. E képlet levezetésével a visszaverődés fizikai okát is bemutatjuk.

A Z_1 komplex értéke mellett Γ is komplex, ami azt fejezi ki, hogy a visszavert hullám fázisa nem többszöröse π -nek. Vegyük észre, hogy a két, korábban tárgyalt határesetben, azaz $Z_1 = 0$ és $Z_1 = \infty$, amikor is maximális a reflexió π , illetve 0 fokos fázistolással visszavert hullámmal. Értelemszerűen ezek a nagy amplitúdójú, visszavert hullámok okozzák a korábban bemutatott, kábel hossza menti állóhullámképet.

A (10) kifejezés a távíróegyenletekből származtatható, cikkünk első részében láttuk, hogy a

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} &= -\tilde{L} \frac{\partial I(x, t)}{\partial t}, \\ \frac{\partial I(x, t)}{\partial x} &= -\tilde{C} \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (11)$$

A szerző köszönetet mond a cikksorozat alapjául szolgáló egyetemi laboratóriumi gyakorlat leiratának elkészítésében közreműködő Gyüre-Garami Baláznak, Márkus Bencének, Fülöp Ferencnek és Halbritter Andrásnak.



Simon Ferenc fizikus, egyetemi tanár (BME), az MTA doktora. Érdeklődési területei: kísérleti szilárdtest spektroszkópia, a spintronika elméleti és kísérleti aspektusai, a fizika népszerűsítése. Legfontosabb eredményei: ESR-jel felfedezése új fémekben (MgB_2 , bórral dópolt gyémánt, alkálival dópolt grafén); spinrelaxáció egyesített elméletének kidolgozása; elektron- és magspinnel nyomjelzett szén nanocsövek előállítás. ERC- és Lendület-pályázat vezetője. 8 TDK, 31 BSc/MSc és 3 PhD témavezetője.

távíróegyenletek legáltalánosabb megoldása két, egymással szemben haladó hullám. Úgy vegyük fel az $x = 0$ lezáráson legyen, és tekintsünk harmonikus hullámokat (a nem harmonikus eset is hasonlóképpen kezelhető Fourier-sorfejtéssel). Erre az esetre a (11) távíróegyenletek megoldásai két egymással szemben terjedő haladó hullám mind a feszültségre, mind az áramra úgy, hogy a két iránybeli amplitúdók különbözők:

$$U(x) = U_0^+ e^{i(\omega t + kx)} + U_0^- e^{i(\omega t - kx)} \quad (12)$$

és

$$I(x) = \frac{U_0^+}{Z_0} e^{i(\omega t + kx)} - \frac{U_0^-}{Z_0} e^{i(\omega t - kx)}, \quad (13)$$

ahol U_0^+ és U_0^- a lezárás felé, illetve attól távolodva haladó hullám. Az áram kifejezésében vegyük észre a második tag negatív előjelét; visszahelyettesítéssel beláthatjuk, hogy ez kielégíti a távíróegyenleteket. Látható, hogy iránykomponensenként teljesül a feszültség és az áram hányadosára a hullámimpedancia nagysága, azonban a teljes feszültség és áramra nem.

Az U_- amplitúdó nagyságát abból a peremfeltételből kaphatjuk meg, hogy a megoldásnak teljesítenie kell az

$$\frac{U(x=0)}{I(x=0)} = Z_1$$

feltételt, azaz:

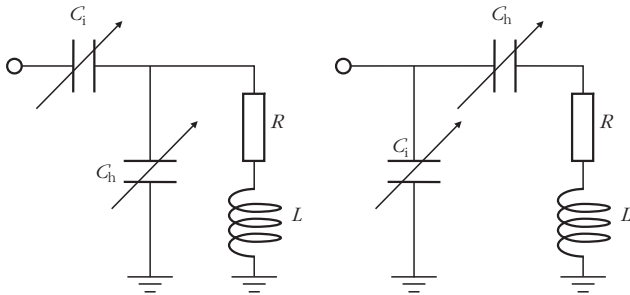
$$Z_1 = \frac{U_0^+ + U_0^-}{U_0^+ - U_0^-} Z_0, \quad (14)$$

amiből a visszavert hullám amplitúdójára:

$$U_0^- = \frac{Z_1 - Z_0}{Z_1 + Z_0} U_0^+ \quad (15)$$

adódik.

