

fizikai szemle

The background is a dense field of stars in various colors (yellow, white, blue). A faint constellation outline is visible, with two prominent black circles placed over the stars, resembling eyes. The overall effect is a face-like appearance in the starry sky.

2016/4

MEGHÍVÓ

A MAGYAR NUKLEÁRIS TÁRSASÁG

A RENDEZVÉNY
HELYSZÍNE:

ELTE TTK

1117 BUDAPEST,
PÁZMÁNY PÉTER
SÉTÁNY 1/A,
ÉSZAKI TÖMB,
PÓCZA JENŐ TEREM (L.71)

CSERNOBIL – 30 ÉV TÁVLATÁBÓL RENDEZVÉNYÉRE

IDŐPONT:

2016.

ÁPRILIS 21.

CSÜTÖRTÖK
17.00 ÓRA

mnt

17.00 | **KÖSZÖNTŐ: ÖRDÖGH MIKLÓS, MNT ELNÖK**

17.10 | **PROF. SZATMÁRY ZOLTÁN (BME NTI): 30 ÉVVEL CSERNOBIL UTÁN**

17.50 | **CSERHÁTI ANDRÁS (MVM PAKSI ATOMERŐMŰ ZRT.): CSERNOBIL – SZEMÉLYESEN**

18.30 | **KÖTETLEN BESZÉLGETÉS**

A RENDEZVÉNYRE MINDEN ÉRDEKLŐDŐT SOK SZERETETTEL HÍVUNK ÉS VÁRUNK!

Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat havonta megjelenő folyóirata.

Támogatók: a Magyar Tudományos Akadémia Fizikai Tudományok Osztálya, az Emberi Erőforrások Minisztériuma, a Magyar Biofizikai Társaság, a Magyar Nukleáris Társaság és a Magyar Fizikushallgatók Egyesülete

Főszerkesztő:

Szatmáry Zoltán

Szerkesztőbizottság:

Bencze Gyula, Czitrovszky Aladár, Faigel Gyula, Füstöss László, Gyulai József, Horváth Dezső, Horváth Gábor, Iglói Ferenc, Kiss Ádám, Németh Judit, Ormos Pál, Papp Katalin, Simon Péter, Sükösd Csaba, Szabados László, Szabó Gábor, Trócsányi Zoltán, Ujvári Sándor

Szerkesztő:

Lendvai János

Műszaki szerkesztő:

Kármán Tamás

A folyóirat e-mail címe:

szerkesztok@fizikaiszemle.hu

A lapba szánt írásokat erre a címre kérjük.

A beküldött tudományos, ismeretterjesztő és fizikatanítási cikkek a Szerkesztőbizottság, illetve az általa felkért, a témában elismert szakértő jóváhagyó véleménye után jelenhetnek meg.

A folyóirat honlapja:

<http://www.fizikaiszemle.hu>



A címlapon:

A GW150914 jelű – elsőnek megtalált – gravitációs hullám forrásának valószínű, de számítógép által generált képe. Ha a 36 és 29 naptömegű fekete lyukak közelébe utaznánk egy űrhajóval, akkor ez a kép tárulkozna elénk, pontosan 0,1 másodperccel a két fekete lyuk összeolvadása előtt. A csillagok égi eloszlása egyenletes és véletlenszerű, a kialakuló furcsa elrendeződés csak a két nehéz objektum gravitációs lencsehatásának következménye.

<i>Frei Zsolt: Vadászat a gravitációs hullámokra – 3. rész</i>	110
<i>A gravitációs hullámok lehetséges asztrofizikai forrásai</i>	
<i>Máté Mibály, Nguyen Quang Chinh: Ragasztószalagok leválásának dinamikája: sebességfüggés és instabilitás</i>	116
<i>Mennyi fizikai érdekesség van néhány centi ragasztószalag letekerésében</i>	
<i>Laczik Bálint: A pörgettyű történetéhez – 1. rész</i>	123
<i>Érdekességek és szépségek a pörgettyűk kultúr- és technikatörténete kapcsán</i>	
A FIZIKA TANÍTÁSA	
<i>Gruiz Márton, Meszéna Tamás, Tél Tamás: Kaotikus vagy csak összetett? Labdák pattogása lépcsőn</i>	128
<i>Kaotikus-e a lépcsőn pattogó labdák mozgása?</i>	
<i>Radnóti Katlin: A hipotézisalkotás szerepe a fizika oktatásában</i>	136
<i>A szerző hipotézise, hogy a hipotézisalkotás fontos segítség lehet a fizika tanításában</i>	
HÍREK – ESEMÉNYEK	
<i>MTA doktori védés – Nguyen Quang Chinh</i>	122
<i>A majdnem örök élet titkának tudója</i>	142
<i>– Kugler Sándorné, 1908–2016 (Patkós András)</i>	
<i>Búcsú Kugler Sándorné tanárnőtől (Kovács László)</i>	143
<i>Kitüntetések március 15. alkalmából</i>	144
<i>Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat 2016. évi Küldöttközgyűlése</i>	144
<i>Európai érdekességek a Europhysics News válogatásában (2015. július–augusztus)</i>	144

Zs. Frei: Gravitational waves – Part 3: Potential sources of gravitational waves

M. Máté, N. Q. Chinh: Physics of adhesive tape unwinding

B. Laczik: History of gyroscopes – Part 1

TEACHING PHYSICS

M. Gruiz, T. Meszéna, T. Tél: Chaotic or just complex? Bouncing of balls on stairs

K. Radnóti: The role of hypothesis creation in teaching physics

EVENTS



VADÁSZAT A GRAVITÁCIÓS HULLÁMOKRA – 3. RÉSZ

A gravitációs hullámok lehetséges asztrofizikai forrásai

Frei Zsolt
ELTE Atomfizikai Tanszék

Sorozatunk utolsó részében áttekinthetem azokat a lehetséges asztrofizikai forrásokat, amelyek gravitációs hullám-forrásként szolgálhatnak. Ha ezek fizikája valamelyest tisztázott, akkor érthetjük meg, hogy az adott, várt jelalak észleléséhez milyen detektorok a legcél-szerűbbek, illetve milyen kereső-algoritmusok szükségesek.

Mielőtt részletezem a fizikai folyamatokat, meg kell jegyezni, hogy az asztrofizikában a gravitációs hullámok észlelése jelentősen új felfogást és mérési technológiát igényel. A 2. táblázatban összefoglaltam a leglényegesebb különbségeket a szokásos elektromágneses hullámok detektálásához képest, amelyek megkülönböztetik e két kölcsönhatást. Mivel a fény (vagy az elektromágneses sugárzás más spektrumtartományai, mint amilyen az infravörös, ultraibolya, rádió- vagy akár a röntgentartományok) a forrás méretéhez képest rövid hullámhosszú, az anyagon nehezen áthatoló információt hordoznak, ott megfelelően irányított távcsövekkel 2D-s intenzitástérképeket (fényképeket) kell készíteni. Ezzel szemben a gravitációs hullámok bármely irányból érkehetnek a detektorba, jelentősen hosszabb a hullámhosszuk stb. Mint láttuk, tömegrezonátorokkal vagy interferométerekkel észlelhetők, és egy egydimenziós idősröböl kell szó szerint kibámozni az információt.

Az előző hónapban nagyságrendi becslést adtunk arra, hogy a nagy tömegű (gyorsuló) objektumok milyen gravitációs hullám-jele várható. Itt konkrétan felsorolom azokat az asztrofizikai jelenségeket, amelyek – legjobb tudásunk szerint – gravitációs hullámokat keltenek. Ezeket két nagy kategóriába szokták sorolni. Az első kategória az *átmeneti* (tranziens) jelek kategóriája. Ebbe tartoznak azok a csillagászati jelenségek, amelyek rövid időn keresztül tartó folyamatban bocsátják ki a várt hullámokat. Ilyenek a kettős neutroncsillagok, kettős fekete lyukak, esetleg fekete lyuk és neutroncsillagok *összeolvadásai*. Ilyen jelet észlelt most, 2015. szeptember 14-én először a LIGO is. Hasonlóan tranziens jelet várunk csillagok összeomlása (szupernóvák) során, de ilyen produkálhat egy perturbált fekete lyuk, egy pörgő neutroncsillag instabilitása vagy egy gamma-felvillanás is. A második

nagy kategóriába a *folyamatosan* kibocsátott jelek tartoznak. Ilyenek lehetnek a pulzárak által kibocsátott periodikus jelek vagy a külön fel nem bontott források *sztochasztikus* járuléka, sőt az ősrobbanásból származó jel is.

Megjegyzendő, hogy a LIGO 2-2, összesen 4 munkacsoportban dolgozva keresi ezeket a jeleket. A tranziens jelek keresésére alakult a *CBC* (compact binary coalescence), azaz összeolvadó kompakt kettősök jelet kereső csoport, illetve a *burst* (egyéb „felvillanásokat”, tranzienseket) kereső csoport. Bár a CBC csoport 2-3 nap után megállapította a 2015. szeptember 14-én észlelt jel forrásául szolgáló kettős rendszer paramétereit (29 és 36 naptömegű fekete lyukak stb.), a jel első felfedezését a burst csoport szolgáltatta, hiszen a teljes észlelt jelalak mindössze 0,2 másodpercig tartott, azaz teljesen „burst”-szerű volt. A folyamatosan kibocsátott jelek keresése is két munkacsoportban folyik, külön a hosszan fennmaradó periodikus jelek keresése (*CW*, azaz continuous wave csoport), illetve külön a *sztochasztikus* háttér keresése.

Természetesen mindkét nagy kategóriában vannak olyan folyamatok, amelyek rövidebb hullámhosszú, a földi detektorokkal is mérhető jelet produkálnak (például az átmeneti jelek esetén kisebb fekete lyukak összeolvadása), és olyanok is, amelyek észleléséhez a nagy hullámhossz miatt úrdetektorokra lesz szükség (a példánál maradva: szupernagy tömegű, galaxisok közepén található fekete lyukak összeolvadása).

Az általános relativitáselmélet jóslata szerint gyorsuló (nyilván nagy) tömegek jele várható. Ezek közül a legismertebb a már többször említett kisméretű, nagy tömegű, egymás felé gyorsan spirálózó és összeolvadó objektumok jele. Az ilyen kompakt kettős rendszerek összeolvadása során időben három szakaszt különböztetünk meg, mindhárom szakasz során várható gravitációs hullám-jele. Az *első* szakasz a *befelé spirálózás*. Ebben a szakaszban a két objek-

2. táblázat

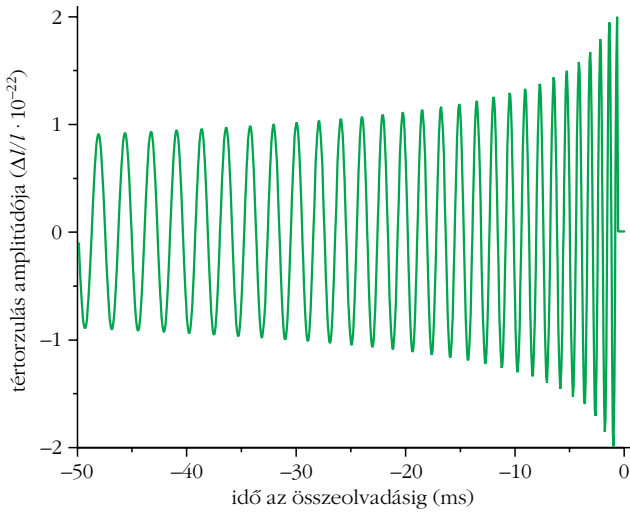
Az elektromágneses és a gravitációs hullámok tulajdonságainak összehasonlítása

elektromágneses hullámok	gravitációs hullámok
kis hullámhossz	nagy hullámhossz
elnyeli, szórja az anyag	nincs árnyékolás
MHz vagy fölötte	kHz vagy alatta
intenzitást kell mérni	amplitúdót kell mérni
kicsi a detektorok látószöge	(szinte) minden irányból jöhet

Az elektromágneses hullámok és a gravitációs hullámok észlelése merőben eltérő technikát követel meg, ugyanis a fent összefoglalt tulajdonságok jelentősen különböznek.



Frei Zsolt fizikus, az MTA doktora, az ELTE Atomfizikai Tanszék tanszékvezető egyetemi tanára, az Akadémia Lendület Asztrofizikai Kutatócsoport vezetője. Asztrofizikát, kozmológiát és képfeldolgozást tanít. Több mint száz nemzetközi publikáció és számos magyar nyelvű ismeretterjesztő cikk szerzője. *Inflációs kozmológia* címmel *Patkós András*sal közösen egyetemi tankönyvet írtak.



9. ábra. Két, egyenlő tömegű ($1,4 M_{\odot}$) neutroncsillag egymás felé spirálózása során, az összeolvadás előtti legutolsó fázisban várható gravitációshullám-jel alakja, a „tankönyvi” eset. A $t = 0$ időpont a legbelső stabil körpályához (ISCO-hoz) tartozik, és ehhez az időponthoz közelítve a jel frekvenciája és amplitúdója is növekszik, a szövegben leírt módon (lásd a (11) és (12) arányosságokat). Az ábra [1]-ből lett adaptálva.

tum már nagyon közel van egymáshoz, és a közös tömegközéppontjuk körüli kepleri pálya folyamatosan és jelentősen szűkül (innen a *spirál* kifejezés), mert folyamatosan gravitációs hullámokat bocsátanak ki, és ezáltal folyamatosan energiát veszítenek. Jelenlegi értelmezésünk szerint az összeolvadás előtti utolsó szakaszban ez a folyamat az, amely a legnagyobb energiavesztést és végső soron az összeolvadást eredményezi (míg például egy korábbi szakaszban, amikor a két objektum távolabb van egymástól, az energiavesztés oka lehet a csillagközi gázban elszenvedett súrlódás vagy úgynevezett dinamikai súrlódás is). A tavaly szeptemberben észlelt jelet keltő fekete lyukak például 0,2 másodperc alatt kerültek 600 km távolságból egymás közvetlen közelébe, azaz 200 km távolságra, amikor horizontjaik már összeértek.

A kompakt kettősök összeolvadásának *második* szakasza maga az összeolvadás. A *harmadik* szakasz az összeolvadt egyetlen fekete lyuk csillapodási fázisa, amikor az esetleges aszimmetrikus és forgó tömegeloszlás még jelet bocsáthat ki. Angol kifejezéssel ezt a szakaszt *ringdown*-nak nevezi a szakirodalom. Ezt is sikerült most megfigyelni, ennek a szakasznak a tanulmányozásából állapítható meg az összeolvadás eredményeként keletkező fekete lyuk tömege (a jelen esetben 62 naptömeg).

Az első szakasz során a kepleri pályák bomlása az úgynevezett *legbelső stabil körpályáig* tart (*innermost stabil circular orbit*, ISCO). Jól ismert, hogy a pályák szűkülése közben a gravitációshullám-jel *f* frekvenciájának időfüggése, az ISCO-tól visszafelé számítva a t időt:

$$f \sim M^{-5/8} t^{-3/8}, \quad (11)$$

miközben az jel amplitúdójának változását a két objektum d távolságának függvényében az

$$A \sim \frac{M^{5/4}}{t^{1/4} d} \quad (12)$$

írja le. A fenti két képletben az M tömeg a két összeolvadó (M_1 és M_2) tömegekből az

$$M = \frac{(M_1 M_2)^{3/5}}{(M_1 + M_2)^{1/5}}$$

módon számolható. Ebben az első szakaszban egy tipikus, a földi LIGO obszervatórium által is mérhető jel alakját a 9. ábra mutatja. Nagy meglepedéssel töltötte el a kutatáson dolgozó fizikusokat, hogy a most talált feketelyukkettős pontosan ilyen jelet produkált, igaz más paraméterekkel, mint az itteni a „tankönyvi” ábránkon látható (vesd össze az elmúlt havi cikk 4. ábráját a 9. ábrával).

Ha az aLIGO érzékenységgel számolunk (körülbelül 450 Mpc optimális égi irány és pályaorientáció esetén, 200 Mpc ezekre átlagolva, neutroncsillag-kettősökre) akkor az éves észlelési gyakoriság 1–800 lesz. A kettős fekete lyukak esetén (mivel azok tömege nagyobb lehet) az aLIGO észlelési gyakorisága 30–4000 évente. Ezek a ráták nem tartalmazzák a csillagokban legsűrűbb tartományokból, a gömbhalmazokból várható események számát. Újabb becslések arra utalnak, hogy ha a gömbhalmazokat is precízen figyelembe vesszük, akkor a ráták akár egy nagyságrendet is emelkedhetnek. A most történt felfedezés mindenképpen bizakodásra ad okot.

Vizsgálhatjuk a szupernagy tömegű fekete lyukak összeolvadásából származó jeleket is. Ebben az esetben a (11) arányosságból látható, hogy például hat nagyságrenddel nagyobb ($10^6 M_{\odot}$) tömegekkel számolva a várható jelfrekvencia körülbelül négy nagyságrenddel lesz kisebb, és éppen ezeken jelek észleléséhez szükséges feltétlenül a LISA űrdetektor, amelynek maximális érzékenysége – a múlt havi 8. ábrán látható módon – pontosan négy nagyságrenddel alacsonyabb frekvencián van, mint a LIGO esetén. Természetesen (12)-ből látszik, hogy a várható jel amplitúdója jóval nagyobb lesz $10^6 M_{\odot}$ esetén, mint M_{\odot} -nél, ezért a LISA érzékenysége nem kell elérnie a földi LIGO érzékenységet.

A harmadik szakaszban van még olyan, számunkra jól érthető jel, amelynek megtalálásában – az egyébként nagyon zajos detektorjelben – reménykedhetünk. Ez a fekete lyukak csillapodási fázisa, amely nyilván akkor áll elő, amikor az összeolvadásban legalább az egyik részt vevő fekete lyuk, vagy amikor az összeolvadás eredményeképpen – például két neutroncsillagból – fekete lyuk jön létre. Hasonlóan, a szupernóva-robbanásokban is keletkezhet fekete lyuk, és az ott keletkező fekete lyukak esetén is várunk ilyen csillapodási fázist.

A pontos relativitáselméleti számolások eredményeképpen megkapható jelalak jól közelíthető egy

egyszerű, időben exponenciálisan csillapodó szinuszhullámmal:

$$b(t) = b_0 \exp\left(-\frac{\pi f t}{Q}\right) \cos(2\pi f t), \quad (13)$$

ahol természetesen $t \geq 0$ és $Q \approx 2(1-a)^{-9/20}$, itt a a spint jellemző dimenziótlán paraméter ($a = 0$ nem forgó, Schwarzschild-féle fekete lyukak és $a = 1$ maximálisan forgó, Kerr-féle fekete lyukak esetén).

A (13)-ban szereplő két fontosabb mennyiség, a frekvencia és az amplitúdó tömeg- és spinfüggése:

$$f \approx 32 \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-1} (1 - 0,63 \cdot (1-a)^{3/10}) \text{ kHz}$$

és

$$b_0 = \frac{6 \cdot 10^{-21}}{Q \sqrt{1 - 0,63 \cdot (1-a)^{3/10}}} \left(\frac{d}{\text{Mpc}}\right)^{-1} \left(\frac{M}{M_\odot}\right) \left(\frac{\epsilon}{0,01}\right)^{1/2},$$

ahol ϵ a gravitációs hullámok formájában kibocsátott energia és M^2 hányadosa, d pedig a forrás távolsága a detektorunktól mérve.

A fenti képletekből következik, illetve ezekkel teljesen összhangban van, hogy a 2015 szeptemberében észlelt esemény 62 naptömegű fekete lyuka a lecsengés során körülbelül 250 Hz-es jelet keltett. Távolsága is megbecsülhető, körülbelül 400 Mpc, azaz 1,2 milliárd fényév. Ugyancsak a fenti két képlet számcszerű kiértékeléséből látszik, hogy a földi obszervatóriumok érzékenységének maximuma a 10–600 M_\odot tartományba eső fekete lyukak esetén van, és egy tipikus, 10 M_\odot fekete lyuk csillapodásából származó jel erőssége körülbelül $2 \cdot 10^{-21}$, ha a forrás távolsága néhányszor 10 Mpc.