Ebből közvetlenül kapjuk a korábbiakban bevezetett Γ reflexiós tényező, ami a (10) képlet szerinti eredmény. Azt mondhatjuk tehát, hogy a kábel végén fellépő visszaverődés a peremfeltétel következménye, amennyiben a közegebeli hullámimpedancia nem azonos a lezárás impedanciájával. Itt továbbra is jól mű-



5. ábra. Kapacitív és induktív elemeket tartalmazó áramkörök, amelyek a kábel hullámimpedanciához egy adott frekvencián illeszthetők. C_i illetve C_h jelöli az impedanciaillesztő és a frekvenciahangoló állítható, úgynevezett trimmer kondenzátorokat. R a tekercs ellenállását jelöli.

ködik a cikk első részében bemutatott analógia a Fresnel-formulával, ami a különböző törésmutatójú közegek határáról való visszaverődést írja le.

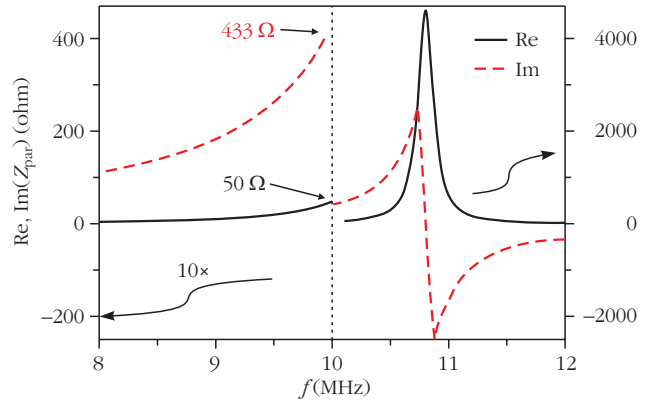
A hullámimpedancia kapcsán látjuk, hogy bár – ideális esetben (veszteség és szivárgásmentes kábelben) – ez egy valós érték, de az impedancia elnevezés használata mégis indokolt, hiszen itt nem egy valós rezisztív tagról van szó. A továbbiakban a lezáró impedancia szerepét vizsgáljuk, és megmutatjuk, hogy ez adott frekvencián – még akkor is, ha csak induktív és kapacitív elemekből állítjuk össze – valós értéket vehet fel.

A lezáró impedancia

A kábelt lezáró impedancia megvalósításának egy érdekes esetét mutatja az 5. ábra. Mindkét áramkör sajátossága, hogy segítségével egy adott frekvencián valós $50\ \Omega$ impedanciájú lezárást lehet megvalósítani, miközben jelentős rezisztív elemet – a tekercs ellenállásán kívül – nem tartalmaznak. Mindkettőt alkalmazzák a gyakorlatban is, a magmánesesrezonancia-spektruskópiában, az rádiófrekvenciás tároló áramkör (radiofrequency tank-circuit). A bal oldali ábrán mutatott áramkört használják ~ 100 MHz alatt, míg a jobb oldalit ~ 100 MHz feletti frekvenciákon.² Belátható, hogy a két áramkör egymásba transzformálható, ezért bővebben itt csak az 5. ábra bal oldalán mutatott áramkör viselkedését mutatjuk be.

Az ábrán feltüntettük a tekercs R ellenállását is, aminek értéke $1\ \Omega$ alatt van (az érték frekvenciafüggő), konkrét nagysága az áramkör viselkedését számottevően nem befolyásolja. Egy tipikus értékű, $1\ \mu\text{H}$ induktivitású vörösréztekercs ($0,5$ m hossz, 1 mm átmérőjű, vörösréz fajlagos ellenállása $\rho = 1,7 \times 10^{-8}\ \Omega\text{m}$) ellenállása 0 Hz-en mintegy $10\ \text{m}\Omega$. Azonban 10 MHz-en – az elektromágneses tér (szkineffektusból származó) véges behatolási mélysége miatt – az áram csak a

² Ennek gyakorlati oka van: nagy frekvenciákon a bal oldali áramkör impedanciaillesztéséhez szükséges kapacitásérték $1\ \text{pF}$ alatt lenne, amit az elkerülhetetlenül jelen lévő, úgynevezett szórt kapacitások dominálnak.