Nagyon lényeges itt megjegyezni, hogy azok a folyamatok, amelyeket eddig ebben a szakaszban áttekintettünk, képezik a gravitációs-hullám-kutatás legfontosabb területét. A jelenleg működő földi detektorok elsősorban a kisebb tömegű kompakt kettősök összeolvadásának első szakaszából származó (a 9. ábrán illusztrált formájú) jeleket keresik a detektorok kimenetén, úgynevezett *matched filtering* eljárással. Ennek lé-

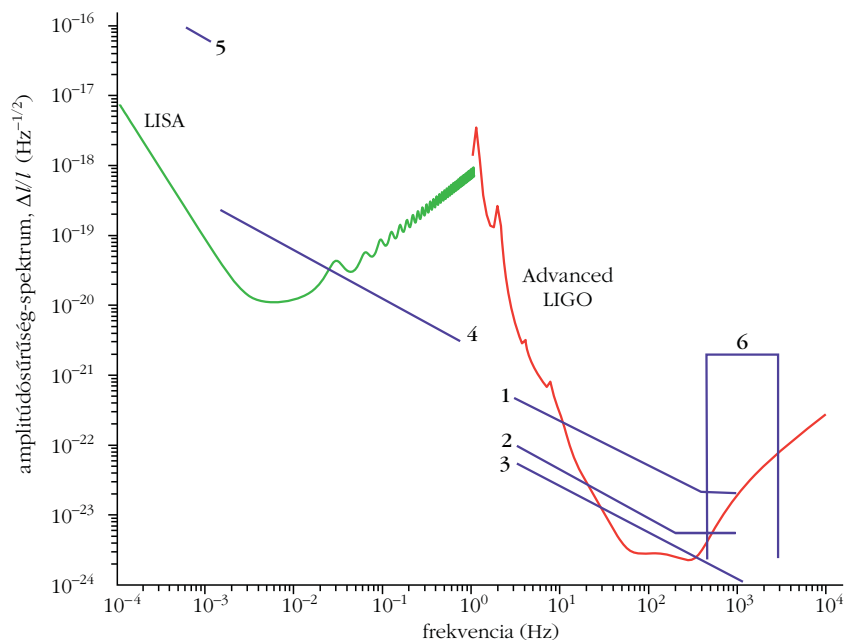
nyege, hogy az ismert jelalakot korreláltatják a detektor jelével. A LIGO jelenleg körülbelül negyedmillió előre kiszámított „template”-et használ ehhez.

Röviden érdemes összefoglalni azonban az egyéb forrásokból származó jeleket, illetve az ezek kimutatására a jövőben tervezett erőfeszítéseket is. A 10. ábrán ismételtelen feltüntettük az aLIGO és a LISA tervezett űrdetektor érzékenységi görbéjét, és lila színnel bejelöltük az ebben a szakaszban tárgyalt források jelet (várható amplitúdóját és frekvenciáját) is. A LISA kisebb frekvenciákon fog dolgozni, és – kisebb érzékenysége ellenére is – várhatóan rendszeresen fog szupernagy tömegű fekete lyukak összeolvadásából vagy ilyenek által kisebb lyukak befogásából származó jeleket észlelni.

Természetesen ezzel nem ért véget azon asztrofizikai jelenségek sora, amelyek gravitációs hullámok forrásaiként szolgálnak. A most következő néhány bekezdésben említést teszünk olyanokról, amelyek a teljesség kedvéért ide kívánkoznak.

Elsőként említendő, hogy a szupernóvák fenti tárgyalásakor csak a kataklizma eredményeképp létrejövő fekete lyuk *lecsengése* során kibocsátott hullá-

10. ábra. Itt – ugyanabban a frekvencia–amplitúdósűrűség-spektrum tartományban, mint a 8. ábrán – felrajzoltuk a nagyobb földi detektorok és a LISA űrdetektor érzékenységi tartományát, és számozva (lila színnel) azokat a frekvencia–amplitúdó értékeket, ahol a különböző asztrofizikai forrásokból származó jelek várhatók. Az 1. egyenes a 10 naptömegű fekete lyukak összeolvadásából származó jelet mutatja, ha azok tőlünk mért távolsága 100 Mpc. A 2. egyenes ugyanilyen tömegű, 200 Mpc távolságú fekete lyuk és neutroncsillag összeolvadásából származó jel. Látható, ha a távolság nő és a tömegek is kisebbek, akkor a jel amplitúdója csökken. A 3. egyenes ugyancsak kompakt objektumok, neutroncsillagpárok összeolvadásából jön, ha azok távolsága 200 Mpc. A 2. és a 3. egyenes tehát abban különbözik egymástól, hogy a 3. egyeneshez tartozó források még kisebb tömegűek, így a jelerősség tovább csökken. Ebben a magasabb frekvenciájú tartományban adhatnak jelet a szupernóvák (a 6. vonal által határolt tartományban valahol). Alacsonyabb frekvencián kapunk jelet szupernagy tömegű fekete lyukak összeolvadásából. A 4. egyenes a $z = 1$ távolságban lévő, $10^6 M_\odot$ méretű fekete lyuk által befogott $10 M_\odot$ méretű fekete lyuk jele, az ennél sokkal erősebb és még alacsonyabb frekvenciánál lévő 5. egyenes pedig $10^6 M_\odot$ méretű feketelyukpárok összeolvadásából származó jel. Az 1–5. vonalak helyét az ábrára [2] alapján rajzoltam fel, a 6. tartomány [3]-ból származik (és megjegyzendő, hogy nem a szövegben később leírt magösszeomlási folyamathoz, hanem a létrejövő fekete lyuk lecsengéséhez tartozó jel erősségét és frekvenciáját jelöli).



mokkal foglalkoztam (mert azok megegyeznek a kompakt objektumok összeolvadása útján létrejövő fekete lyukak lecsengése során keletkező hullámokkal). Természetes azonban, hogy a nagy tömegű csillagok fejlődésének végső szakaszában, amikor a vas-mag összeomlik, az feltételezhetően nem gömbszimmetrikus, a csillag közepe felé gyorsuló anyag is kelt már gravitációs hullámokat. A nagyobb tömegű csillagok a II. típusú szupernóva-robbanás során vagy neutroncsillagot, vagy fekete lyukat hagynak maguk után, ez a fejlődés végállapota. Amikor a vasat tartalmazó magban a degenerált elektrongáz már nem tud ellentartani a külső rétegek rá nehezedő nyomásának, akkor az összeomlik, majd elképzelhető, hogy neutronok degenerált állapotban meg tudják állítani ezt a folyamatot (ekkor jön létre egy neutroncsillag), de az is, hogy ha a csillag kezdeti (főágbeli) tömege kellően nagy (az irodalom 25–40 naptömeget említ), akkor nincs ismert folyamat, amely az összeomlást megállítaná, és a középontba zuhanó anyagból fekete lyuk lesz. Óvatos számítások szerint egy akár kicsit is aszferikus összeomlás során körülbelül 1 naptömegnyi anyag gyorsulhat a fénysebesség negyedére, és ez nyilván hasonló amplitúdójú gravitációs hullámokat kelthet, mint a kompakt fekete lyukak összeolvadása.

A fizikai folyamat modellezése bonyolult, ezért nem feltétlenül ismert az így létrejövő gravitációs hullámok formája. Az irodalom részletesen foglalkozik a lehetőségekkel, általában forgó, tengelyszimmetrikus magok összeomlására egyszerűsítve a problémát. Az ilyen modellezések során több szabad paraméterrel számolnak (ilyenek a mag differenciális rotációjának skálahossza, a forgáshoz rendelt kinetikus energia, vagy az anyagot jellemző adiabatikus index). Mindezek különböző megválasztásával egész görbesereg adható a gravitációs hullám amplitúdójának időbeli lefutására. Itt ezekkel tovább nem foglalkozom, de megemlítem, hogy a görbesereg tanulmányozása során levonható az a következtetés, hogy a csillagmagok összeomlásából várható gravitációshullám-jelek tipikus frekvenciája a 50–3000 Hz tartományba esik, amplitúdója pedig $2 \cdot 10^{-23}$ – $4 \cdot 10^{-20}$ nagyságrendű, ha a távolság 10 kpc. Levonható tehát a következtetés, hogy a földi detektorok képesek lennének ilyen hullámokat érzékelni, ha azok a Tejútrendszerben bekövetkező szupernóváról indulnának. Elfogadott becslések szerint ezek gyakorisága 0,02 évente, azaz nem ettől a fajta forrástól várjuk a legtöbb észlelhető gravitációs hullámot.

A *második* fontos, említést érdemlő forrásfajta a gamma-felvillanások kibocsátásához köthető. Az irodalom megkülönböztet rövid és hosszán tartó felvillanásokat (2 s a határ a kettő között). Az érkező fotonok energiája hatalmas, 1 keV – 100 MeV. Az 1960-as évek végén történt felfedezésük óta már sok ilyen sikerült megfigyelni, ma naponta átlagosan egyet észlelnek. Eloszlásuk az égen izotrop, és sikerült optikai megfelelőket is megfigyelni. Ezek tanulmányozása alapján gondoljuk, hogy legalábbis a hosszú lefutású

felvillanások eredete extragalaktikus (akár $z = 1$ is lehet a távolság, de van közelebbi, 35 Mpc távolságban található forrás is).

Egyes optikai megfelelők megfigyelése arra enged következtetni, hogy a gamma-felvillanások származhatnak szupernóva-robbanásokból (például a GRB030329 optikai megfelelője az Ic típusú szupernóvák spektrumát mutatta). Ebben az esetben (pláne, ha távoli, extragalaktikus eredetű szupernóvákról van szó) a gravitációshullám-jelek megfigyelésének valószínűsége nem nagyobb, mint a fent tárgyalt szupernóvák esetén. Ennek ellenére megemlíteném, hogy az irodalom olyan elemzéseket is közöl, amelyek szerint a gamma-felvillanásokból származó fotonok erősen irányítottak (egy szűk nyaláb mentén hagyják el a forrást). Ha ez igaz, akkor nyilván sokkal több ilyen felvillanás van, mint amennyit mi észlelünk (amikor a nyaláb éppen a Föld felé irányul). Ezeket viszont gravitációshullám-tartományban nyilván észlelhetnénk, hiszen a gravitációs hullámok nem csak egy szűk irányban lesznek kibocsátva. Mivel a hullámalak nem ismert, ezek megfigyelésére csak a több földi obszervatórium jelének összehasonlítása útján, koincideneciák keresésével van esélyünk.

A *harmadik* fontos terület – amely eddig nem szerepelt ebben a cikkben – a sztochasztikus jelek témaköre. A nagyszámú, távolabbi kompakt kettős rendszerek fel nem bontott jele, a véletlenszerű téridő-fluktuációkból származó hullámok, valamint a korai Univerzum járuléka adja a sztochasztikus háttérrel. Jelenlegi nézőpontunk szerint a kompakt kettősök fel nem bontott jele (mivel távoliak, de a közelebbi kettősök jele jól tanulmányozható) egyszerűen értéktelen zajnak tekinthető. Lényeges lenne viszont észlelni a korai Univerzumból származó információt.

Az asztrofizikában rendkívüli jelentőségű a *Penzias* és *Wilson* által 1965-ben felfedezett kozmikus mikrohullámú háttérsugárzás. Ennek tanulmányozásával sok információt szerezhettünk a korai Univerzumból, sőt a háttérsugárzás fluktuációinak spektrumából (a WMAP és a Planck-űrszondák mérései alapján) a kozmológiát jellemző paraméterek precíz meghatározására is lehetőségünk nyílt a közelmúltban. Ezek a hullámok az Univerzum 380 000 éves korában csatolódtak le az anyagról, információt tehát erről a korszakról hordoznak.

Ezzel ellentétben a korai Univerzumból származó gravitációshullám-jelek az Univerzum 10^{-25} – 10^{-15} s-os korából származnak, azaz sok nagyságrenddel korábbi időszakba adhatnak bepillantást. A kauzalitást megkövetelve kiszámítható, hogy egy adott detektor által mérhető gravitációs hullám milyen korszakból származik. Nyilvánvaló ugyanis, hogy a korai Univerzumban keletkező gravitációs hullám hullámhossza nem lehet nagyobb a korai Univerzum horizontjánál. Mivel például az aLIGO karjainak hossza ismert, kiszámítható az, hogy mikor volt körülbelül ekkora az Univerzum horizontja (körülbelül $t = 10^{-25}$ s). Hasonlóan, a sokkal hosszabb karokat tartalmazó tervezett LISA későbbi (körülbelül $t = 10^{-15}$ s) korszakból származó hullámokat mérhet.

A sztochasztikus gravitációshullám-háttér mértékét az Univerzum kozmológiai Ω paraméteréhez való hozzájárulásként adjuk meg (ma azt gondoljuk, hogy $\Omega_{\text{total}} = 1$ és $\Omega_m \approx 0,3$, $\Omega_\lambda \approx 0,7$). A gravitációs hullámok $\Omega_g(f)$ hozzájárulása az az energiasűrűség (az Univerzum kritikus sűrűségének mértékében), amely az f frekvenciaoktávban mérhető. Ω_g és a mérhető hullám amplitúdója között egyszerű összefüggés áll fent:

$$b \sim \frac{\sqrt{\Omega_g(f)}}{f}.$$

Ω_g értékét az aLIGO potenciálisan 10^{-10} mértékig tudja majd mérni 2-3 éven belül. Ezen a területen hasonló lesz a LISA érzékenysége is, de például a tervezett *Big Bang Observer*; BBO műhold pontosan arra a célra lesz optimalizálva, hogy Ω_g -t minél érzékenyebben mérhesse.

A korai Univerzumban kétféleképpen keletkezhetnek gravitációs hullámok. Köztudott, hogy az ősröbbanás elméletének mára elfogadott és szükséges kiegészítése az infláció. Ez ad magyarázatot az ősröbbanás által felvetett három problémára: a horizontproblémára, a finomhangolás problémájára és a struktúra eredetére. Ez utóbbit – egyszerűen fogalmazva – úgy magyarázza, hogy az infláció során kvantumfluktuációk nőnek a teret teljesen kitöltő, skálainvariáns, adiabatikus sűrűségfluktuációkká. Az infláció így gravitációs hullámokat is kelthet. Anélkül, hogy itt a részletekbe belemennék, elég legyen annyit megjegyezni, hogy műholdas mérésekből az így keletkező hozzájárulásra $\Omega_g < 10^{14}$ adódik. Ha az infláció nem a jelenleg legelfogadottabb formájában megy végbe (amely szerint az inflációs időszak *visszafűtéssel* végződik), hanem esetleg megvalósul az alternatívaként javasolt *elnyújtott infláció* vagy a *hibrid infláció*, akkor ez az érték akár nagyobb, mérhető is lehet.

A másik mechanizmus, amely az infláció után nem sokkal gravitációs hullámokat kelthet, a megannyi végbemenő fázisátalakulás közül valamelyik. Nem eltitkolva, hogy a részecskefizika mai álláspontja szerint ezek a fázisátalakulások (például az elektroyenge vagy a kvark-hadron) nem elsődrendű fázisátalakulások, elképzelhető például az elmélet olyan szuperszimmetrikus kiterjesztése, ahol az elektroyenge fázisátalakulás elsődrendű. A 11. ábrán ilusztrált módon egy ilyen fázisátalakulás során a dinamika olyan, hogy az akár gravitációs hullámokat is kelthet.

A *negyedik* és egyben utolsó lényeges jelenségkör a periodikus jelet kibocsátó források halmaza. A legjellemzőbb példa egy gyorsan forgó, de nem teljesen tengelyszimmetrikus tömegeloszlású neutroncsillag. Sok olyan folyamat

képzelhető el, amely aszimmetriát okoz a tömegeloszlásban, és ez az aszimmetria valameddig fent is maradhat (bár egy idő után valószínűleg eloszlik). A neutroncsillag anyageloszlásának eltérése a gömb-szimmetrikus helyzettől – az elliptikusság – számszerűsíthető:

$$\varepsilon = \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}},$$

és a kibocsátott gravitációs hullám amplitúdója egyenesen arányos ezzel az elliptikussággal:

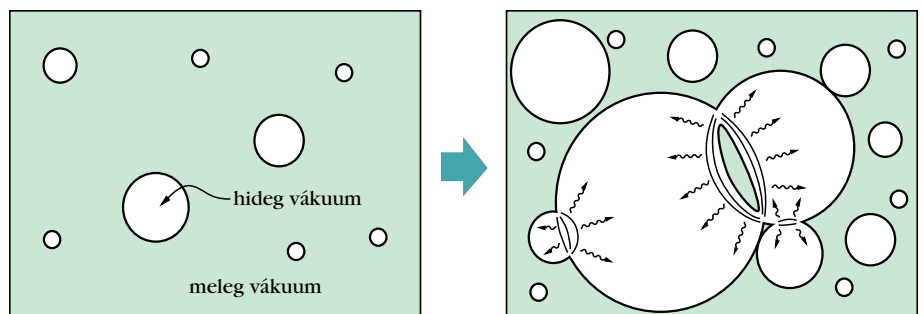
$$b \sim \varepsilon \frac{f_s^2}{d},$$

ahol f_s a neutroncsillag forgási frekvenciájának kétszerese, d pedig a tőlünk mért távolsága. A pulzárok – mint speciális neutroncsillagok – forgási frekvenciája ismert (a legnagyobb érték 600 Hz feletti), és ezért tudjuk, hogy a lehetséges gravitációshullám-frekvenciák a földi obszervatóriumok érzékeny tartományába esnek. Az amplitúdóról csak annyit tudunk mondani, hogy az aLIGO képes lehetne a kimutatásukra, főleg akkor, ha a periodikus jelet sokáig sikerül észlelni, hiszen a jel/zaj arány az észlelési időtartam négyzetgyökével javul.

Nem fejezhetjük be ezt az áttekintés anélkül, hogy megemlítenénk a magyar hozzájárulást a LIGO Tudományos Együttműködéshez, illetve a felfedezéshez.

Miután *Rainer Weiss* és munkatársai 1972-ben javasolták, hogy a Weber-féle tömegrezonátorok helyett inkább lézer-interferométerekkel kellene gravitációs hullámokat keresni, még két évtized telt el, amire az USA kormánya rászánta magát a LIGO finanszírozására. Az amerikai National Science Foundation (NSF) 1992-ben döntött a támogatás mellett. A pénz – ami mára már körülbelül 1 milliárd dollár – a legnagyobb összeg, amit egy projektre az NSF valaha megszavazott. Ezt teljes egészében a „LIGO Laboratory” kapta, amely a hanfordi és livingstoni két telephelyből, illetve a műszereket létrehozó CalTech és MIT intézményekből áll. A mérőhelyek 2000-re készültek el. 2000

11. ábra. Az elektroyenge fázisátmenet elméletének szuperszimmetrikus kiterjesztése megenged olyan paramétereket, amelyek mellett az elektroyenge fázisátalakulás lehet elsődrendű. Egy ilyen esetben a fázisátalakulás dinamikájából következően keletkezhetnek gravitációs hullámok. Az új fázis (ábránkon a hideg vákuum) buborékai relativisztikus sebességgel nőnek, ütköznek egymásnak, forrnak össze, és hozzáak létre a fázisátalakulás végére a hideg vákuummal kitöltött teret. Az ábrát [4]-ből vettem át.





12. ábra. Raffai Péter, az ELTE Fizikai Intézetének adjunktusa a LIGO livingstoni (Louisiana állam, USA) állomásának vezérlőtermében a LIGO méréseit vezeti, felügyeli.

és 2010 között az első („Initial”) LIGO időszakában mindössze az volt a feladat, hogy a technológiát demonstráljuk, és az érzékenységet növeljük. A 2010–2015 alatti sorozatos átépítések után az aLIGO 2015 szeptemberében kezdett mérni. A magyar csoport 2007-ben, az „Initial” LIGO idejében csatlakozott a LIGO Tudományos Együttműködéshez. Ekkor már látni lehetett, hogy az érzékenység a korábban leírt terveknek megfelelően növekszik, és ha akkor még nem is, de a 2010-es évtized közepére várható a gravitációs hullámok tényleges, direkt észlelése.

Ki kell hangsúlyozni, hogy mi nem a LIGO Laboratory, hanem a LIGO Tudományos Együttműködés részesei vagyunk. Ez utóbbi szervezet 1997-ben jött létre azzal a céllal, hogy a LIGO Laboratory által megépített berendezéseket üzemeltesse, az adatokat gyűjtse, az adatokat feldolgozza, és a tudományos közleményeket is megírja. Az ELTE-n az Eötvös Gravity Research Group (EGRG, <http://egrg.elte.hu>) azzal a céllal jött létre, hogy körülbelül 45. csoportként csatlakozzon az akkor már több száz fős és világméretű, jelentős európai hozzájárulással is működő LIGO Tudományos Együttműködéshez. A Szegedi Egyetem kutatói 2009-ben csatlakoztak hozzánk, majd 2014-től már önálló LIGO csoportként dolgoznak az Együttműködésben. A Wigner Fizikai Kutatóközpont munkatársai azóta az olaszországi Cascinában lévő VIRGO detektor munkáját erősítik. A VIRGO 2007-ben adatcsere-egyezményt kötött a LIGO-val, azóta az adatok feldolgozása közösen zajlik, így a VIRGO-n dolgozó csoportok ugyanúgy társszerzői lettek a felfedezésről szóló cikkeknek, mint a LIGO-n dolgozó kollégák, an-

nak ellenére, hogy a VIRGO még átépítés alatt áll, egyelőre nem mér, és remélhetőleg 2016 végén csatlakozik majd az adatgyűjtéshez.