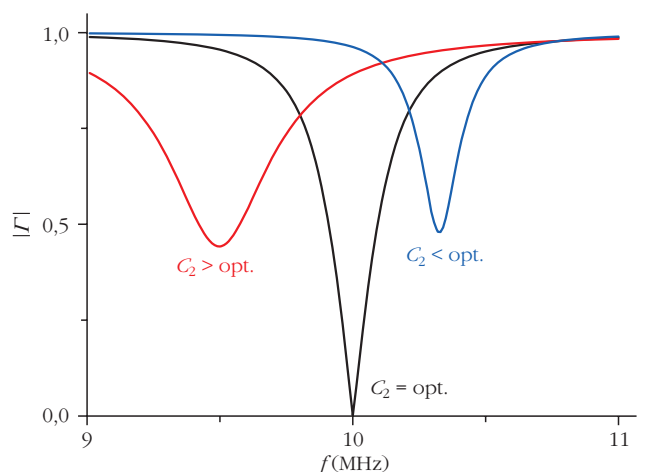


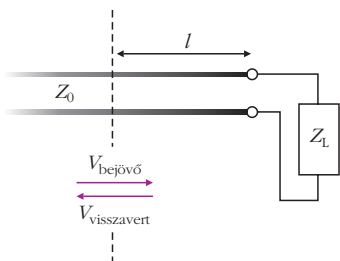
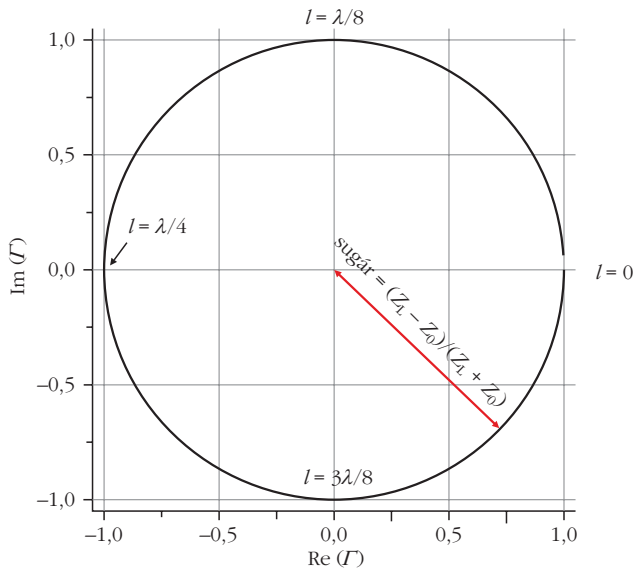
6. ábra. A szövegben tárgyalt áramkörben a párhuzamosan kapcsolt induktivitás és a C_h hangoló kondenzátor eredő Z_{par} impedanciájának valós és képzetes része. Vegyük észre, hogy 10 MHz-en a valós rész értéke $50\ \Omega$, míg a képzetes rész nagysága pozitív.

huzal felületén, körülbelül $20\ \mu\text{m}$ mélységig folyik, emiatt a tekercs nagyfrekvenciás ellenállása $100\ \text{m}\Omega$ -ra megy fel. Az áramkörben mindkét kondenzátort hangolhatóként tüntettük fel, hasonló kondenzátorok könnyedén beszerezhetők, mivel a régebbi rádiókészülékek alapvető alkatrészét képezték.

A 6. ábra mutatja az áramkörben párhuzamosan kapcsolt C_h és L eredő Z_{par} impedanciájának valós és képzetes részeit $C_h = 217\ \text{pF}$, $L = 1\ \mu\text{H}$ és $R = 1\ \Omega$ esetre. Az áramkör ezen részére 10 MHz-en az impedancia valós része $50\ \Omega$, míg a képzetes rész nagy pozitív értékű ($433\ \Omega$). Vegyük észre, hogy Z_{par} valós részének maximuma van egy rezonanciafrekvencián, ahol a képzetes rész eltűnik. A rezonanciafrekvenciától lejjebb az impedancia pozitív képzetes részét a sorba kötött $C_i = 36\ \text{pF}$ -os kondenzátor (hiszen ennek impedanciája tisztán képzetes, negatív előjelű) kompenzálni tudja. Így el tudjuk érni azt, hogy ez az áramkör valós $50\ \Omega$ impedanciát hozzon létre. A soros

7. ábra. A bemutatott áramkorról történő reflexiók tényező $|\Gamma|$ abszolút értéke a frekvencia függvényében a szövegben megadott paraméterekkel a C_i három értékére: optimális ($36\ \text{pF}$), annál kisebb ($20\ \text{pF}$), illetve nagyobb ($65\ \text{pF}$). Utóbbi két esetet nevezik alul-, illetve túlszatolt esetnek is. Vegyük észre, hogy C_i optimális értéke mellett a reflexió 0 -vá válik egy adott frekvencián, míg egyébként véges értékű marad.





8. ábra. A kábelvégről történő visszaverődés esetén kapott Smith-chart, a kör sugarának és a körív nevezetes pontjainak bejelölésével. Az ábrához tartozó kísérleti elrendezést is mutatjuk. A vízszintes és függőleges tengelyek a sugár egységeiben vannak mérve.

C_i kondenzátort *illesztőnek* nevezik, mivel ez gondoskodik az áramkör impedanciaillesztéséről, míg a párhuzamos C_h kondenzátor állítja, azaz *bangolja* az áramkör munkafrekvenciáját.

Az áramkör egy érdekessége, hogy a C_h és $R + iL\omega$ közös felső kontaktusán nagyobb a feszültség, mint az áramkörre adott kapcsolófeszültség, a konkrét esetben annak

$$\left| \frac{433i + 50}{50} \right| \approx 9$$

szerese. Tehát az áramkör feszültség-feltranszformátorként viselkedik, pedig nem tartalmaz szokványos transzformátorelemeket.

A 7. ábrán az 5.a ábra áramkörének $|\Gamma|$ reflexiós tényezőjét mutatjuk a frekvencia függvényében a C_i illesztő kondenzátor három értékére. Az optimálisan beállított C_i érték mellett a reflexió nullává válik, míg egyébként a reflexió véges értékű marad.

A Smith-chart

A *Smith-chart* egy gyakran használt grafikus segéd-eszköz az áramkörök frekvenciafüggő tulajdonságainak vizsgálatára és a felmerülő problémák szemléletes megoldására. A Smith-charton többféle mennyiség

frekvenciafüggését is megjeleníthetjük, mint például impedancia, admittancia, reflexiós tényező, állóhullámarány stb.

Első példaként egy l hosszúságú kábel végére érvényes reflexiós tényezőt mutatjuk:

$$\Gamma = \frac{V_{\text{visszavert}}}{V_{\text{bejövő}}} \quad (16)$$

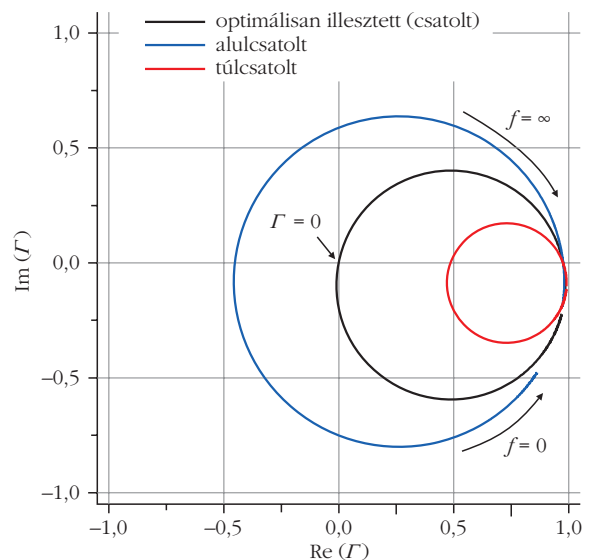
A 8. ábrán a Z_L lezáró ellenállással terhelt kábelvégről történő visszaverődés képzetes részét mutatjuk a valós rész függvényében. A Smith-chart középpontja a zérus reflexióhoz – amit csak $Z_L = Z_0$ esetén kaphatunk meg – tartozik. A kapott görbét fix frekvencia mellett a kábel l hossza parametrizálja, nevezetes pontjait, azaz amikor l a hullámhosszhoz képest megadott értékeket vesz fel, bejelöltük az ábrán. A kör sugara