Az EGRG a LIGO Tudományos Együttműködés munkájának minden fázisában részt vesz. Ez kezdődik azzal, hogy méréseket is kell vezetni (lásd a 12. ábrát), adatfeldolgozó algoritmusokat kell írni, azokat futtatni, és a cikkek megírásában is közre kell működni. Az ebben a cikkben bemutatott 4 csoport közül az EGRG a „Burst” csoport munkájában vesz részt, azaz nem ismert alakú tranziens jelek keresésére fejlesztett algoritmust, és két jelenleg használatban lévő keresőszoftverhez is számottevő a hozzájárulása (a 4 csoportnak összesen 18 keresőszoftvere van, amelyek a különböző, várható jelalakok után kutatnak folyamatosan). A szegedi és a wigner kollégák a kompakt kettősök összeolvadását figyelő (CBC) csoportban dolgoznak, és írnak szoftvert is. Az ELTE-n jelenleg a nagyon elnyúlt, excentrikus pályán egymás körül keringő kettős rendszerek által keltett gravitációshullám-jeleket tanulmányozzuk, mert éppen az ELTE-n dolgozó *Kocsis Bence* mutatta ki munkatársaival [5], hogy ezek a kettősök, amelyek jelét jelenleg a LIGO *nem* keresi, legalább annyi jelet szolgáltatnak, mint a körpályán egymás felé spiráló kettősök (egy ilyen jelét látta most az aLIGO műszere). Reméljük, hogy munkánk eredményeképpen nemsokára lesz ilyen keresőszoftver is. Sőt a mi feladatunk most azon galaxiskatalógus létrehozása is, amely alapján a LIGO-val együttműködő obszervatóriumok a LIGO által talált jelek forrásait EM (rádió, optikai, röntgen-, gamma- stb.) tartományokban is szeretnék majd megfigyelni. Nem mellékes, hogy a műszerépítéshez is hozzájárultunk a múltban, igaz csak kismértékben: mi fejlesztettük a környezeti zajok monitorozásában részt vevő infrahang-mikrofonokat. Az angol és a spanyol után a harmadik a *magyar* nyelv, amelyre a LIGO honlapja le lett fordítva. Ennek tanulmányozása minden érdeklődő számára további betekintést enged a Tudományos Együttműködés munkájába: <http://ligo.elte.hu>.

Azzal a reménnyel zárom e sorozatot, hogy érthető, követhető formában, de részletesen sikerült áttekinteni, miért volt fontos és érdemes évtizedeket és sok pénzt szánni erre a kísérletre. Talán az is világossá vált, hogy sokan miért tekintünk bizakodva és várakozásokkal teli a most kezdődő gravitációshullám-asztrofizika korszakára.

Irodalom

1. S. K. Chatterji: *The search for gravitational wave bursts in data from the second LIGO science run*. PhD tézis, MIT, USA, 2005.
2. N. Andersson, K. D. Kokkotas in *The Physics of the Early Universe*. (edited by E. Papantonopoulos) *Lecture Notes in Physics* 653 (2005) 255.
3. M. Pitkin, S. Reid, S. Rowan, J. Hough: *Gravitational Wave Detection by Interferometry (Ground and Space)*. *Living Reviews in Relativity* (2011); <http://relativity.livingreviews.org/Articles/lrr-2011-5/>
4. R. A. Battye, E. P. S. Shellard, ArXiv e-prints, astro-ph/9604059 (1996)
5. R. M. O’Leary, B. Kocsis, A. Loeb, *MNRAS* 395 (2009) 2127.

RAGASZTÓSZALAGOK LEVÁLÁSÁNAK DINAMIKÁJA: SEBESSÉGFÜGGÉS ÉS INSTABILITÁS

Máté Mihály, Nguyen Q. Chinh

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Anyagfizikai Tanszék

E dolgozat témáját a hétköznapi ragasztószalagok érdekes leválási viselkedése adja a tekercsről történő letekeréskor. Szórtelenítéskor a kozmetikus a gyantát hirtelen tépi le, viszont a sebtapaszt már lassan húzzuk le a bőrről. Mind a két esetben – a gyakorlati tapasztalatok alapján – az elérhető hatás szempontjából nagyon fontos a leválasztási sebesség. Szintén érdekes jelenség, hogy egyes ragasztószalagoknál a szalag egyenletes sebességű leválása – bizonyos sebességtartományban – igen nehezen fenntartható. Ilyenkor a folyamat inkább szaggatottan – instabilan – történik, a szalag váltakozva, kisebb és nagyobb sebességgel válik le. E széleskörűen tanulmányozott ugráló folyamattal [1] egyidejűleg jellegzetes hanghatást figyelhetünk meg, valamint a szalag felületén csikozás is megjelenik. Számos tanulmány született a ragasztószalagok tapadásának tartósságáról, erősségéről. Ezek fő célja a szalag adott sebességű leválasztásához szükséges erő meghatározása különböző minőségű anyagok esetében, tájékoztatást adva az adott termék alkalmazhatósági köréről. Emellett más, meglepő effektusokról is beszámoltak a ragasztószalagok viselkedésében. Bizonyos körülmények között, például egy tekercs ragasztószalag lehúzása során, röntgentartományba eső sugárzás detektálható, ami az úgynevezett tribolumineszcencia jelenségével magyarázható [2].

Annak ellenére, hogy a ragasztószalagok leválásának sebességfüggése egyes tartományokban jól ismert, a leválási folyamatnak széles sebességtartományban nincs egységes leírása, illetve a fent említett

instabil leválás értelmezése sokszor nehezen követhető. A következőkben az általunk végzett mérésekkel kapcsolatos általános kísérleti tapasztalatok ismertetése után egy lehetséges modellt javasolunk, amivel egységesen és széles sebességtartományban leírható a leválási folyamat, illetve az ezzel együtt járó jelenségek – beleértve az instabilitást is – értelmezhetők.

Általános tapasztalatok: a leválás különböző sebességtartományai

Három, boltban kapható, hétköznapi használatra gyártott, azonos paraméterekkel (tömeg, szélesség, sugár) rendelkező ragasztószalag-tekercsot vizsgáltunk. Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban a színük alapján – az 1. ábrán látható barna, sárga és ezüst szalagként – különböztetjük meg őket.

Az alapvető tapasztalatok arra utalnak, hogy a leváláshoz szükséges F erő és v sebesség közti kapcsolat (F - v összefüggés) tanulmányozása adhat magyarázatot a jelenségekre. Ezért olyan berendezést célszerű használni, amely állandó sebességgel választja le a szalagot, miközben rögzíti az ehhez szükséges erőt. Ezeket a méréseket egy Material Testing System (továbbiakban MTS) berendezéssel végeztük. A gép mozgó húzófejébe egy könnyen forgó dobot rögzítettünk, amire felhelyeztük a vizsgált tekercsot, a szalag végét pedig egy fémlapra – ami a gép nem mozgó befogójához volt erősítve – tapasztottuk.

Kiegészítésként – az irodalomban kevésbé tanulmányozott alacsony sebességtartomány feltárására – terheléssel végeztünk ismert tömegű súlyok szalagra való függesztetésével. Ez az összeállítás a hosszú ideig – akár 20-30 óráig – tartó méréseket is lehetővé tette. Továbbá a vizsgálati hőmérséklet – hőszugárzó és műanyag takaróhenger segítségével – (60 ± 1) °C-ig volt növelhető. Megjegyezzük, hogy ezeket a sebességfüggés szempontjából fontos, állandó terhelések mellett végzett méréseket – a hőmérséklet beállításával együtt – viszonylag egyszerű összeállítani és elvégezni. Akár egy iskolai szertárban is megvalósíthatók.

Bizonyos esetekben a leválasztott ragasztószalag felülete csikozott, ezért fáziskontraszt-mikroszkóppal nagy felbontású képeket készítettünk az érdekesnek vélt felületekről, szalagrészekről.

A szerzők köszönetet mondanak *Vörös Györgynek*, aki sokat segített a mérések tervezésében és dokumentálásában. Köszönettel tartozunk *Lendvai Jánosnak* a jelen tanulmány megírásához nyújtott hasznos szakmai tanácsaiért.



Máté Mihály az ELTE elsőéves fizikus MSc hallgatója. Aktívan vesz részt kutatásokban. A 2015-ös Országos Tudományos Diákköri Konferencián két dolgozattal is szerepelt. Ezek közül a jelen tanulmány témájáról készült munkával második helyezést ért el, valamint különdíjat is kapott. Jelenleg elméleti szilárdtest-fizikával foglalkozik. Rendszeresen segít a tudomány népszerűsítő rendezvényeken és fizikushallgatók közösségi eseményein.



Nguyen Quang Chinh az ELTE Anyagfizikai Tanszékének habilitált egyetemi docense. Évek óta foglalkozik az anyagok képlékeny alakváltozásának vizsgálatával, a plasztikus instabilitás és hasonló folyamatok leírásával, illetve elemzésével. 2016 februárjában ilyen témájú értekezéssel szerezte meg az MTA doktora címet. Oktatási és kutatási munkája mellett az ELTE Fizikai Intézet TDK-felelőseként elkötelezett segítőtje a mozgalomnak. Több hallgatója is szerzett helyezést országos konferenciákon.



1. ábra. A három vizsgált ragasztószalag: barna, sárga, ezüst.

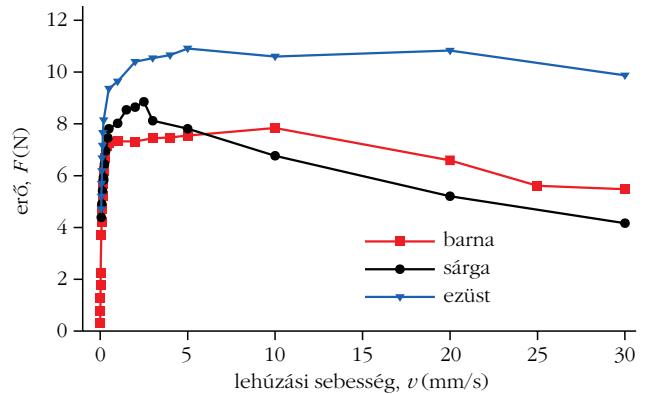
A 2. ábra mutatja a vizsgált ragasztószalagokra kapott kísérleti görbéket. A széles sebességtartományra kiterjedő $F-v$ összefüggések különböző érdekes leválási tendenciákat mutatnak.

Kis v sebességek esetén az alkalmazott F erő jellemzően hatványfüggvény szerint növekszik a sebesség növekedésével, azaz

$$F \propto v^n, \quad (1)$$

ahol az n kitevő értéke anyagtól függően 0,3–0,5 között van, összhangban az irodalmi adatokkal. A kísérleti eredményeink azt is mutatják, hogy ebben a ($v \leq 2$ mm/s) tartományban levegőbuborékok képződnek a töltő- (ragasztó) anyagban, megváltoztatva a ragasztós felület optikai tulajdonságait. Emiatt a lassú leválás során a szalag ragasztós felülete matt lesz.

Szalagtól függően, de általában 5 mm/s-nál nagyobb sebességű lehúzáshoz szükséges F erő már nem növekszik a v sebességgel, inkább telítésbe megy, vagy kis mértékben csökken a sebesség függvényében. Ezzel együtt levegőbuborékok képződése már nem tapasztalható a töltőanyagban, teljesen sima marad a levált szalag felülete. Továbbá, ebben a tartományban érezhetően hangosabban – sercegve, recsegve – válik le a szalag a tekercsről.

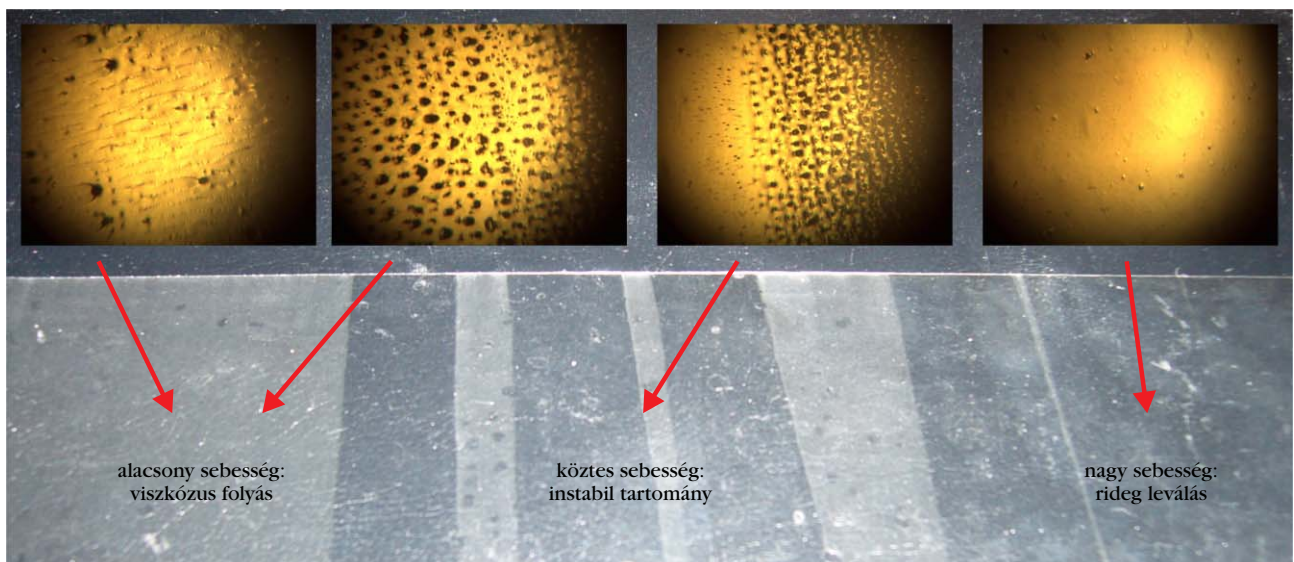


2. ábra. A vizsgált szalagokra jellemző erő-sebesség ($F-v$) összefüggések széles sebességtartományon.

Az említett kis és nagy sebességek tartományában szemmel láthatóan stabilan zajlik le a leválási folyamat. Ez „háziilag” is tapasztalható, ha egyszerűen szabad kézzel próbálunk – érzés szerint – állandó sebességgel, vagy nagyon lassan, vagy gyorsan lehúzni egy ragasztószalagot a tekercsről. E két tartomány közötti sebességek esetén azonban instabillá válik a leválási folyamat. Ebben a viszonylag szűk tartományban a szalag egyenletes sebességű lehúzása igen nehezen fenntartható, a leválási folyamat inkább szaggatottan – instabil módon – történik, a szalag kontrollálhatatlanul, kisebb és nagyobb sebességgel váltakozva válik le. Ezzel egyidejűleg jellegzetes, a levegőbuborékokat tartalmazó matt és buborékmentes sima részekből álló csíkozás jelenik meg a lehúzott szalagszakasz felületén, szaggatott hangjelenségek kíséretében. Ilyen, általunk készített videofelvételek a <http://matemihaly.web.elte.hu/ragaszto/appendix> címen érhetők el.

A 3. ábrán különböző sebességtartományokban lehúzott szalagok felületei láthatók. A fényes, illetve matt felületek váltakozása (buborékok képződése) egyértelműen korrelál az alkalmazott lehúzási sebességgel.

3. ábra. A különböző sebességekkel húzott sárga szalagon megfigyelhető optikai jelenségek.



A fent ismertetett tapasztalatok alapján a ragasztószalag leválásával kapcsolatos jelenségeket három szakaszra oszthatjuk:

1. kis sebességek tartománya stabil, csendes leválással és matt szalagfelülettel;
2. közbülső sebességtartomány instabil, hanggal kísért, szaggatott leválási folyamattal és csíkozott szalagfelülettel;
3. nagy sebességek tartománya stabil, folyamatos hanggal kísért leválási folyamattal és fényes, átlátszó szalagfelülettel.

Fontos megjegyezni, hogy a ragasztószalagok hátoldala sosem marad ragadós, vagyis a töltőanyag mindig tökéletesen leválik a tekercsről.

Mint említettük, a tartományok egységes tárgyalása, leírása eddig nem történt meg a szakirodalomban. A következőkben a kísérleti tapasztalatok alapján tekintjük át, hogy sebességtől függően milyen mechanizmusok szerint válhat le a ragasztószalag, illetve hogyan írható le egységesen az F - v összefüggés széles sebességtartományban.

Kis sebességek tartománya: a viszkózus folyás

Induljunk abból az elfogadott tényből, hogy a ragasztóanyag viszkózus folyása, illetve adhéziója játszik fontos szerepet a ragasztószalag leválásában. A töltőanyag folyására a reológiában használatos, nem-newtoni folyadékok viselkedését leíró

$$\tau = K \dot{\gamma}^n \quad (2)$$

empirikus összefüggést alkalmazhatunk, ahol τ a nyírófeszültség, aminek hatására $\dot{\gamma}$ sebességű folyás (sebességgradiens) jön létre, K egy anyagtól és hőmérséklettől függő együttható.

Stacionárius folyás során feltételezhetjük a következő kapcsolatokat:

$$\begin{aligned} \tau &\propto F \\ \dot{\gamma} &\propto v, \end{aligned} \quad (3)$$

amelyek alapján a (2) formula átírható az (1) alakra. A kísérleti eredmények azt mutatják, hogy a kis sebességtartományban döntően a töltőanyag viszkózus folyása határozza meg a leválási folyamatot.

Megjegyezzük, hogy a viszkózus folyásra általában jellemző az erős hőmérsékletfüggés, vagyis állandó nyírófeszültség alkalmazása esetén a folyamat sebessége erősen függ a hőmérséklettől. Méréseinkben ez úgy jelenik meg, hogy állandó terhelés mellett húzásokat 20–60 °C (293–333 K) hőmérséklet-tartományban végezve a 4. ábra kísérleti eredményei (felső ábra) jól mutatják, hogy a v leválási sebesség gyorsan nő a T hőmérséklet függvényében. Már 10 °C-os hőmérséklet-növekedés hatására is legalább kétszer gyorsabban válik le a ragasztószalag. A 4. ábrán (alul) feltüntetett szokásos Arrhenius-típusú ($\ln v - 1/T$) ábrázolásból pedig látható, hogy adott terhelés

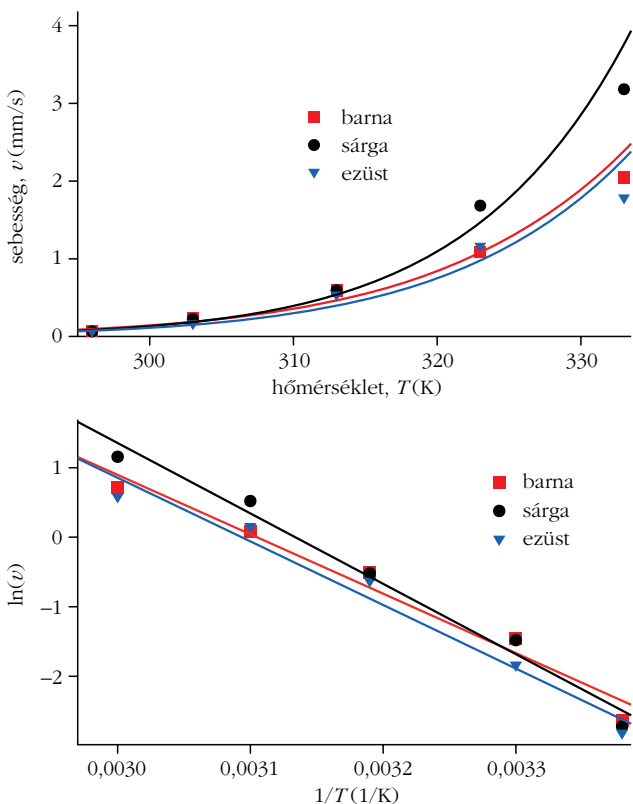
mellett a v leválási sebesség hőmérsékletfüggése a következő formulával adható meg:

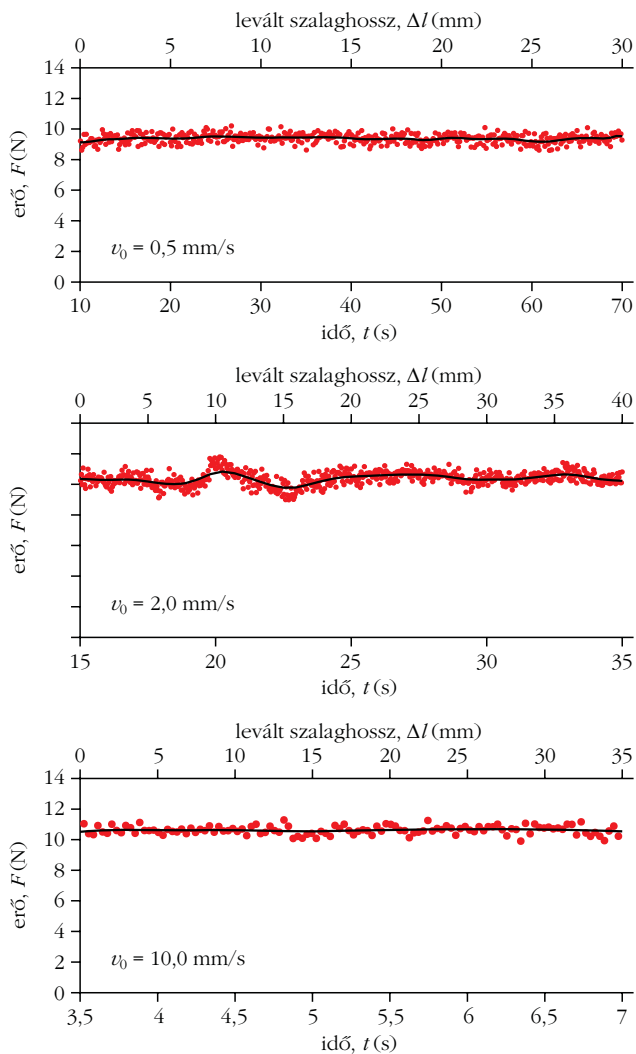
$$v = A \exp\left(-\frac{Q}{RT}\right), \quad (4)$$

ahol A egy sebességdimenziójú állandó, R az univerzális állandó. A Q mennyiség a viszkózus folyás aktiválási energiája, ami a viszkózus közeg molekuláit összetartó kötések energiájára, az anyag kohéziós erősségére jellemző. Fontos tudni, hogy nem csak a külső hatás (például mechanikai igénybevétel) miatt, hanem az állandó hőmozgás következtében, termikus aktiválás hatására is felszakadhatnak kötések. Külső terhelés nélkül azonban a rendszer dinamikus egyensúlyban van, nehéz észrevenni a termikus aktiválás hatását.

A ragasztótechnológiával foglalkozó szakirodalom szerint az általunk vizsgált úgynevezett nyomásérzékeny ragasztószalagok töltőanyagának leggyakoribb komponense a nagy molekulájú, nem-térhálós szerkezetű gumi, poliakrilát vagy poliuretán. A szerves, nagyméretű molekulák közötti kapcsolódások többféle energiaszinten is megjelennek. A gyengébb H-H kötést például csak 20-40 kJ/mol energia jellemzi, de az erősebb C-C vagy C-H kötések már jóval nagyobbak (350 kJ/mol, illetve 410 kJ/mol) [3]. Az általunk vizsgált ragasztószalagok esetében, a (4) egyenlet alapján meghatározott Q aktiválási energia 70–85 kJ/mol tartományban található. További vizsgálatok szükségesek annak tisztázására, hogy ilyen értékű

4. ábra. Állandó terhelés mellett mért v - T görbe (fölül) és a Q aktiválási energia meghatározása az $\ln(v)$ vs. $1/T$ összefüggésből (alul).





5. ábra. Az ezüst szalag különböző sebességű leválasztásához szükséges erő időbeli változása.

energiák milyen kötésekre jellemzők. A jelen dolgozat keretében elsősorban a termikus aktiválás jelentős hatását a ragasztószalagok leválására – már a szoba-hőmérséklet környékén – szeretnénk hangsúlyozni. A termikus hatások miatt erősen sebességfüggő a leváláshoz szükséges erő, főleg az alacsony sebességek tartományában, ahol a töltőanyag viszkózus folyása jelentős. Az eredetileg sima – teljesen átlátszó – szalagfelület mattá válását okozó levegőbuborékok akkor képződtek, amikor a leválás során a töltőanyag megnyúlik (plasztikusan deformálódik), illetve leválik a tekercsről.

Nagy sebességek tartománya: „rideg” leválási folyamat

A korábban ismertetett mechanikai, optikai és akusztikai megfigyelésekből már sejthető, hogy nagy sebességeknél lényegesen megváltozik a leválási folyamat dinamikája. Az a kísérleti tény, hogy teljesen sima (eredeti állapotához hasonlóan átlátszó, fényes) marad a levált szalag felülete, arra utal, hogy a fent említett, kis sebességeknél megfigyelt viszkózus folyás helyett a szilárd testekre jellemzően „ridegen” válik le a töltő-

anyag a tekercsről. A rideg leválás feltételezését a kísérő jellegzetes hang is megerősíti. Míg a kis sebességek esetén a leválasztásra befektetett munka döntően a töltőanyag „csendes” viszkózus folyására, a nagy sebességű leválásra a munka – a rideg leválás révén – inkább a ragasztószalag, mint rugalmas közeg rezgésére fordítódik, hangot kelteve. Feltehetően a nagy sebességek tartományában történő leválás során a töltőanyagban, a szalagfelületre merőleges (y) irányban fellépő nagy sebességgradiens nagy Newton-féle belső súrlódást eredményez, ami „egyben tartja” a töltőréteget. Emiatt folyás nélkül – képlékeny deformáció és levegőbuborék képződése nélkül – „ridegen” válik le a töltőanyag, sebességtől szinte függetlenül. Tekintettel például arra, hogy a töltőréteg h vastagsága körülbelül $50 \mu\text{m}$, $v = 5 \text{ mm/s}$ sebességű leválasztás során a $du = v$ és $dy = h$ értékeket becsülve, igen nagy,

$$\dot{\gamma} = \frac{du}{dy} \approx 100 \text{ s}^{-1}$$

sebességgradiens lép fel. Tehát ebben a sebesség-tartományban a ragasztóanyag a rugalmas testekéhez hasonló tulajdonságokat mutat.

Középső sebesség-tartomány: instabil leválási folyamat

Az 5. ábra mutatja, hogy beállított, állandó sebességű (MTS géppel való) húzás során hogyan változik az F erő (az $F-t$ összefüggés) a mérés során az ezüst szalag esetében.

Alacsony és nagy sebességeken az erő a gyártási egyenetlenségekből fakadó statisztikus bizonytalanságtól eltekintve közel állandó, ahogy az 5. ábrán fölül, illetve alul látható.

A középső – a vizsgált szalagok esetében körülbelül 2 mm/s és 5 mm/s közötti – tartományban a korábban említett instabil leválásra jellemző, hogy a felvett erő nem egy állandó érték körül szór. Az ilyen típusú leválásra jellemző ugrásokkal együtt jellegzetes szaggatott hangok is hallhatók, illetve a ragasztószalag felületén csíkozás jelenik meg. Ezek a kísérőjelenségek mind arra utalnak, hogy az instabilitás szakaszában a szalag inkább váltogatva a fent említett viszkózusan (kis sebességgel), illetve ridegen (nagy sebességgel) válik le.

Hangsúlyozzuk, hogy irodalmi adatok szerint az F erő a növekvő v sebesség függvényében leginkább az instabilitás szakaszában csökken. Jelen esetben is ez a tendencia tapasztalható a sárga és barna szalagok esetében. Az ezüst szalag esetében (lásd a 2. ábrán) azonban egyáltalán nem tapasztaltunk csökkenő erőt a növekvő húzási sebesség függvényében, az erős instabilitás szakaszában sem.

Az irodalomban az instabilitást – a szaggatott leválást – eddig a negatív meredekségű $F-v$ szakasz jelenlétével magyarázták [1], mert stabilan fenntartható, hosszabb ideig tartó leválás szempontjából ez a szakasz dinamikailag tiltott zónának tekinthető. A negatív meredekségű erő-sebesség ($F-v$) szakasz hatásának figyelembe vételével a ragasztószalagok leválásá-

nál fellépő instabilitás ugyanúgy megmagyarázható, mint az anyagtudományban már régóta ismert jelenség, az úgynevezett Portevin–Le Châtelier (PLC) típusú plasztikus instabilitás értelmezése [4].

Mivel az általunk vizsgált egyik (ezüst) ragasztószalag esetében az erős instabilitás ellenére sem tapasztalható csökkenő erő a növekvő leválasztási sebesség függvényében, a negatív meredekségű F – v szakasz hiányában másképpen kell értelmezni az instabil folyamatot. A következőkben egy lehetséges modellt vázolunk fel, amivel egységesen leírhatók a fent említett különböző F – v tartományok, illetve amivel a leválási folyamatokra jellemző jelenségek – buborékképződés, instabilitás – is értelmezhetők.

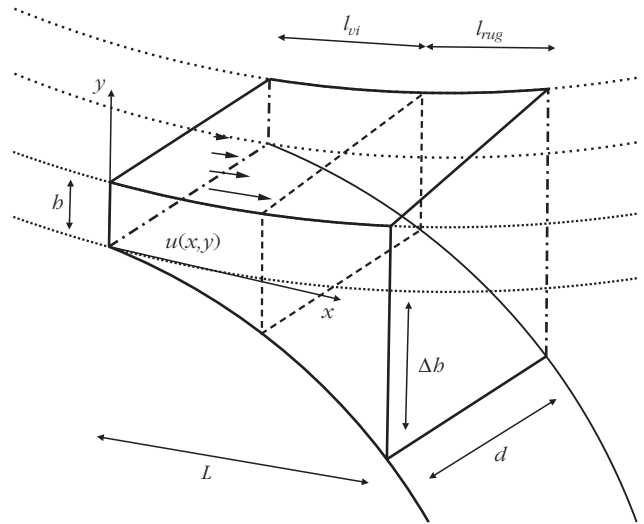
A különböző sebességtartományokban történő leválási folyamatok egységes tárgyalása

A ragasztóanyag szerkezetváltozása leválás során

Láttuk, hogy a töltőanyag az alacsony sebességek tartományában viszkózus folyadékként, míg a gyors leválasztásoknál szilárd testként viselkedett. A tartományok határának pontos helyét nem tudjuk megmondani, azt feltehetően nagymértékben befolyásolhatják a töltőanyag mikroszerkezetében történő változások. Maga a töltőanyag egy kolloid rendszer, amelyben óriásmolekulák kisebb molekulájú közegben – mint egy oldószerben – vannak elosztatva. Az ilyen anyag-halmazok sokszínű tulajdonságait a részecskék között működő erők határozzák meg. A lehetséges szerkezetváltozások általában az úgynevezett dilatancia jelenségével értelmezhetők [5]. Nyugalomban hagyva egy dilatáns folyadékot a diszpergált anyag a domináns – például Van der Waals – erők következtében viszonylag egyenletesen, rendezetten tölti ki a rendelkezésére álló teret az oldószerben úgy, hogy minden óriásmolekulát körülvesznek a kisebb méretű részecskék. Nyírás hatására az elosztatott molekulák közelebb kerülnek egymáshoz, de a belső feszültség miatt még megmaradnak a viszonylag rendezett állapotban. Azonban, egy határ-nyírófeszültségtől kezdve olyan közel kerülnek, hogy a taszítás már nem tud ellentartani, egy csomósodási folyamat indul meg, és így energetikailag metastabil helyzetbe kerül a rendszer. Ekkor a makromolekulák közül kiszorult oldószer nagyobb egységekbe tömörülve nagymértékű viszkozitásváltozást eredményezhet. A nyíróerő megszűnésekor a részecskék ismét szétszóródnak, visszaáll az alacsonyabb energiájú, rendezett helyzet.

A folyamatok modellszerű egységes leírása

Az általunk javasolt modell egyik alapfeltevése, hogy elemi lépésként a viszkoelasztikus töltőanyag deformációja egy meghatározott térrészben megy végbe, amely a leválás természete miatt különböző válási sebességű – és emiatt különböző mechanizmusra jellemző – zónákra osztható. Ezt a folyamatot semati-



6. ábra. A folyamatok felbontásának sematikus rajza.

kusan mutatja a 6. ábra. A szóban forgó térrész egy b töltőanyag-vastagságban, d szalagszélességben elterülő téglalapot, amely a szalaggal párhuzamosan, az elválás vonalától L mélyséig nyúlik be a töltőanyagba. Továbbá feltételezzük, hogy a leválási folyamat az L hosszúságú szakasz egy részén rideg (rugalmas) leválással, míg másik részén viszkózus folyással megy végbe l_{rug} , illetve l_{vl} nagyságú szakaszokon. Így

$$L = l_{rug} + l_{vl} \quad (5)$$

Megjegyezzük, hogy a $d \cdot b \cdot l_{rug}$ térrészben a nagy sebességgradiens miatt keletkező belső súrlódás, valamint az említett szerkezetváltozás következtében növekvő kohézió miatt a töltőanyag nem képes viszkózus folyásra, és közelítőleg úgy viselkedik, mint egy rugalmas test.

A modell szerint egy beállított, átlagos v sebesség esetén különböző sebességgel és így különböző mechanizmussal válik le az elemi térrész l_{rug} és l_{vl} szakaszán, amelyeken a leváláshoz szükséges részert F_{rug} rugalmas, illetve F_{vl} viszkózus erőnek nevezzük. A párhuzamos kapcsolás miatt a kísérletileg mérhető – eredő – F erő a két részert összege lesz, azaz

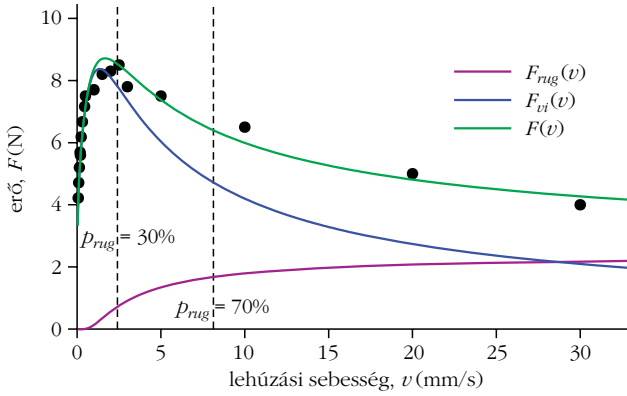
$$F(v) = F_{rug}(v) + F_{vl}(v). \quad (6)$$

Az internetes mellékletben – lásd a *Fizikai Szemle* <http://fizikaiszemle.hu> honlapja e havi részét – részletezett indoklás és számolások alapján az elemi hosszúságok v sebességfüggései a következő formulákkal kimutathatók:

$$l_{vl} = L \left[1 - \exp\left(-\frac{v_0}{v}\right) \right], \quad (7.a)$$

$$l_{rug} = L \exp\left(-\frac{v_0}{v}\right), \quad (7.b)$$

valamint



7. ábra. Sárga szalag adatsorára illesztett függvény.

$$F(v) = \frac{dE\Delta bL}{b} \exp\left(-\frac{v_0}{v}\right) + \frac{dKL}{b^n(n+1)} \left[1 - \exp\left(-\frac{v_0}{v}\right)\right] v^n, \quad (8)$$

ahol v_0 egy sebességdimenziójú állandó, K és n a (2) egyenletben szereplő együtthatók. E a töltőanyag nagyobb sebességekre jellemző Young-modulusa, Δb pedig a rugalmas tartomány megnyúlása az F_{rug} hatására.

Érdekes belátni, hogy a (8) konstitutív egyenlet az alábbi módon is kifejezhető:

$$F(v) = \frac{dE\Delta bL}{b} p_{rug}(v) + \frac{dKL}{b^n(n+1)} v^n p_{vi}(v), \quad (9)$$

ahol

$$p_{vi} = 1 - \exp\left(-\frac{v_0}{v}\right), \quad (10.a)$$

$$p_{rug} = \exp\left(-\frac{v_0}{v}\right), \quad (10.b)$$

amely mennyiségek a viszkózus folyás, illetve a rugalmas deformáció (rideg leválás) bekövetkezési valószínűségét jelölik. Ezzel a makroszkopikusan mérhető F erő – mint várható érték – valószínűségi értelmezést kap és a (8), illetve a (9) alakban írható. Ez az általunk javasolt konstitutív egyenlet fizikai jelentése. A valószínűségi kép minden bizonnyal érthetőbbé teszi és alátámasztja a téglatesttől absztrahált deformációs térrészek nehezen elképzelhető dinamikáját.

A modell és kísérleti tapasztalatok összehasonlítása

A 7. ábra a sárga ragasztószalagra kísérletileg kapott $F-v$ adatokra illesztett függvényeket mutatja. A mért, illetve illesztett paraméterek értékei az 1. táblázatban láthatók. Az eredmények azt mutatják, hogy a választott paraméterek mellett a (8) konstitutív formulával megadott elméleti függvény – a paraméterek megfelelő választása mellett – jól leírja a mért adatokat, megerősítve a új konstitutív egyenlet alkalmazhatóságát.

1. táblázat	
Az $F(v)$ függvény paraméterei a sárga ragasztószalagra	
mért paraméterek	illesztett paraméterek
$n = 0,282$	$L = 1 \cdot 10^{-4}$ m
$d = 0,048$ m	$\Delta b = 1,9 \cdot 10^{-6}$ m
$b = 1,9 \cdot 10^{-5}$ m	$K = 7,6 \cdot 10^5$ Pa \cdot s ⁿ
	$E = 5,0 \cdot 10^6$ Pa
	$v_0 = 2,9$ mm/s

A szalag d szélessége gyárilag adott. A b töltőanyag-vastagság mikroszkópos mérésekkel egyszerűen meghatározható. Továbbá, alacsony sebességeken az eredő erőben szereplő rugalmas tag elhanyagolható, ezért a lassú mérések során számított n kitevő felhasználható az egységes formulában is.

A mért adatok felhasználásával vizsgáljuk meg, hogy mely értékeket vehetik fel az anyagi állandók, együtt-hatók! Az illesztendő paramétereket tekintve, L a mért b nagyságából megbecsülhető, emellett tegyük fel, hogy a $\Delta b/b$ relatív deformáció 10%-os. A v_0 sebességdimenziójú állandó a kísérleti $F-v$ összefüggés élesen emelkedő szakasza miatt könnyen illeszthető a grafikonra. Ezután beállíthatók a legfontosabb K és E állandók, amelyek rendre a viszkózus és a rugalmas folyamatok súlyát határozzák meg az F erőben. Megjegyezzük, hogy az 1. táblázatban szereplő illesztett értékek rendkívül érzékenyek a mérési körülményekre.

A leválási folyamatát kísérő jelenségek értelmezése az új konstitutív formula alapján

A töltőanyagban keletkező levegőzárványok értelmezése

A gyors tartományban közel sebességfüggetlen erő és fényes, buborékmentes felületet figyelhetünk meg. A modell leíró egyenlet szerint a viszkózus tag lecsengése (alacsony valószínűsége) esetén az eredő erőt a telítődő rugalmas erő adja. Ez azért lehetséges, mert ilyen sebességeken a szerkezetváltozás következtében megnő az anyag kohéziója és az elasztikus folyamat térrésze (valószínűsége) annyira felülkerekedik a viszkózusén, hogy a deformációs tér viselkedését gyakorlatilag csak ez határozza meg. Ezért az $l_{rug} b d \approx L b d$ teljes térfogattal, tehát ilyenkor nincs buborékképződés.

Alacsony sebességeket alkalmazva a folyamatok súlyai felcserélődnek. A domináns viszkózus folyás és a kicsiny – ám jelentős szerepű – rugalmasan leszakadó anyagdarabkák képesek buborékokat kelteni. Ezt a feltevést megerősíti a 3. ábrán látható legalacsonyabb sebességen készült mikroszkópos felvétel, amely már oly lassú leválást örökített meg, hogy a rugalmas folyamat csak apró, azonnal eltűnő levegőzárványokat tudott létrehozni, kialakítva a jellegzetes barázdált folyási képet a szalag felületén.

Az instabil intervallumon természetesen a lassú és gyors tartományok optikai tulajdonságai változva, az éppen aktuális sebesség függvényében jelentkeznek.

Az instabil leválás dinamikai jellemzése

Mindhárom vizsgált ragasztószalag esetében az illesztések azt mutatják, hogy a (8) és (9) egyenletekben szereplő v_0 karakterisztikus sebesség értéke 2,5 mm/s körül van. Ezzel pedig a (10.a) és (10.b) egyenletekkel megadott valószínűségi mennyiségek 0,3 és 0,7 közötti – összemérhető – értékeket vesznek fel, azaz a két alapmechanizmus – a viszkózus folyás és a rideg leválás – 30–70% közötti valószínűséggel bekövetkezik, ha a leválási folyamat 2 mm/s és 7 mm/s közötti v sebességgel történik. Ez azt jelenti, hogy ebben a sebességtartományban mind a két alapmechanizmus bekövetkezésének lehetőségére számítanunk kell.

Ennek ismeretében magyarázható meg az a kísérleti tapasztalat, ami az állandó erővel végzett húzási mérések során többször előfordult: a fent említett instabil tartományhoz tartozó sebességgel állandósult leválás beállta után a szalag hirtelen, jóval nagyobb sebességgel „megugrott”, és a gyors leválás következtében a folyamat kontrollálhatatlanná vált. Adott – beállított – sebességgel végzett mérések esetén az állandó átlagos sebességkényszer miatt a megugrás csak átmeneti, mert mindig követi egy lassú folyamat, ami miatt a leválás „pattogóvá” vált. Egyszerűen, kézzel húzva is könnyen érzékelhető, hogy a szalag egyenletes sebességű leválasztása igen nehezen fenntartható ebben a közbülső sebességtartományban. Bár további mikroszerkezeti és dinamikai vizsgálatokra van szükség az instabil leválás elemzéséhez, az a véleményünk, hogy az instabil szakasz létezése megerősíti a fent tárgyalt új konstitutív egyenlet érvényességét a ragasztószalagok leválási folyamatának a leírásában.