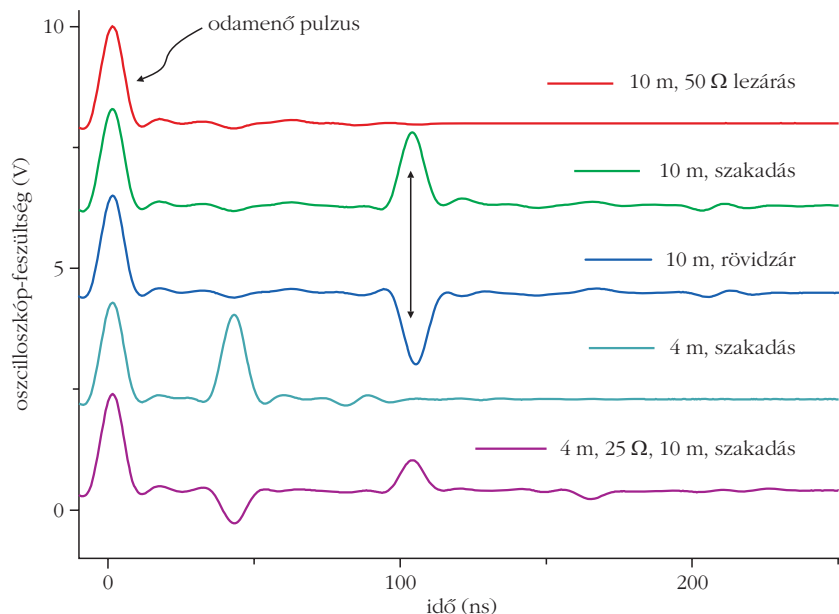
$$r = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0},$$

itt a sugár előjeles mennyiségként értendő, tehát negatív előjel esetén a $\Gamma = 0$ pontra tükröződik a kör. A reflexiós tényező valós és képzetes részait a kábel végéről visszavert jel – kiadott jelhez képesti – fázisának mérésével kaphatjuk meg.

Az 5. ábrán bemutatott áramkörrel történő lezárás esetére megadjuk a reflexiós tényezőre vonatkozó Smith-chartot (9. ábra). Ezt a görbét a frekvencia parametrizálja, az ábrán bejelöltük a 0 és az igen nagy frekvenciák határeseteit. Az áramkör illesztettségének mértékét a görbe egy adott pontjának a $\Gamma = 0$ origótól vett távolsága mutatja. Az origón áthaladó, optimálisan illesztett, illetve alul- és túlszatolt áramkörök görbéit is megadjuk. Adott áramkörre azért hasznos a reflexiós tényezőtől származtatható Smith-

9. ábra. A reflexiós tényező valós és képzetes részei egymás függvényében ábrázolva az 5.a ábrán mutatott áramkör esetére az impedanciaillesztés három esetére. A körök paramétere a frekvencia, aminek a határértékeit bejelöltük.





10. ábra. A kábelvégi visszaverődés megjelenítése oszcilloszkóppal. A kísérletekben 10 m hosszú, 50 Ω-os, koaxiális kábelt használtunk, amelynek végét különbözőképpen zártuk le. Egy másik kísérletben a kábelre 4 m után egy 25 Ω-os ellenállást tettünk, a végét pedig lezáratlanul hagytuk.

chart ábrázolása, mert így rögtön megállapítható, hogy az illesztő trimmer kondenzátor értékét növelni vagy csökkenteni kell-e.

A kábelvégi visszaverődés bemutatása idődoménben

A kábelvégi visszaverődést a cikk első részében a kábel mentén kialakuló állóhullámok detektálásával mutattuk be. Ezt a jelenséget azonban az idődoménben is kimutathatjuk. Ehhez olyan jelgenerátorra van szükség, ami nagyon rövid impulzusokat tud előállítani. Mi 20 ns-os impulzushosszat használtunk, amit 100 kHz-es frekvenciával ismételtünk. Azt találtuk, hogy ilyen rövid impulzushosszaknál nem tökéletesen éles impulzust, hanem inkább lekerekített *sync*-jel jellegű alakokat figyelhetünk meg, amit általában kis méretű hullámzások követnek. Az első rész 4. ábráján bemutatott elrendezést állítsuk össze: az impulzusgenerátor kimenetét egy rövid koaxiális kábellel kössük össze az oszcilloszkóp bemenetén lévő BNC „T”-csatlakozóval (az oszcilloszkóp bemenete legyen nagy impedanciájú), a „T” másik oldalára pedig egy minél hosszabb kábelt csatlakoztassunk (itt mi 10 m-es kábelt használunk). Az oszcilloszkópot célszerű a jelgenerátor kimenő jeléhez *triggerelni*.