Összefoglalás

A ragasztószalagok leválását széles sebességtartományban vizsgáltuk. Kísérleti eredmények azt mutatják, hogy a leválási folyamat három tartományba osztható. Lassú húzásoknál a szükséges erő értéke

nagyon erősen függ a sebességtől, ami azzal magyarázható, hogy ebben az esetben a leválási folyamat a töltőanyag termikusan aktivált, levegőzárványok képződésével járó viszkózus folyása határozza meg. A nagy sebességek tartományában lényegesen megváltozik a leválási folyamat dinamikája. A fellépő nagy belső súrlódás miatt – sebességtől szinte függetlenül, viszonylag nagy erővel – folyás nélkül, képlékeny deformáció és levegőbuborék képződése nélkül, „ridegen” válik le a töltőanyag. E alapmechanizmusokkal magyarázhatók a hétköznapi használati szokások, miszerint szőrtelenítéskor a kozmetikus a gyantát hirtelen (gyorsan) tépi le, mert a szőrszálak kihúzásához nagyobb erőre van szükség. Viszont, a sebtapaszt (vagy gyerekeknél a szemtakaró tapaszt) már nagyon lassan húzzuk le, nem bántva a szőrszálakat vagy a szempillát. A kis és nagy sebességek között, egy szűk közbülső – átmeneti – tartományban mind a két alapmechanizmus összemérhető valószínűséggel bekövetkezhet, ami instabil folyamathoz vezet.

A leválási folyamat leírásához javasoltunk egy új konstitutív formulát, ami széles sebességtartományban jól leírja a kísérleti tapasztalatokat. Az új konstitutív egyenlet segítségével nemcsak az egyes sebességtartományokban érvényesülő alapmechanizmusok szerepe magyarázható meg, hanem a leválási folyamat során megfigyelhető kísérőjelenségek is értelmezhetők.

Irodalom

1. D. C. Hong, S. Yue: Deterministic chaos in failure dynamics: Dynamics of peeling of adhesive tape. *Physical Review Letters* 74 (1995) 254–257.
2. C. G. Camara, J. V. Escobar, J. R. Hird, S. Putterman: Correlation between nanosecond X-ray flashes and stick-slip friction in peeling tape. *Nature* 455 (2008) 1089–1093.
3. University of Waterloo, bond lengths and energies. <http://www.science.uwaterloo.ca/cchieh/cact/c120/bondel.html>.
4. Bérces G.: A Portevin–LeChatelier effektus. *Magyar Fizikai Folyóirat* 33 (1983) 494–498.
5. N. J. Wagner, J. F. Brady: Shear thickening in colloidal dispersions. *Physics Today* 62 (2009) 27–32.

MTA DOKTORI VÉDÉS

Nguyen Quang Chinh, az ELTE Anyagfizikai Tanszék habilitált docense 2016 márciusában MTA doktori címet szerzett *Lapcentrált köbös fémek és ötvözetek képlékeny alakváltozási folyamatainak leírása és elemzése* című értekezésének megvédésével.

A fémek képlékeny alakváltozása, a szilárdságnövelés mikromechanizmusai több évtizede tanulmányozott és még ma sem teljesen tisztázott problémakörök, amelyek az utóbbi időben bevezetett nagymértékű deformációs eljárások alkalmazásával is tovább bővülnek.

Az értekezés több olyan, új kísérleti eredményt is tartalmaz, amelyek korszerű mérőeszközök – például atomerő-mikroszkóp, nano- és mikroindentációs berendezések, többfunkciós pásztázó elektronmikroszkóp – felhasználásával születtek. Így például, a mikro- és nanoindentációs eszköz használatával, a világon elsőként kezdődött meg az ELTE Anyagfizikai Tanszékén képlékeny instabilitások mélységérzékeny benyomódással történő tanulmányozása. Az instabilitás fellépésekor minőségi változás áll be az alakváltozás mechanizmusában, a sima stabil deformáció oszcillálóvá válik. A technológiákban a termékek minősége – például a váratlan felületdurvulás – miatt kell elkerülni ezt a deformációlokalizációval járó jelenséget és megmaradni a stabil deformáció tartományában.

Nguyen Quang Chinh egy további fontos eredménye, hogy új, széles deformációtartományban érvényes konstitutív egyenletet állított fel a polikristályos lapcentrált köbös fémek alakváltozására, amely magában foglalja a kutatók és mérnökök által korábban használt Hollomon-, illetve Voce-féle formulákat is. Az új konstitutív egyenlet a nagymértékű deformációs – szemcsefinomító – eljárások gyakorlatában is hasznosítható.

Mikrooszlopokon végzett összenyomási és indentációs mérésekkel kimutatta, hogy a szobahőmérsékleti deformáció során is jelentős szerepe van a szemcsehatárcsúszásnak. Továbbá összefüggést javasolt, amellyel egységesen leírható az ultrafinomszemcsés lapcentrált köbös fémek és szilárd oldat ötvözetek folyáshatárának szemcseméretfüggése. Ezen eredmények fontosak az ultrafinomszemcsés anyagok mikroberendezésekben való potenciális felhasználásához.

Nguyen Quang Chinh az MTA doktori cím megszerzése után – magyar kollégákkal és az amerikai, orosz, japán partnerekkel továbbra is együttműködve – elsősorban az ultrafinomszemcsés anyagok extrém mechanikai tulajdonságait, az ötvözők hatását tervezési tanulmányozni különböző anyagokban, foglalkozik továbbá a plasztikus instabilitás és hasonló folyamatok leírásával, illetve statisztikai elemzésével is.

A PÖRGETTYŰ HISTÓRIÁJÁHOZ – 1. RÉSZ

Laczik Bálint

BME Gyártástudomány és -technológia Tanszék

Az égisz erő fa tetején, kakassarkon, kacsalábon forgó palota a magyar népmesék ősi sámánhitből átszarmazott, más népek meséiben ismeretlen motívuma. A gyors, forgó mozgást a kettőzött mássalhangzókkal sugalló, ma is értett rokka, motolla, forgattyú szavaink mellől azonban teljességgel eltűnt a *fergettű* kifejezés. Az elfelejtett magyar szavak gyűjteményének¹ meghatározása szerint a fergettű elsődleges jelentése: fából készült csigaforma, hegyes végű játékszer, amely megperdítve a földön sebesen mozog; a szó jobban értett mai alakjában: pörgettű.

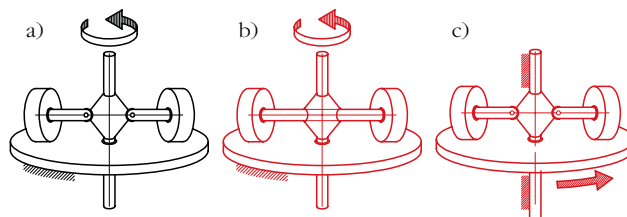
Jókai Mór grandiózus életművében két helyen is előfordul az így nevezett, fergetegesen forgó készség. A nagy mesélő *Bálványos vár* című regényében élvezetes részletességgel írja le a bizarr szerkezet taposómalmában sanyargatott emberek működtette, legyőzhetetlen, forgó erődítményt, a Fergettűvárat. Jókai vélhetőleg erdélyi utazásai során ismerte meg a vár legendáját. Néhány évtizeddel később *Orbán Balázs A Székelyföld leírása* című könyvében² az egykor talán valóban létezett, éppenséggel akár forogni is képes volt fatorony emlékére a környékbéli szájhagyományra hivatkozva örökítette meg.

Jókai *Fráter György* című regényében sajátosan groteszk formában, a bizonytalan helyzetek döntést segítő eszközeként jelenik meg a fergettű. A Budát 1541-ben sikertelenül ostromló *Roggendorf* tábornok málhájában egy igen különleges tárgyat zsákmánynak a győztesek:

„A német fővezér sátorában a többi hadizsákmány között megtalálták azt a *szerecskereket* is, melyet az akkori hadvezérek használtak a hadviselésük alkalmával. Ez ugyanis egy forgatható kerék volt, melynek talpaira és küllőire különféle signumok, mondások és számok valának feljegyezve. A fergettű által megindított kerék megállapodása s annak az egy helyben álló figurák és mondások konstellációja szerint azután világosan ki lehetett találni a hadvezéreknek, hogy mi módon intézzék az ütközet rendjét. Ami igen szép tudomány volt. Az elfogott németek bizonyosága szerint kitudódott, hogy a bécsi csillagvizsgálók bölcs praktikája ezen szerecskerék segítségével kifundálta, miszerint Roggendorfnak a „rozsomák” havában és



Laczik Bálint okleveles gépészmérnök, okleveles matematikus szakmérnök, 1982 óta a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gyártástudomány és -technológia Tanszéke oktatója.



1. ábra. Koller-jarat (görgős malom) a) helyes és b), c) helytelen kivitelei.

a „Mars” órájában kell ostromot intézni Buda vára ellen, s akkor minden bizonnyal győzedelmeskedni fog. – De bizonyára az egyszer nagyon csalatkoztak a csillagvizsgálók. János király aztán hazaküldte Bécsbe Ferdinánd királyhoz azt az elzsákmányolt horoszkópot, azzal az izenettel, hogy csak használja azt a király bölcsen ezután is, s annak a megkérdezésével csinálják jövőben is a hadvezérei a csataterveiket.”

Az ék, a csavar, a kötélcsiga, a fogaskerék a műszaki civilizáció korai, meghatározó fontosságú eszközei. Alakjuk egyszerű, működési elvük fizikai háttere könnyen érthető. Jókainál a fergettű csupán az eszköz forgására utal, a leírt tárgyak „pörgettűs” viselkedéséről nincs szó.

Egy tömeg forgása során fellépő sajátosan paradox, a józan szemléletnek éppenséggel ellentmondó jelenségek szerteágazó mechanikai problémákhoz vezetnek. A magyar nyelvterületen általánosan használt nevén ismert kollerjartat (görgős malom, *1.a ábra*) jellegzetes alakja sok évszázada ismert. A szerkezetben a tárcsák a függőleges tengely bármely forgásirányára esetén a saját súlyuknál nagyobb erővel nyomják a vízszintes támasztó síkot és a síkon lévő örlémenyt.

A működési elv lényegének meg nem értését mi sem bizonyítja jobban, mint a helyenként szakkönyvekben is látható, elvileg hibás konstrukciók. A keringő tárcsák súlyánál nagyobb nyomóerő csupán a tárcsák tengelyének és a függőleges hajtótengely csuklós kapcsolata esetén érvényesül, az *1.b ábra* szerinti elrendezésnél a tárcsák merev tengelyét fölösleges hajlítónyomaték terheli. Az *1.c ábra* konstrukciójában pedig csupán a keringő mozgást nem végző tárcsák súlya segít az örlésben.

Az ausztrál bennszülöttek fegyverként használt bumerángján kívül a pörgettű hatásmechanizmusát sokáig csupán a nyíl, majd később a tűzfegyverlövedékek³ forgásstabilizálására hasznosították. A pör-

¹ Régi magyar szavak magyarázó adatbázisa, Tinta Könyvkiadó, 2012.

² Háromszék, XXVII. A két Borosnyó és Egerpatak környéke (Pest, 1868)

³ Európában a löport a 14. századtól kezdve alkalmazták. A lövedéket forgásba hozó, huzagolt fegyvercsövek első, ismert példányai a 16. században készültek.

gettyű jellegzetes precessziós és nutációs mozgásait a gyermekjátékok valósították meg.

Az ősi civilizációk csontból, fából faragott eszközeitől a csúcstechnológiával készült, a gravitációt legyőzni látszó levitronig a valódi, forgással stabilizált játékok megannyi változata ismeretes. A legkorábbi, Babilonból származó leletek körülbelül 5000 évesek. Az ókori egyiptomi és a görög gyerekek játékszerei mellett a British Museum a távol-keleti és óceániai pörgettyűk sok példányát őrzi. A legtöbb játékpörgettyű forgástest alakú, azonban a legnagyobb zsidó ünnep, a Hanuka máig kedvelt szórakozása a – dobókockát helyettesítő – pörgettyűvel játszott trenderli négyoldalú.

A nálunk is jól ismert jójó, diaboló, frizbi, peonza mellett komoly, klasszikus olimpiai sporteszköz a diszkosz. A cirkuszi akrobata- és zsonglőrmutatványok többségénél szintén felfedezhetők a pörgettyű fizikai hatáselemei.

Az idősebb *Pieter Bruegel* (1525–1569) festményein a korabeli szokásokat, viseleteket, használati eszközöket is megcsodálhatjuk. Az interneten könnyen megtalálható és remekül nagyítható műveken jól kivehetők az érdekes, apró részletek. A *Gyermekjátékok* című festményen⁴ a forgással stabilizált tárgyak több fajtája szerepel (2. ábra). Az alsó részen megfestett alakok pálcával karikákat mozgatnak, tőlük balra pedig éppenséggel egy hatalmas pörgettyűvel szórakoznak, a festmény bal oldalán a trenderlit⁵ is felfedezhetjük. A középső épület oszlopnylásában a játékát ostorral hajtó, szerzetesforma alak, a szomszédos boltív alatt pedig egy, a csúcsán pörgő csiga látható.

A flamand mester nyomasztó hangulatú, allegorikus festménye *A Karnevál és a Böjt barca*. A lakomázók, szerencsejátékosok, zenészek, nyomorék koldusok, disputáló tudósok, vezeklő ájtatosok és megannyi más, furcsa alak gomolygó sokaságában, a középső kút fölött feltűnnek a pörgetett csigákkal szórakozó figurák (3. ábra).

Bruegel téli képeinek állandó eleme a befagyott tó; szinte valamennyi jégtükrön pörgettyűző figurákat is felfedezhetünk.



2. ábra. Idősebb Pieter Bruegel: *Gyermekjátékok*. Az alsó részleteken: ostorral hajtott és csúcsán pörgő csiga, trenderlit tartó nő, hatalmas pörgettyű és pálcával terelt karikák.

3. ábra. Idősebb Pieter Bruegel: *A Karnevál és a Böjt barca*.



⁴ A címmel ellentétben a képen egyetlen gyermek sincs.

⁵ <https://de.wikipedia.org/wiki/Dreidel> – a Wikipédia trenderlit ismertető német (Dreidel) és héber oldala alapján (műsz. szerk.).



4. ábra. Pörgettyűvel játszó fiú, Jean-Baptiste Chardin festménye.

Jean-Baptiste Chardin (1699–1779) önfeledten szórakozó, kártyaváratokat építő, szappanbuborékot fúvó gyermekeket ábrázoló zsánerképei között különösen hangulatos a pörgettyűvel játszó fiú portréja. A festményen a jól fésült, parókás ifjú – talán éppen nehezen érthető, unalmas tankönyvét, papírját, kalamárisát félretolva – elmélyülten gyönyörködik a tanulóasztalon látható igazi fizikában, a hajbókoló pörgettyű táncában, lásd 4. ábra. (A kép akár a kísérletekre alapozott fizikaoktatás emblémája is lehetne.)

A klasszikus fizika meghatározó alapvetései a newtoni axiómák. Az első, latin nyelvű⁶ kiadás, majd a szerző halála után egy évvel megjelent angol fordítás⁷ mellett magyar nyelven⁸ is olvasható az I. axióma. A napjainkra kanonizálódott törvény szövegének teljes (különösen a pörgettyűre utaló) szövege azonban meglehetősen furcsa, teljes alakjában aligha vált volna világképünk sziklaszilárdságú sarokigazságává:

„Minden test megmarad nyugalmi állapotában vagy egyenletes és egyenes vonalú mozgásában, hacsak külső erő nem kényszeríti ennek az állapotnak az elhagyására.

⁶ <http://www.gutenberg.org/ebooks/28233>

⁷ <https://archive.org/stream/mathematicalpri00mottgoog#page/n62/mode/2up>

⁸ <http://tankonyvtar.ttk.bme.hu/pdf/157.pdf>

⁹ <http://onlinebooks.library.upenn.edu/webbin/serial?id=gentlemans>

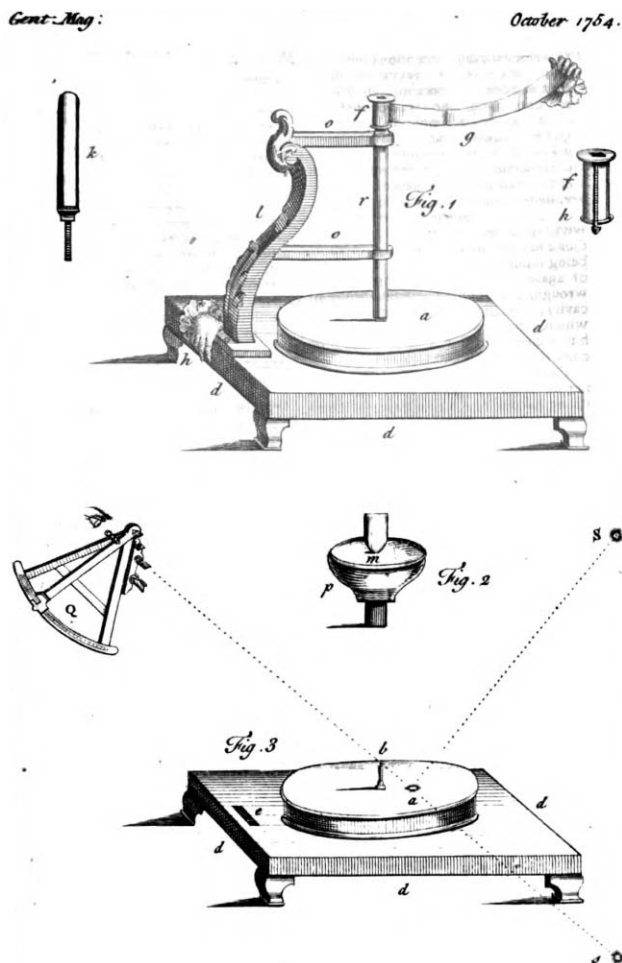
¹⁰ A tömegközéppont ilyen esetben a pörgettyű fix pontja alatt van.

A lövedék mindaddig folytatja mozgását, míg a levegő ellenállása nem lassítja, és a gravitációs erő nem vonzza lefelé. A pörgettyű, amelynek részeit a kohézió állandóan igyekszik eltéríteni az egyenes vonalú mozgástól, mindaddig forog, míg a levegő nem lassítja le mozgását (kiemelés tőlem, LB). A bolygók és az üstökösök a közegellenállástól mentes térben sokkal hosszabb ideig tartják meg haladó és körpályán végbemenő mozgásukat.”

A művelt úriemberek *Gentleman's Magazine* című lapja⁹ 1731-től 1907-ig, havonta jelent meg. Az 1754. októberi szám névtelen szerzője egy nagyszerű eszközt mutatott be (5. ábra). A feltaláló, John Serson, „...on ingenious mechanic, but an illiterate man”, azaz kiváló mechanikus, ám – durvább kifejezéssel bizony – írástudatlan személy volt. „Whirling speculum” (forgó tükör) készüléke azonban a tengeri navigáció egy fontos gyakorlati problémáját oldotta meg.

Évszázadokig a kapitány a hajó helyzetének szélességi koordinátáját a delelő Nap és a látóhatár közötti szög alapján határozta meg. Felhős időben a Nap vagy a horizont (esetleg mindkettő) gyakran nem látszik. Serson mozgásba hozott – mai szóhasználatnál súlyos – pörgettyűjének¹⁰ felső, sík tükörfelülete jó közelítéssel megjelenítette a látóhatár vonalát.

5. ábra. Serson „Whirling speculum” készüléke.



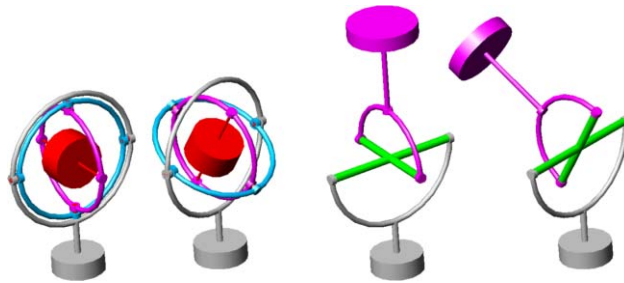


6. ábra. A kardánkeret Villard de Honnecourt rajzán.

Az 5. ábrán a forgó tárcsa fölé állított, stilizált „A” alakú indító készülék r függőleges tengelyét az f orsóra feltekert g szalag lerántása gyors forgásba hozta. A tengely alsó vége a pörgettyű homlokfelületére támaszkodva felgyorsította a tárcsát. A pörgettyűtest tengelye egy gömbsíveg alakú csészében támaszkodott. A gyorsító szerkezetet eltávolítva a felpörgetett tárcsa vízszintes tükörfelülete a horizontsík egy kicsiny elemét hozta létre.

A navigáció klasszikus alapeszközeként századokon át használt sextáns alkalmasan elforgatott tükrei a Nap és a horizont képét fedésbe hozzák, a hajó szélességi helyzetét a tükrösíkok közötti szög határozza meg. A láthatatlan horizont helyett a sextáns tükrei a Nap valóságos, és a Napnak a pörgettyű vízszintes tükörfelületén látszó képét állították fedésbe. Az egyszerű „műhorizont” használatánál a Nap magasságát a sextáns tükrösíkjai közötti szögfelező jelölte ki.

Serson kezdetleges eszközét George Graham (1673–1751) óras és csillagászati műszerkészítő mester tökéletesítette. Az eredeti szerkezet 1,5-2 percig volt használható, a javított változatban a súrlódás okozta energia-veszteséget kézi pumpa levegőfúvatásával pótolták. A brit admirális tengeri vizsgálatai szerint a pörgettyűs tükrök alkalmazásával a szélességi helyzet meghatározásának hibája 3-4 szögpercre adódott. (Egy szögperc egy tengeri mérföldnek, 1852 méternek felel meg.)



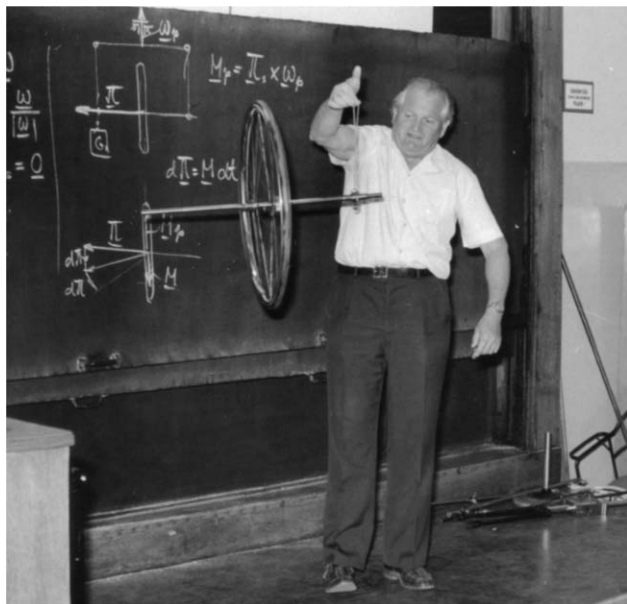
7. ábra. Azonos szöghelyzetekben ábrázolt kardánkeretes pörgettyű és kardánkereszt mechanizmusok.

Nagy kár, hogy a derék feltaláló éppenséggel hajószerecséltenségben, a Victory csatahajó elsüllyedtével, 1744. október 4-én életét veszítette. (Őfelsége flottájának máig az egyik leghíresebb katasztrófáját egyébként nem navigációs, hanem a hajó konstrukciós hibái okozták.)

A pörgettyűs eszközök jellegzetes eleme az úgynevezett kardánkeret. A forgó tárcsa tengelyének három szabadságfokú, szabad mozgását biztosító szerkezetet azonban – megannyi más, klasszikus találmányhoz hasonlóan – nem a mechanizmust nevesítő tudós, *Girolamo Cardano* (1501–1576) fedezte fel. A középkor műszaki ismereteit csodálatos rajzokkal megörökítő, egy ideig Magyarországon is tevékenkedett építész, *Villard de Honnecourt* (cca. 1200–1270) vázlatkönyve szerint Cardano leírása előtt, századokkal korábban már ismert volt a csuklós gyűrűkből álló rendszer (6. ábra).

8. ábra. Bohnenberger giroszkópja (Tübingeni Állami Múzeum).





9. ábra. Ludvig Gyöző (1924–1992) dinamika-előadása a Budapesti Műszaki Egyetemen, 1983. május 12-én.

A kardánkeret a középkortól kezdve a mágneses hajóiránytűk, később a hosszúsági navigáció alapeszközéül szolgáló kronométerek vízszintes helyzetét egyszerűen és megbízható módon biztosította. (A kardánkeret és a nem párhuzamos tengelyek közötti forgó mozgás átvitelére használt kardánkereszt¹¹ mechanizmusok alaki rokonságát a 7. ábrásor illusztrálja.)

¹¹ A kardáncsklók neve angol nyelvterületen – a feltalálás dicsőségét meglehetősen nemzeti önkénnyel kisajátítva – Hooke joint.

¹² Az élenjáró elméleti tudomány eredményei és a kortárs alkalmazások közötti szakadékot jól jellemzi például Euler optimális fogaskerékprofilról 1753-ban írott tanulmánya (De aptissima figura rotarum dentibus tribuenda, megjelent: *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 5, 1760, pp. 299–316). A körevolvens hibátlanul levezetett elméletéből egy évszázadon át a gépészmérnöki szakma semmit sem ismert. A modern fogaskerék-elmélet kidolgozását – az evolvens profil felfedezésével – a 19. század derekán Robert Willis kezdte el. Euler művét Karl Kutzbach csupán 1939-ben tette közismertté.

A 18. század az elméleti mechanika hatalmas fejlődését hozta. A korszak szellemi gigászainak zseniális elméletei és matematikai apparátusai azonban meglehetősen kevés közvetlen, gyakorlati hatást fejtek ki¹².

A Newton törvényeiből levezetett alapfogalmak, az impulzus, a perdület és a tehetetlenségi jellemzők túlnyomórészt Leonhard Euler (1707–1783) grandiózus munkásságának köszönhetőek. A pörgettyű mozgását leíró Euler-egyenletek 1755-re nyerték el ma is használt alakjukat. Az egyenletek speciális kezdeti feltételekhez tartozó megoldásai a pörgettyű sajátos viselkedéseit, például a precessziós és nutációs mozgásokat szabatosan írták le. A megoldásfüggvényekhez azonban nem sikerült a mozgások valódi, szemléletes jellemzőit jól illusztráló eszközöket találni.

Johann Gottlieb Friedrich Bohnenberger (1765–1831) a Föld precessziójának bemutatására egy kardánkeretbe foglalt, forgó gömböt használt (8. ábra). A mai terminológia szerint erőmentes pörgettyű tengelyének stabil helyzetét ismertető publikációk azonban visszhangtalanok maradtak.

A pörgettyű olyan forgó test, amelynek egy pontja a mozgás során helyben marad. Külső hatásra a forgó test perdületvektorának hossza nem, a vektor iránya azonban megváltozhat. A súlypontján kívül függesztett, súlyos pörgettyű precessziós mozgásának bemutatása (9. ábra) egyike a közismert pörgettyűs kísérleteknek.

Irodalom

1. Kós K.: *Ősi váz és utópisztikus tartalom a magyar népmesében*. <http://www.muvelodes.ro/index.php/Cikk?id=1285>
2. J. Broelmann: *Intuition und Wissenschaft in der Kreiseltechnik 1750 bis 1930*. Deutsches Museum, 2002.
3. J. Perry: *A pörgettyű*. (ford. Beke Manó) Fővárosi Könyv- és Lapkiadó Rt., Budapest, 1919.
4. Bárány N., Mitynán L.: *Optimechanikai műszerek*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1961.
5. F. Schmelz, V. Seher-Thoss, E. Aucktor: *Universal Joints and Driveshafts*. Springer-Verlag, 1991.
6. K. Magnus: *Kreisel, Theorie und Anwendungen*. Springer-Verlag, 1971.
7. Mutnyánszky Á.: *Kinematika és kinetika*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1965.

SZÁMÍTUNK RÁD, LÉGY



A FIZIKA BARÁTJA!

Támogasd jövedelemadód 1%-ával az Eötvös Loránd Fizikai Társulatot!

Adószámunk: 19815644-2-41

KAOTIKUS VAGY CSAK ÖSSZETETT?

– Labdák pattogása lépcsőn

Gruiz Márton – ELTE Elméleti Fizikai Tanszék

Meszéna Tamás – Ciszterci Rend Nagy Lajos Gimnáziuma Pécs, a Fizika tanítása PhD program hallgatója

Tél Tamás – ELTE Elméleti Fizikai Tanszék és MTA-ELTE Elméleti Fizikai Kutatócsoport

A cikk célja, hogy kiderítse, kaotikus-e a pontszerű labdák lépcsőn lefelé történő pattogó mozgása. Az ütközések koordinátaira egyszerű rekurziós szabályt vezetünk le, amelyek alakjából azonban nem olvasható le a kaotikusság megléte vagy hiánya. A numerikus szimulációk arra utalnak, hogy előbb-utóbb mindig állandósult mozgás alakul ki, amelynek jellege rendszerint kváziperiodikus. Az ütközési együtthatótól való függés meglehetősen bonyolult is lehet, káoszra utaló jelet azonban nem találunk. A számítások matematikai igénye a középiskolai szintet nem haladják meg, az olvasónak a jelenséggel való ismerkedését a <http://crnl.hu/lepcso> oldalon minden előismeret nélkül futtatható programok segítik.



Gruiz Márton fizikatanár szakon végzet az ELTE-n 2000-ben. Egyetemi éve alatt érdeklődése a káoszelmélet felé fordult, a témában írt TDK-dolgozata különdíjjal részesült és országosan II. helyezést ért el. Tél Tamással írt káosz tankönyve magyar és angol nyelvű kiadása alapján 2009-ben PhD fokozatot szerzett. Az ELTE Elméleti Fizikai Tanszék tudományos munkatársa, az ELTE Fizika Doktori iskola és a Kaotikus mechanika speciális kollégium alkalmi előadója.



Meszéna Tamás matematika-fizika-számítástechnika szakos tanárként végzett az ELTE-n 1987-ben. 29 éve tanít gimnáziumban, 21 éve Pécsen, a Ciszterci Rend Nagy Lajos Gimnáziumában, ahol negyedik éve igazgatóhelyettes. 2011 óta az ELTE Fizika Doktori Iskola Fizika tanítása program PhD hallgatója, témavezetője Gruiz Márton, kutatási témája a káoszelmélet gimnáziumi tanítási lehetőségeinek vizsgálata.



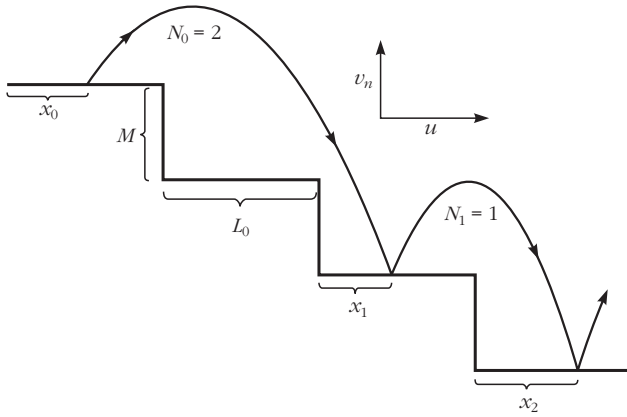
Tél Tamás az ELTE-n szerzett fizikus diplomát 1975-ben. Doktori dolgozatát Szépfalussy Péter vezetésével írta 1977-ben. Azóta – külföldi vendégkutatói tartózkodásaitól eltekintve – az ELTE Elméleti Fizikai tanszékén dolgozik különböző beosztásokban. Kutatási témái a nemegyensúlyi rendszerektől a klímadinamikáig terjednek. 2007 óta vezeti a Fizika tanítása doktori programot, 2011 óta az MTA-ELTE Elméleti Fizikai Kutatócsoportot.

Egy osztrák gimnáziumi tankönyvben több, közismeretlen kaotikus mozgással járó jelenség bemutatása között azt olvashatjuk, hogy a labda lépcsőn történő pattogása is kaotikus [1]. A szerzők elvileg nem gondolhattak a gumilabdára, amelyben a pattogások között rugalmas hullámok is terjednek, hiszen az térben is lejátszódó, magas szabadsági fokú dinamika lenne. Alacsony dimenziójú leírást tekintve válasszuk a leg egyszerűbbet, a pontszerű labdát feltételező (tehát a labda forgását elhanyagoló) modellt! Feltesszük, hogy a labda egy hosszú lépcsősoron rugalmasan pattog, a mozgás során az ütközési együttható értéke $k < 1$ állandó. A lépcsőt sima vízszintes és függőleges felületekből összetettnek tekintve, egy biliárd-problémát definiálunk, amely szemben a szokásos biliárdokkal (például stadion biliárd [2]) gravitációs erőterben értelmezett. Ezért az ütközési energiavesztés mellett energianövekedés is felléphet a magasság csökkenése következtében. Első ránézésre nehéz eldönteni, hogy lehet-e kaotikus a mozgás: a sima vízszintes felület a káosz ellen szól (hiszen síktükröként, vagyis nem szóróként viselkedne fényvel való megvilágítás esetén), a lépcső élei, a fokok végén lévő pontszerű törések viszont esetleg mellette. Ezért alaposabban vizsgáljuk meg a mozgást, egyszerű (középiskolai szintű) levezetéseket és szimulációkat használva.

A modell

Legyen az egyes lépcsőfokok hossza L , magasságuk M és a lépcső lejtse balról jobbra (*1. ábra*). Mivel az ütközési együttható 1-nél kisebb, a labda beesési sebességének *függőleges* v komponense minden ütközéskor $k < 1$ -szeresére változik. Az $u > 0$ vízszintes komponens időben végig állandó marad. A tájékozódás kedvéért megadjuk tömör, azonos anyagú golyóval ütköző golyók ütközési együtthatóját [3] szerint: üveg, elefántcsont 0,9; acél 0,7; ólom 0,2; saját méréseink alapján pedig: tömör gumi 0,8; fagolyó 0,3, illetve néhány labda tipikus ütközési együtthatója kőlap-

Köszönjük *Károlyi Györgynek* a kéziratot kapcsolatos hasznos észrevételeit, *Páll Csabának* pedig a honlapon található programok megírásában nyújtott segítségét. A munka az NK100296 OTKA pályázat támogatásával készült.



1. ábra. Az L hosszúságú és M magasságú fokokkal rendelkező lépcsőn pattogó labda pályája és jellemző adatai: az n -ik ütközés helye x_n , a visszapattanás utáni függőleges sebesség v_n , a vízszintes állandó sebesség u , és az n -ik ütközés után átgugrott lépcsőfokok száma N_n .

ról visszapattanva: pingponglabda 0,8; focilabda 0,7; teniszlabda 0,7; felfújt gumilabda 0,4.

Célunk, hogy kapcsolatot találjunk az n -ik és az $n+1$ -ik ütközés hely- és sebességadatai között. Az egyszerűség kedvéért helyezzük koordináta-rendszerünket minden ütközéskor azon lépcsőfok a bal szélére, amelyen az ütközés történik. (Ez azt jelenti, hogy az ütközés x koordinátáját mindig visszatoljuk a $(0, L]$ intervallumba.)

Legyen az n -ik ütközés koordinátája x_n és a visszapattanás utáni függőleges sebesség v_n . A labda – visszapattanás óta eltelt t idővel kifejezett – magassága a lépcső felszínétől mérve

$$y(t) = v_n t - \frac{g}{2} t^2,$$

miközben az origótól mért vízszintes távolsága

$$x(t) = x_n + u t.$$

A következő ütközésig eltelt Δt_n idő meghatározásához célszerű feltenni, hogy ismert, hány lépcsőfokkal lejjebb pattan legközelebb a labda. (Persze most még nem tudjuk ezt a számot, de később látni fogjuk, hogyan határozható meg.) Legyen ez az N_n egész szám, amely fontos változó lesz a továbbiakban. A repülési idő kiszámításához felhasználjuk, hogy a következő, $n+1$ -ik ütközéskor a labda az $y = -MN_n$ magasságban elhelyezkedő lépcsővel találkozik, azaz

$$v_n \Delta t_n - \frac{g}{2} (\Delta t_n)^2 = -MN_n,$$

amiből

$$\Delta t_n = \frac{\sqrt{v_n^2 + 2gMN_n} + v_n}{g}.$$

A becsapódás

$$v_n - g\Delta t_n = -\sqrt{v_n^2 + 2gMN_n}$$

függőleges sebességgel történik. A visszapattanási se-

besség e sebesség ellentettjének k -szorosa, így közvetlenül az $n+1$ -ik ütközés után a függőleges sebesség

$$v_{n+1} = k\sqrt{v_n^2 + 2gMN_n}. \quad (1)$$

Ekkor a labda az origótól vízszintes irányban $x_n + u\Delta t_n$ távolságra, jobbra van. N_n nem más, mint az a szám, amely megadja, hogy ebben a távolságban hányszor van meg az L lépcsőhossz. Δt_n -t behelyettesítve,

$$N_n = \left\lceil \frac{x_n + \frac{u}{g} \left(v_n + \sqrt{v_n^2 + 2gMN_n} \right)}{L} \right\rceil, \quad (2)$$

ahol a szögletes zárójel az egész részt jelöli. Ha a (2) egyenletnek több megoldása is lenne, akkor közülük a legkisebb N_n -re van szükségünk. A keresett N_n kifejezhető tehát az n -ik ütközés adataival és a paramétereivel.

A lépcsőfokra helyezett koordináta-rendszerben az ütközés utáni x_{n+1} koordináta a vízszintes elmozdulás és az LN_n különbsége, azaz

$$x_{n+1} = x_n + \frac{u}{g} \left(v_n + \sqrt{v_n^2 + 2gMN_n} \right) - LN_n. \quad (3)$$

Az (1)–(3) rendszer egyfajta mozgásegyenletet, leképezést alkot,¹ megadja a következő ütközés x_{n+1} hely- és v_{n+1} sebesség-koordináta értékét az előző x_n , v_n ismeretében, az N_n mennyiség kiszámításának közbeiktatásával.²

Dimenziótlan alak

Érdeemes felismerni, hogy a mozgásegyenletek írhatók egyszerűbb alakban is, olyanokban, amelyek nem függnek már például külön-külön a lépcső hosszától és magasságától, csak a meredekség abszolút értékének $m = M/L$ értékétől. Ezt akkor kapjuk, ha (3)-at L -lel osztva olyan alakba rendezzük át, amely a helyet a lépcsőhosszhoz viszonyítva adja meg, és ezzel egyidejűleg a sebességet is a konstans $u > 0$ vízszintes sebességhez viszonyítva adjuk meg, vagyis mindenütt v_n/u -t szerepeltetjük:

$$\frac{x_{n+1}}{L} = \frac{x_n}{L} - N_n + \frac{u^2}{gL} \left(\frac{v_n}{u} + \sqrt{\left(\frac{v_n}{u} \right)^2 + \frac{2gL}{u^2} m N_n} \right). \quad (4)$$

¹ Vegyük észre, hogy a leképezés segítségével a ferde hajítás paraboláivének kiszámítása nélkül, közvetlenül kapjuk meg a becsapódási adatokat.

² Mivel x_{n+1} definíció szerint 0 és L közé esik, x_{n+1}/L egész része nulla, és L -lel való osztás után (3) egész részét véve visszkapjuk (2)-t. Ez azt jelenti, hogy N_n megkapható úgy is, hogy (3)-ban addig írunk egész számokat N_n helyébe, amíg L -nél kisebb, de pozitív megoldást nem találunk x_{n+1} -re.

Vegyük észre, hogy itt m -en kívül már csakis egy paraméter, a gL/u^2 kombináció jelenik meg, amelyet ezentúl *hosszparaméternek* nevezünk és H -val jelölünk. Ha hasonlóan elemezzük a másik két egyenletet, azokban *sem* találkozunk újabb paraméterekkel.

Hasznos ezért a $v/u \rightarrow v$, $x/L \rightarrow x$ helyettesítéssel definiált dimenziótlan változókra, vagyis az u egységében mért v (függőleges) sebességre és a L egységében mért x helykoordinátára áttérve felírni az egyenleteket. Ebben a jelölésben

$$v_{n+1} = k \sqrt{v_n^2 + 2 m H N_n}, \quad (5)$$

$$N_n = \left[x_n + \frac{1}{H} \left(v_n + \sqrt{v_n^2 + 2 m H N_n} \right) \right], \quad (6)$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{H} \left(v_n + \sqrt{v_n^2 + 2 m H N_n} \right) - N_n. \quad (7)$$

Jól látjuk, hogy a mozgás összesen három adattól, a

$$k, \quad m \equiv \frac{M}{L}, \quad H \equiv \frac{Lg}{u^2}$$

kombinációktól függ, vagyis a k ütközési együtthatótól, az m meredekségtől és a H hosszparamétertől (míg az eredeti (1)–(3) alakban még 5 paraméter, k , M , L , u és g szerepelt). Utóbbi különösen érdekes, azt mutatja meg, hogy az u vízszintes és u függőleges kezdősebességű (tehát 45° -os) ferde hajítás u^2/g féltávolsága hányszor fér rá a lépcső L hosszára. Szemléletesen: minél kisebb H , annál apróbb lépcsőfokokat kell az u vízszintes sebességgel repülő labda íve alá képzelni. A hosszparaméter megjelenése azt jelenti, hogy adott labdával, adott meredekségű lejtőn a $4L$ hosszúságú lépcsőfokokon $2u$ vízszintes sebességgel mozgó labda éppúgy mozog, mint az L méretű lépcsőfokokon u sebességgel mozgó (és ugyanúgy, mint a Holdon a $6L$ hosszúságú lépcsőfokokon u sebességgel mozgó). A hosszparaméter tehát a lépcső hosszát nem geometriai, hanem dinamikai szempontból jellemzi, a mozgásra jellemző adatokkal veti össze.³ Hosszú lépcsőfokokról a továbbiakban akkor beszélünk, ha a H hosszparaméter elegendően nagy, pontosabban (lásd *1. feladat*), ha $H > 2m$.

1. feladat⁴

Annak érdekében, hogy a hosszparaméter jelentését más oldalról is megvilágítsuk, mutassuk meg, hogy egy lépcsőfok végpontjáról vízszintes $u > 0$ sebességgel indított labda a lépcsőfok hosszának x_f -szeresénél ütközik először az alatta lévővel, ahol

$$x_i = \sqrt{\frac{2m}{H}}.$$

³ Szellemében hasonló az áramlások Reynolds-számához, vagy még inkább Froude-féle számához.