A hosszú kábel végére 50 Ω-os lezárást, szakadást vagy rövidzárat tehetünk. Ennek függvényében az oszcilloszkópon a 10. ábrán bemutatott jeleket figyelhetjük meg: amennyiben a kábel végét 50 Ω-mal zárjuk le, úgy nem kapunk visszaverődést. Ha a hosszú kábel végén szakadás vagy rövidzár van, úgy visszaverődést kapunk, ennek időképletetése a pulzus visszaérkezési idejéhez tartozik. Esetünkben ez $(20 \text{ m}) / (0,65 c) \approx 100 \text{ ns}$, amit az ábrán függőleges nyíllal jelöltünk. Vegyük észre, hogy a rövidzárral történő lezárás esetén a visszavert pulzus az odamenő pulzushoz képest ellentétes irányú. Ez a laboratóriumban elvégezhető kísérlet a kábelbeni véges fénysebesség – annak kimérését is lehetővé tevő – jó demonstrációja lehet, vagy a kábelbeni fénysebesség ismeretében a kábel hosszának mérését teszi lehetővé.

Egy másik kísérletben azt is bemutatathatjuk, hogy a kábel esetleges sérülése esetén milyen eredményt kapunk. Ehhez a 10 m-es kábelt 4 és 6 m-es kábelből raktuk össze, az illesztéshez egy BNC „T”-csatlakozót használva. Amennyiben 4 m után szakadás van a kábelben, a 10. ábrán látható módon visszaverődést kapunk, amelynek időképletetése a kisebb hosszak felel meg. Amennyiben a 4 m-es pontra egy 25 Ω-os lezárást teszünk, a kábel 10 m-es végén pedig szakadás van, úgy a 4 m-es ponttól visszaverődést kapunk (ez a jel lefelé áll, ami mutatja, hogy 50 Ω-nál kisebb ellenállás van itt), de a 10 m-es ponttól egy pozitív feszültségű visszaverődést is kapunk, ami pedig szakadásra utal. Ez a kísérletsorozat azt demonstrálja, hogy egy kábelrendszer valamilyen sérülésére – azaz olyan pontok jelenlétére, ahol a kábelbeni hullámimpedancia lokálisan megváltozik – miként lehet következtetni. Kémtörténetekben erre a fajta mérésre szoktak utalni, mint olyan módszerre, ami a kábelen történő lehallgatást felderítheti, hiszen bármilyen lokális beavatkozás nyomot hagy egy vezetéken.

Ajánlott és felhasznált irodalom

Budó Ágoston: *Kísérleti fizika II.*
 Simonyi Károly: *Elméleti villamosságtan*
 David M. Pozar: *Microwave Engineering* (4th ed.)

Szerkesztőség: 1092 Budapest, Ráday utca 18. földszint III., Eötvös Loránd Fizikai Társulat. Telefon/fax: (1) 201-8682

A Társulat Internet honlapja <http://www.elft.hu>, e-postacíme: elft@elft.hu

Kiadja az Eötvös Loránd Fizikai Társulat, felelős kiadó Groma István főtítkárr, felelős szerkesztő Lendvai János főszerkesztő.

Kéziratokat nem örzünk meg és nem küldünk vissza. A szerzőknek tiszteletpéldányt küldünk.

Nyomdai előkészítés: Kármán Stúdió, nyomdai munkálatok: OOK-PRESS Kft., felelős vezető: Szathmáry Attila ügyvezető igazgató.

Terjeszti az Eötvös Loránd Fizikai Társulat, előfizethető a Társulatnál vagy postautalványon a 10200830-32310274-00000000 számú egyzárlán.

Megjelenik havonta (nyáron duplaszámmal), egyes szám ára: 900.- Ft (duplaszámé 1800.- Ft) + postaköltség.

HU ISSN 0015–3257 (nyomtatott) és **HU ISSN 1588–0540** (online)