⁴ A feladatok részletes megoldásai a crl.hu/lepcso honlapon megtalálhatók.

Adott m meredekségű lépcsőn a lépcsőfokok akkor tekinthetők hosszúnak, ha ez az arány kisebb egynél, azaz $H > 2m$.

Az épületekben előforduló lépcsőfokok körülbelül kétszer olyan hosszúak mint magasak, ezért az $m = 1/2$ meredekséget fogjuk használni. Az ütközési együtthatót széles tartományban változtatjuk, és a jobb áttekinthetőség kedvéért, a sebességhez képest hosszú lépcsőfokokot vizsgálunk a $H \in [2, 8]$ intervallumból.⁵ *Alapesetnek* a $H = 4$ választást vesszük, amikor $H/2m = 4$, vagyis vízszintesen indulva az első ütközés a lépcsőhossz felénél történik.

Egyszerű periodikus pattogás

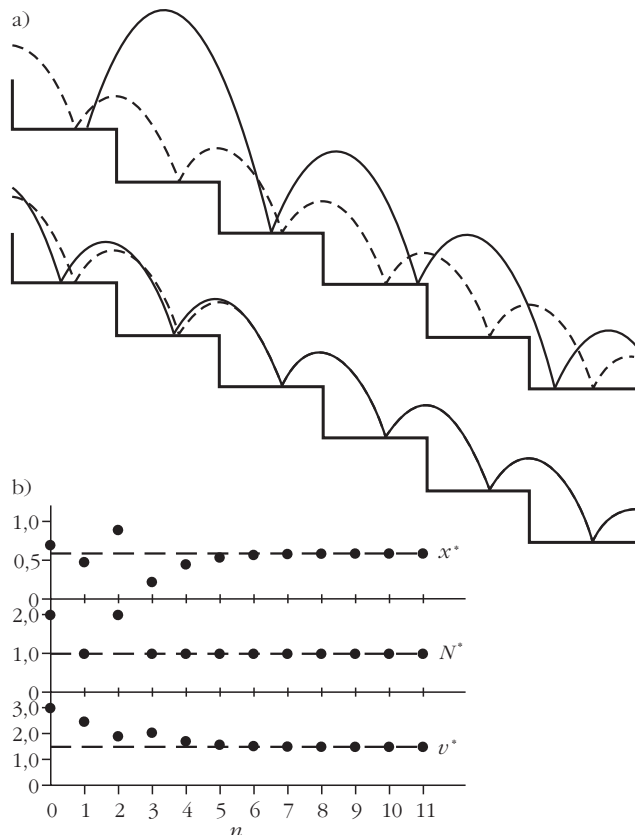
A nem túl kis ütközési együtthatójú esetekben, azaz ha a labda nem kezd el csúszni valamelyik lépcsőfokon (részleteket a csúszásról lásd majd *A csúszásba történő átmenet* fejezetben), akkor *mindig* azt tapasztaljuk, hogy előbb-utóbb egy állandósult mozgást felvéve pattog lefelé. Ezen mozgás alatt teljesül az, hogy az ütközések miatt elvesztett energiát a gravitációs tér éppen kompenzálja, a mozgás függőleges átlagsebessége állandó. Az ütközési veszteség egyfajta disszipáció, aminek következtében a rendszer „elfelejti” kezdőállapotát. A kezdőfeltételek széles osztályából tehát ugyanaz az állandósult mozgás alakul ki végül, vagyis egy bizonyos mozgásállapot felé „vonzódnak” a labdák, amit így „attraktornak” is nevezhetünk.

A *2. ábrán* bemutatott mozgás körülbelül az ötödik pattanástól kezdve ismétlődik. Itt a legegyszerűbb attraktort, a periodikus ugrálás attraktorát ismerhetjük fel. A b) betétábra mutatja, hogy az x_n , v_n , N_n sorozatok maguk is konstans értékhez, fixpontokhoz tartanak.

Annak érdekében, hogy az érdeklődő olvasók interaktív módon is megismerkedhessenek a jelenséggel, a crl.hu/lepcso honlapon elérhetővé és kipróbálhatóvá tettünk néhány programot, amelyek különböző paraméterekkel és kezdőfeltételekkel rajzolják ki a labda mozgását a lépcsőn.⁶ A paraméterek megadása után a *Lépcső* nevű program ábrázolja az m meredekségű lépcsőt, és a rajta elindított pattogó labda pályájának a rajzterületbe eső részét. A következő programok az egyes pályákra jellemző x_n , v_n és N_n értékeket mutatják n függvényében, a *Fázistér* programok pedig az x_n , v_n és N_n koordináták által kifeszített térben (az úgynevezett fázistérben) ábrázolják a mozgást (kiválasztható, hogy melyik két

⁵ Az említett H tartomány meghatározásának nem matematikai okai vannak, hanem megítélésünk szerint körülbelül ezen paraméterek jellemzők a valós lépcsőkön lepattogó nem nagy vízszintes sebességű valós labdákra. A szóban forgó paramétertartományon belül kvalitatíve azonos mozgásformákat találtunk.

⁶ Mindegyik program JavaScriptben íródott (a forráskód is elérhető), tetszőleges böngészővel futtatható (az adatbevitelnél php részt tartalmaz).



2. ábra. Pattogás $k = 0,6$ ütközési együtthatóval ($m = 0,5, H = 4$). a) Az $x_0 = 0,7, v_0 = 3$ kezdőfeltétellel indított pálya (a folytonos görbe, az alsó lépcsősoron a felsőről lelépő mozgások folytatódnak) és b) a pattogások adatainak x_n, N_n, v_n sorozata. Mindkettő ábrán a szaggatott görbe az attraktor pályája és a szaggatott vízszintes vonalak az attraktorhoz tartozó fixpontértékeket mutatják, amelyeket rövid tranziensek után elér a rendszer. Az ezzel az ütközési együtthatóval zajló pattogások kivétel nélkül *mind* az egyszerű periodikus egylépcsősnyi pattogás attraktorához tartanak, amelyre a (8), (9) szerint $v^* = 1,5$ és $N^* = 1$. Az x^* függ a kezdőfeltételtől, esetünkben $x^* = 0,592$.

koordináta jelenjen meg a síkban). A grafikonokon ábrázolt értékek a *Táblázat*-ban numerikusan is megtekinthetők.

A mozgásegyenletből következik, hogy a sebesség és a lépésszám fixpontértékei

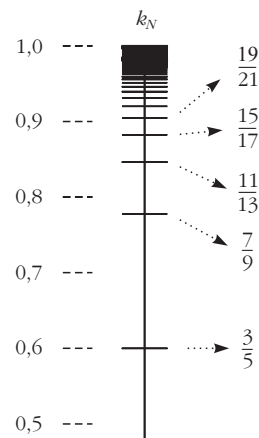
$$v^* = 2m \frac{k}{1-k}, \quad (8)$$

$$N^* = \frac{2m}{H} \frac{1+k}{1-k}. \quad (9)$$

2. feladat

Mutassuk meg, hogy ezek az eredmények következnek az (5)–(7) egyenletekből! Természetesen a pontos ismétlődést feltételezzük, vagyis: $x_n = x_{n+1} = x^*, v_n = v_{n+1} = v^*, N_n = N_{n+1} = N^*$.

Külön megfontolást igényel, hogy N^* definíció szerint csak egész szám lehet. Ezért úgy érdemes eljárni, hogy N^* értékét úgy vesszük fel, mint az N egész számot, és keressük a megfelelő ütközési együtthatóérté-



3. ábra. A periodikus ugrásokhoz tartozó k_N spektrum grafikus ábrázolása (10) alapján $m = 0,5, H = 4$ esetén. N növelésével a k_N értékek egymást egyre sűrűbben követve szigorúan monoton növekednek.

ketek. A (9) egyenletből az következik, hogy csak az alábbi *diszkrét* k értékek jöhetnek szóba:

$$k_N = \frac{\frac{NH}{2m} - 1}{\frac{NH}{2m} + 1}, \quad N = 1, 2, \dots \quad (10)$$

Ezt az *ütközési együtthatók spektrumának* nevezhetjük, hiszen periodikus pattogás csak kivételes k értékeknél történhet, hasonlóan ahhoz, hogy a hidrogénatom energiaszintjei is csak diszkrét értékek lehetnek [4, 5]. A $H = 4$ választással például az egy lépcsőt átugró periodikus megoldáshoz $k_1 = 3/5 = 0,6$, a két lépcsőt átugróhoz $k_2 = 7/9 = 0,77$ tartozik.⁷

Érdekes következmény: ahhoz, hogy $N = 1$ mint fixpont megvalósulhasson, teljesülni kell annak, hogy $k_1 > 0$, azaz $H > 2m$. A legegyszerűbb egylépcsősnyi periodikus pattogás tehát csak elegendően hosszú lépcsőfokok esetén fordulhat elő. „Rövidebb” lépcsőhossz esetén ugyanis az egy idő után beálló pattogás során az attraktoron a labda mindig átugrik néhány lépcsőfokot. Ugyanakkor nagy H esetén már az egyszeres pattogás is csak nagy ütközési együtthatókkal valósulhat meg.

A 3. ábra alapesetünk ütközési együttható-spektrumát mutatja grafikusán.

3. feladat

A (10) összefüggés alapján adjuk meg, mekkora H paraméter mellett figyelhetünk meg legalább N lépcsősnyi ugrásokat mutató periodikus pattogást!

4. feladat

Mekkora a függőleges sebesség fixpontértéke a spektrum N -ik szintjén?

⁷ Az ütközési paraméterek lehetséges értékei kizárólag az $NH/2m$ aránytól függenek, és a (10) kifejezésből látszik, hogy minél hosszabb a lépcsőfok, minél nagyobb az $NH/2m$, annál nagyobb k_N esetén tud csak megvalósulni az N lépcsősnyi periodikus pattogás (lásd még az 5. feladatot).

5. feladat

A 3. ábráról látszik, hogy a spektrum nagy N értékekre (a hidrogénatom spektrumához hasonlóan) besűrűsödik, miközben a k értékek közelítenek 1-hez. Mutassuk meg, hogy ebben a tartományban jó közelítéssel

$$k_N = 1 - \frac{4m}{H} \frac{1}{N}, \quad N \gg 1. \quad (11)$$

A 2. ábránál a $k_1 = 0,6$ eset kapcsán már említett azon tulajdonság, hogy x^* nem egyértelmű (tehát függ a kezdőfeltételtől), minden k_N értékre igaz. Ennek oka rögtön világossá válik, ha ismét a 2. ábra a) képére tekintünk, és észrevesszük: az attraktorhoz tartozó mozgás fontos jellemzője nem más, mint a hosszú idő utáni pattogások parabolaívei. Egy adott parabolaívhez pedig meghatározott N és v érték (N^* és v^*) tartozik, ellenben x^* már különböző lehet.⁸

Kettes ciklusok

Állandósult mozgásként előfordulhat az is, hogy a pattogás csak minden második ütközés után ismétlődik. Ez azt jelenti hogy az első és a második ütközés között N lépcsőt, a következő ütközésig K lépcsőt (N, K pozitív egész számok) repül át a labda, és azután szigorúan ez ismétlődik. A 4. ábra mutat egy ilyen kettes ciklus attraktort (szaggatott görbe), és azt is, hogy az adott kezdőfeltételtől hogyan jutunk el ehhez.

Érdekes, hogy az ilyen kettes ciklusok is csak *kivételes*, az N és K számok által meghatározott k értékek-nél következhetnek be. Az ezen a számokhoz tartozó $k_{N,K}$ ütközési együttható egyértelműen meghatározható. Közülük a legkisebb a $k_{1,2}$ érték – alapesetünkben – (lásd 4. ábra): $k_{1,2} = 0,715$, amely a két legegyszerűbb periodikus pattogás k_1 és k_2 ütközési együtthatója közé esik.

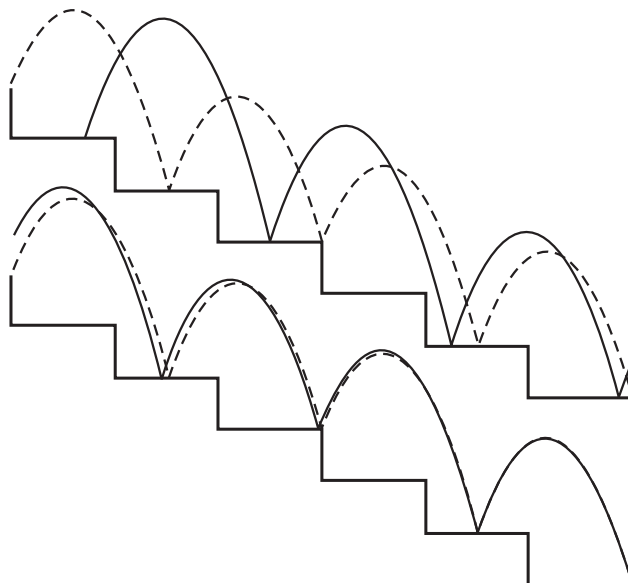
6. feladat

Vezessük le a $k_{N,K}$ ütközési együttható-spektrumot meghatározó „sajátérték-egyenletet”!

Mozgás tetszőleges k értékekkel

Tetszőleges ütközési együttható esetén, vagyis amikor k nem az egyes vagy a kettes ciklusnak megfelelő nagyságú, hanem valamilyen köztes értékű, akkor hosszú távon mindig *kváziperiodikus mozgás*

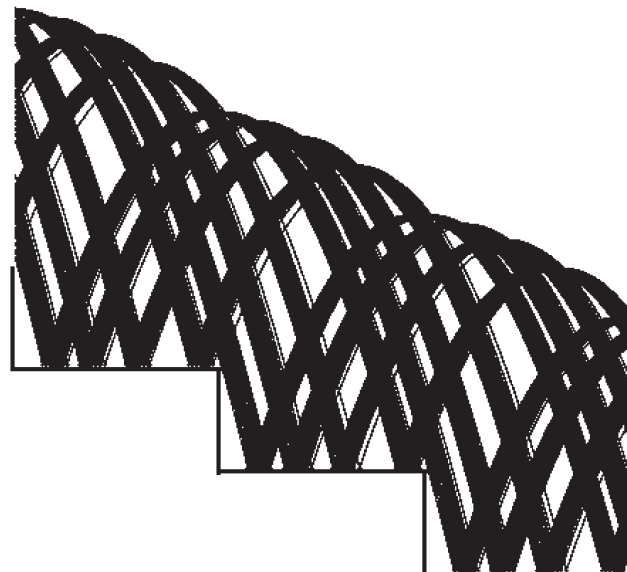
⁸ A pattogó labda ugyanis semmit sem „vesz észre” abból, ha „attraktoríve” alatt a lépcsőt jobbra-balra tologatjuk, hiszen továbbra is ugyanakkora egymás utáni magasságkülönbségekkel rendelkező vízszintes felületeken fog pattogni. A lépcsővel más „kapcsolata” pedig nincs. Persze csak addig tologathatjuk, ameddig az ív és a lépcső geometriája azt megengedi. Könnyen belátható, hogy periodikus attraktoroknál a lépcsőfokok bal oldalának egy része geometriai okokból „holt terület” lesz, viszont a fennmaradó rész összes x értéke már lehet x^* .

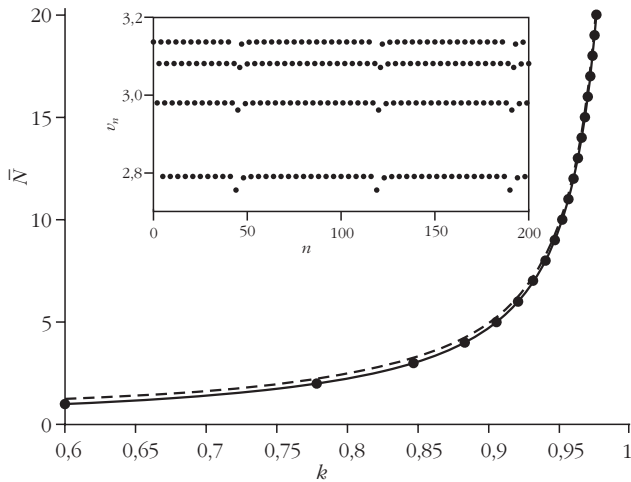


4. ábra. Pattogás $k = k_{1,2} = 0,715$ ütközési együttható esetén. A kezdőfeltételek és az egyéb paraméterek ugyanazok, mint a 2. ábrán. Az ezzel az ütközési együtthatóval indított pattogások rövid transziensek után *kivételesen* egy olyan periodikus ugrálás attraktorához (szaggatott görbe) tartanak, ahol egy lépcső után kettő, majd ismét egy átugrása történik, azaz $N = 1$ és $K = 2$.

jön létre (5. ábra). Az elnevezés abból adódik, hogy a pattogás nem pontosan periodikus, csak ahhoz hasonló.

5. ábra. $k = 0,75$ ütközési együtthatóval zajló mozgás attraktora a transziensek lecsengése után (egyéb paraméterek megegyeznek a 2. ábrán bemutatottal). (Az első 500 pattanás kivárását követően 1500 pattanás idejéig rajzoltuk ki az pályáikat.) A pályáik a 3. lépcső elhagyása után a nulladik fölé újra és újra ugyanabban a magasságban lépnek be a képbe. Bármely kezdőfeltételtől is indítjuk a mozgást, hosszú távon az ábrán látható kváziperiodikus mozgás jön létre. Az ütközési együttható esetünkben $k_{1,2} < k < k_2$, tehát az $N = 1, K = 2$ kettes ciklus és az $N = 2$ egyes ciklus közé esik. Ennek megfelelően a hosszú távú kváziperiodikus mozgásban egy, illetve két lépcsőfokot ugrik át egyszerre, méghozzá úgy, hogy átlagosan az utóbbi ugrásból van több. A numerikus vizsgálat szerint az átugrott lépcsők számának hosszú időre vett átlaga $\bar{N} = 1,747$. Az attraktorra jellemző v_n sebesség-idő sor a következő ábra betétjében látható.





6. ábra. Az attraktorra jellemző átlagos \bar{N} ugrásszám k függvényében, numerikus szimulálás alapján a nagy ütközési együttható ($k \geq k_1$) tartományban ($m = 0,5, H = 4$). Jól látható, hogy k növekedésével \bar{N} monoton nő. Az N hosszúságú egyes ciklusokhoz tartozó k_N N értékpárokat diszkrét pontokkal jelöltük. A szaggatott vonal a nagy k értékekre érvényes $\bar{N} = (2(1-k))^{-1}$ közelítő összefüggést illusztrálja (amely meglepően jó közelítésnek bizonyul az egész tartományban). Az \bar{N} $N+1$ kettes ciklusokban természetesen $\bar{N}(k_{N,N+1}) = [N+(N+1)]/2 = N+1/2$, és ezek is a görbére eső pontokat adnak, de a jobb áttekinthetőség kedvéért ezeket nem ábrázoltuk. A betét az 5. ábra, $k = 0,75$ attraktorához tartozó v_n sebesség-idő sort mutatja. Jól látszik, hogy a mozgás négy lépésenként majdnem ismétlődik, de a pontos ismétlődést az időnként bekövetkező „kitüremkedések” megakadályozzák.

A lényeg megértéséhez induljunk ki a k_1 ütközési együtthatójú mozgásból. Ilyenkor hosszú távon egy egyszerű periodikus mozgás jön létre: a labda minden lépcsőfokon pattan egyet, méghozzá ugyanazon a helyen, ugyanazon sebességgel. Ha k értékét kissé megnöveljük, akkor a kisebb energiavesztés miatt a labda nagyobbakat fog ugrani, és az $N = 1$ pattogások közé némi $N = 2$ is fog vegyülni. Ha tovább növeljük k értékét, akkor az $N = 2$ ugrások száma monoton módon nőni fog az $N = 1$ -hez képest egészen addig, amíg végül csak $N = 2$ marad. Ezzel éppen k_2 -höz érkezünk el. Van egy köztes állapot (de nem k_1 és k_2 számtani közepe!), ahol $N = 1$ és $N = 2$ darabszáma megegyezik, ráadásul felváltva követik egymást. Az ehhez tartozó ütközési együttható éppen $k_{1,2}$ -nek felel meg.

A fentebb említettek, illetve numerikus vizsgálatok alapján az alábbi megállapítások tehetők. A kettes ciklusos attraktorok közül csak a $K = N+1$ típusúak valósulnak meg, azaz nem lehet a kettes ciklus hosszabb íve kettő vagy több egységgel hosszabb, mint a rövidebbé. Hármast vagy hosszabb ciklusokat a nagy ütközési együtthatók $k \geq k_1$ tartományában *egyáltalán* nem találunk. Minden $k_N < k < k_{N+1}$ ütközési együttható esetén (ahol $N \geq 1$) olyan kváziperiodikus mozgás jön létre, amelynek alapperiódusai N és $N+1$ ugrásokból állnak. k növelésével nő az $N+1$ hosszúságú ugrások száma N -éhez képest. Az egész folyamat jól jellemezhető az attraktoron tapasztalható \bar{N} számmal, amely megadja, hogy két ütközés között átlagosan hány lépcsőt ugrott át a labda. Ezt röviden *átlagos ugrásszámnak* nevezzük, és numerikusan határozzuk

meg. A 6. ábra $\bar{N}(k)$ sima, monoton növekedését mutatja a k ütközési paraméter függvényében. Vegyük észre, hogy az N hosszúságú egyes ciklusok ütközési együtthatóinál N egyben az átlagos ugrásszám, $\bar{N}(k_N) = N$. Ha $N \gg 1$, azaz 1-hez közeli k_N ütközési együtthatók esetén az értékek besűrűsödnek, és (11) megfordítása szerint

$$\bar{N} = \frac{4m}{H} \frac{1}{1-k},$$

tehát 1-hez igen közeli ütközési együtthatók esetén az átlagos ugrásszám $(1-k)^{-1}$ -nel arányosan nő.

Többszörös pattogások egyetlen lépcsőn

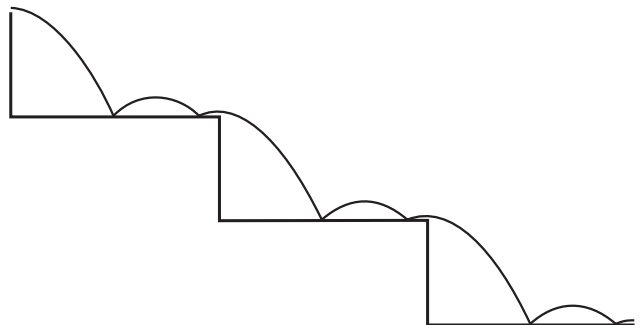
A kis ütközési együtthatók tartományában, $k < k_1$ -re új mozgásformák jelenhetnek meg. A kettes ciklusok keresése során nem engedjük meg, hogy N_n zérus lehessen. Kis ütközési együtthatóknál ennek viszont már lehet értelme, és azt jelenti, hogy egyetlen lépcsőfokon kétszer is pattan a labda. Az az eset, amikor a kettes ciklus úgy valósul meg, hogy a labda átugrik a következő lépcsőfokra, azon pattan még egyet és a mozgás innét ismétlődik (7. ábra), annál az ütközési együtthatónál tapasztalható, amelyet az $N = 1, K = 0$ vagy $N = 0, K = 1$ indexek jellemeznek. Ez a $k_{1,0} = k_{0,1}$ ütközési együttható alapesetünkben $k_{1,0} = 0,405$ -nek bizonyul, jóval k_1 alatti érték. Mivel itt két lépés után kerül a labda egy lépcsőfokkal odébb, az átlagos ugrásszám $1/2$: $\bar{N}(k_{1,0}) = 0,5$.

7. feladat

Vezessük le a $k_{1,0}$ -t meghatározó egyenletet tetszőleges paraméterek esetén!

Ennél kisebb ütközési együtthatókra az is megtörténhet, hogy egyetlen lépcsőn háromszor vagy többször pattan a labda, majd utána ugrik le a szomszédos lépcsőre, ahol mindez ismétlődik. Ha j pattanás történik egy lépcsőn (ahol j tetszőleges természetes szám), és a labda utána lép át a szomszédosra, akkor a mozgás $j+1$ ütközés után ismétlődő $j+1$ -es ciklus.

7. ábra. Kétszeres pattogás egyetlen lejtőn. A $k_{1,0} = 0,405$ ütközési együtthatóval történő mozgás pályája a tranziensek lecsengése után (egyéb paraméterek megegyeznek a 2. ábrán bemutatottal). Tetszőleges kezdőfeltétellel indított pattogások egy olyan periodikus attraktorhoz, kettes ciklushoz tartanak, ahol átugrás előtt minden lépcsőfokon kettőt pattan a labda.



Az átlagos lépésszám itt $1/(j+1)$. Az ehhez tartozó (növekvő j -vel egyre csökkenő értékű) ütközési együtthatók a fentiekhez hasonlóan meghatározhatók (lásd a 11. feladatot).

A csúszásba történő átmenet

Elegendően kis ütközési együttható, azaz nagy pottogási energiavesztés esetén előfordulhat, hogy a labdát egyetlen lépcsőfokon belüli *végtelen sok* pattanás után is még ugyanazon a lépcsőfokon találjuk. Végtelen sok ütközés után a labda már nem emelkedik a lépcső síkjá fölé, és mivel a vízszintes irányú sebessége állandó, ezért az ilyen mozgást a valós időben *csúszásként* értelmezzük. Ennek kapcsán észre kell vennünk, hogy a pottogásokra alapuló (5)–(7) leképezési egyenletek kiegészítésre szorulnak a valódi időben történő csúszással. (Ha az (5)–(7) leképezési egyenletekkel haladunk előre, akkor a labda végtelen sok pattanás után megállni látszik. A valós és az n -ben mért „iterációs” idő ilyenkor teljesen szétválk, az előbbi az utóbbiban gyakorlatilag megáll.) A részletek attól függnek, hogy mit tudunk a felület érdességéről. Ezt azonban nem szükséges konkretizálnunk, hiszen akár van súrlódás, akár nincs, a csúszás újfajta mozgás, egy sajátos attraktor, amelyből lépcsőket átívelő ugrások már sohasem alakulhatnak ki. Ha egyetlen lépcsőn végtelen sok ugrás történhet, akkor az iterálás szimulálásával leállhatunk, mondván, hogy a labda a csúszási attraktorra érkezett.

Ha egy adott lépcsőfokra érkezés utáni elpattanás függőleges sebessége v_i , akkor a teljes elmozdulás a lépcsőn történő végtelen sok pottogás után

$$\Delta x = \frac{2 v_i}{H} \frac{1}{1-k}. \quad (12)$$

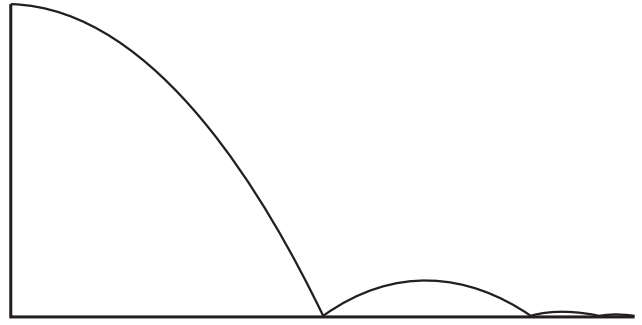
8. feladat

Vezessük le a (12) összefüggést! Útmutatás: használjuk a mértani sor összegképletét, érdemes dimenziósan számolni és az utolsó lépésben áttérni dimenziótlan mennyiségekre.

Amennyiben a labda az x_i helyen érkezik meg az előző lépcsőfokról az általunk megfigyelt lépcsőfokra, akkor annak feltétele, hogy csúszás alakuljon ki, az hogy végtelen sok pattanás után is még a lépcsőfok egységnyi koordinátájú végpontja előtt legyen, vagyis $x_i + \Delta x < 1$. A (12) összefüggést behelyettesítve és átrendezve

$$v_i < \frac{H}{2} (1-k)(1-x_i). \quad (13)$$

Az egyenlőtlenség teljesülése egy adott k értékre azon múlik, hogy hova esik be a labda az adott lépcsőfokon, azaz mekkora az x_i indulási koordináta, és mekkora ott az elpattanás v_i indulási sebessége. Szimulálásunkban akkor mondjuk, hogy egy mozgás



8. ábra. A kritikus k_c értékhez tartozó attraktor: a lépcső legvégéről $v = 0$ sebességgel elpattanó labda végtelen pottogás után éppen hogy kijut a következő lépcsőfok végére, ahonnan ismét $v = 0$ sebességgel pattan tovább. Itt $k_c = 1/3$ ($H = 4$, $m = 0,5$). (Mivel az egymást követő kis pályáik mindegyike k -szor rövidebb és k^2 -szer alacsonyabb (azaz egyre laposabb), mint a megelőző, ezért a lépcsőfok végén már csak egy vízszintes vonalat látunk.)

elérte a csúszási attraktort, ha valamelyik lépcsőfokra érkeve az ottani x_i és v_i között fennáll a (13) egyenlőtlenség.⁹

Az a kritikus k_c ütközési paraméterérték, amelynél már *bármely* kezdőfeltételtől induló mozgás – némi tranziens után – átmegy csúszásba, a numerikus tapasztalat szerint a következőkből határozható meg. Mivel a vízszintes sebességkomponens minden ütközésben megmarad, az előző lépcsőfok végén egységnyi (dimenziótlan) vízszintes sebességgel haladó labda ferde hajítási íve olyan x_i helyen érjen a következő lépcsőre, hogy azzal és a hozzá tartozó v_i ütközés utáni függőleges sebességgel végtelen sok pottogás után éppen a lépcső szélére kerüljön (8. ábra), vagyis (13) egyenlőségként teljesüljön. Így azt kapjuk, hogy

$$\sqrt{\frac{2m}{H} \frac{1+k_c}{1-k_c}} = 1. \quad (14)$$

9. feladat

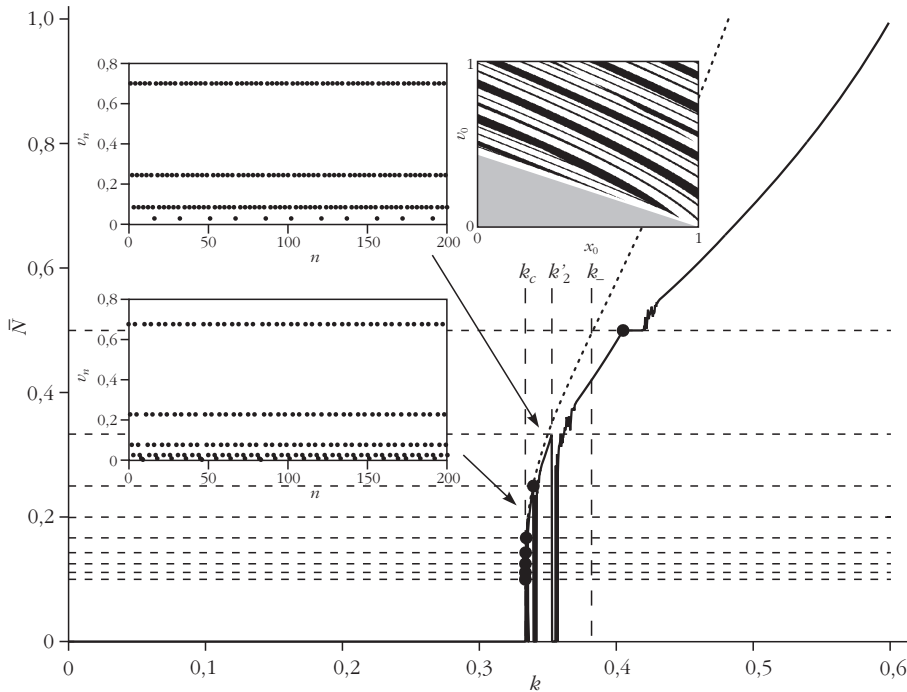
Vezessük le a (14) összefüggést! Útmutatás: Most is érdemes dimenziósan számolni, és az utolsó lépésben áttérni a dimenziótlan mennyiségekre.

A (14) egyenletet átrendezve, az explicit eredmény:

$$k_c = \frac{\sqrt{\frac{H}{2m} - 1}}{\sqrt{\frac{H}{2m} + 1}}. \quad (15)$$

A $H = 4$ választással $k_c = 1/3 = 0,33$. Ennél kisebb ütközési együtthatókra az is igaz, hogy bármilyen kezdőfeltétel esetén csúszó mozgás alakul ki, a *hosszú távú pottogó megoldások teljesen eltűnnek*.

⁹ Ha az adott lépcsőfokra érkező labda pattanásakor a csúszási feltétel (13) egyenlőtlensége teljesül, akkor szintén teljesül a lépcsőfokon végbemenő további (végtelen számú) pattanások mindegyikén is.



9. ábra. Az attraktorra jellemző átlagos \bar{N} ugrásszám k függvényében, numerikus szimulálás alapján a kis ütközési együttható ($k \leq k_c$) tartományban ($m = 1/2$, $H = 4$). A vízszintes szaggatott vonalak az $N = 1/2, 1/3, \dots, 1/10$ értékeknek felelnek meg, a fekete pontok pedig a k'_j ütközési együtthatóhoz tartozó $j+1$ periódusú attraktor adatait jelölik. Függőleges szaggatott vonallal a k_c helyét is bejelöltük. A pontozott görbe az $\bar{N}(k)$ függvény k_c környékén érvényes alakját adja meg. A két egymás alatt lévő betét a kváziperiodikus attraktor v_n idősorát mutatja a $k = 0,35$ (amely kissé balra esik a $k'_j = 0,353$ ponttól) és a $k = 0,337$ ütközési együtthatóknál. Előbbi mellett a hozzá tartozó pattogási és a csúszási attraktorok vonzási tartományai láthatók. A betétekhez tartozó $N = 0,298$ és $N = 0,194$ értékeket nyíljal jelöltük.

Mozgás kis k értékekkel

Az egyes periódusú attraktorhoz tartozó k_j érték alatt lefelé haladva továbbra is igaz, hogy *egyetlen* attraktor létezik, vagyis akármilyen kezdeti feltétellel indulunk, egy idő után minden mozgás egyforma jellegűvé válik. Az attraktor rendszerint kváziperiodikus, és a numerikusan meghatározott átlagos \bar{N} ugrásszám csökken a k csökkentésével (lásd 9. ábra). Létezik egy k_c érték, amely alatt ez a tulajdonság megszűnik abban az értelemben, hogy a hosszan tartó pattogás mellett megjelenik a csúszás lehetősége: a pattogás kváziperiodikus attraktora és a hosszan tartó csúszás *együtt létezik*. Ez az érték alapesetünkben numerikusan $k_c = 0,382$. Abban az esetben, ha nem létezik folyamatosan lépcsőfokról-lépcsőfokra pattanó mozgás (mert mindegyik kezdőfeltételnél hosszú távon előbb-utóbb csúszás történik), akkor \bar{N} függvény értéket nullának vesszük, hiszen ez a függvény azt adja meg, hogy hány lépcsőnyi az elmozdulás két ütközés között, de ebben az esetben az elmozdulás még végtelen sok ütközés után sincs egy lépcsőnyi sem.

Együtt létező attraktorok, tehát $k < k_c$ esetén felmerül, hogy milyen a vonzási tartományuk. Ez úgy határozható meg, hogy a kezdőfeltételek x_0, v_0 síkján más színnel jelöljük azokat a pontokat, amelyek az egyik vagy másik attraktorhoz tartanak. A 9. ábra „csíkos” betétábrája a pattogó mozgás és a csúszás vonzási tar-

ományát mutatja alapesetünk $k = 0,35$ értékénél fehér, illetve fekete színnel ábrázolva. A szürke háromszög a (13) egyenlőségnek megfelelő tartomány, az ilyen kezdőfeltétellel induló mozgások rögtön csúszási mozgások.¹⁰

10. feladat

Becsüljük meg k_c értékét azon az alapon, hogy k_c alatt nem csak a kezdőfeltételek, hanem a pattogási attraktor tipikus értékei mellett is fennállhat a (13) egyenlőség, vagyis a mozgás beléphet a szürke háromszögbe! Útmutatás: használjuk ki, hogy a tapasztalat szerint a (8) kifejezés minden pattogó mozgásra jó közelítést ad az attraktor átlagos v sebességére, tehát az vehető v_j -nek, és hogy az x_j helykoordináta tipikus értéke $1/2$ -nek tekinthető.

A k_c -nél kisebb ütközési paraméterek esetén a nullától különböző \bar{N} értékeket a pattogó mozgások attraktorára határoztuk meg. Az átlagos ugrásszám változó, de összességében elmondható, hogy tendenciájában csökkenő k csökkenésével. Meglepő módon azonban még jóval k_c elérése előtt, rövid intervallumokban teljesen eltűnnek a hosszú távon pattogó mozgások lehetőségei, vagyis a pattogó mozgás attraktora ilyenkor nem létezik. Egy ilyen intervallumon belül azonban, ha tovább csökkentjük k -t, akkor az intervallum végéhez érve, hirtelen újra megjelenik a pattogó mozgás, méghozzá \bar{N} egy lokális csúcásával. Ezek az \bar{N} értékek egész számok reciprocai, s az állandósult pattogás ezekben a kivételes pontokban periodikus: egy $N = 1$ -es lépés után j alkalommal pattan a labda ugyanazon a lépcsőn, vagyis $N = 0$ valósul meg j -szer egymás után. Az ennek megfelelő ütközési paramétert k'_j -vel jelöljük. Ilyenkor az átlagos ugrásszám természetesen

$$\bar{N}(k'_j) = \frac{1}{j+1}.$$

A legnagyobb ilyen intervallum $k'_2 = 0,3527$ és $k = 0,3555$ között létezik, és k_c -felé haladva a többi hasonló egyre kisebb hosszal ismétlődik. A 9. ábrán ez a halmozódás is megfigyelhető.

¹⁰ Fontos megjegyezni, hogy a 6. ábrán numerikusan mért \bar{N} ugrásszámnál, mivel egy k értékhez egy attraktor (egyfajta hosszútávú mozgás) tartozott, tetszőleges kezdőfeltétel mellett mérhettünk. Esetünkben azonban már meg kell válogatni a kezdőfeltételt, méghozzá úgy, hogy továbbra is pattogó mozgáson mérjünk átlagot (azon belül persze már mindegy melyiken, mert csak egyféle van egy adott k mellett most is).

11. feladat

Határozzuk meg a k'_j ütközési együttható értékeit, felhasználva azt, hogy a periodikus mozgás N_n idősora ilyenkor választható úgy, hogy $N_0 = N_1 = \dots = N_j = 0$, $N_{j+1} = 1$, majd ez ismétlődik. Útmutatás: használjuk az (5)–(7) rekurziókat, amelyek $N_n = 0$ -ra különösen egyszerűek.

12. feladat

Határozzuk meg az $\bar{N}(k)$ függvény k_c környékén érvényes alakját a k'_j értékek k_c körüli, azaz nagy j -kre történő halmozódása alapján!

A $k < k_c$ tartományban csakis a csúszási attraktor létezik. Alulról érve k_c -hez azonban „hirtelen” jelennek meg a pattogó mozgások, méghozzá úgy, hogy az $\bar{N}(k)$ görbe, illetve a közelítő görbe nagyon meredeken indul. A pattogó mozgás előbukkanása k_c -nél tehát a fázisátalakulásokra emlékeztető átbillenéssel jelenik meg, amit a dinamikus rendszerek nyelvén bifurkációnak nevezünk.

Összefoglalás

Vizsgálatunk célja, hogy megtudjuk, a labda lépcsőn lefelé pattogása, illetve annak legegyszerűbb modellje szerinti mozgás kaotikus-e. Összetett viselkedésre érdekes módon a kis k , vagyis a nagy disszipációs veszteség tartományában bukkantunk. Az (5)–(7) dinamika nyilván nemlineáris, erre utal a k_c -nél megfigyelt

bifurkáció is, meg az együtt létező attraktorok megjelenése. A vonzási határok azonban szemmel láthatóan simák (lásd a 9. ábra betétje), a káoszra fraktálszerkezet lenne jellemző. Maga az $\bar{N}(k)$ függvény $k < k_c$ -re néhol nem sima és ugrásokat is mutat. Megvizsgáltuk azonban azt is, hogy a közeli kezdőfeltételekből induló és hosszan pattogó mozgást végző mozgáspárok koordináta-különbségei hogyan változnak időben. A káoszra jellemző gyors széttartás helyett mindenütt *közeledést* találtunk. Így levonhatjuk azt a következtetést, hogy ebben a modellben a mozgás *nem* kaotikus. Ugyanakkor a jelenség összetettségére utal, hogy számos mennyiségre (elemi módszerekkel) nem találtunk képlettel leírható összefüggéseket, így például az \bar{N} átlagos ugrásszámfüggvényre, amelyet csak numerikusan tudtunk meghatározni. Ez az összetettség tulajdonképpen előrevetíti, hogy a mozgás már kis módosítás esetén is kaotikussá válhat. Ha a lépcsők éles sarka helyett lekerekített átmeneteket vennénk, a körívek jelenléte a problémát szőró biliárddá tenné, és abban eléggé nagy görbületi sugarak esetén már kiterjedt, robusztus káoszt várhatunk.

Irodalom

1. A. Jaroš, A. Nussbaumer, H. Kunze: *Basiswissen Physik-compact*. Öbvht, Wien, 1999.
2. Tél T., Gruiz M.: *Kaotikus Dinamika*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002.
3. Budó Á.: *Kísérleti fizika I.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1989.
4. Nagy K.: *Kvantummechanika*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1978.
5. Néda Z., Libál A., Kovács K.: *Elemi Kvantummechanika*. Kolozsvári Egyetemi Nyomda, 2006.

A HIPOTÉZISALKOTÁS SZEREPE A FIZIKA OKTATÁSÁBAN

Radnóti Katalin
ELTE TTK Fizikai Intézet

A természettudomány oktatásával kapcsolatos megfontolások középpontjában a legtöbb esetben a kísérletezés áll. A tanár vagy a tanuló, vagy együtt tanár és diák végezzenek minél több és érdekes kísérletet, mérést. Ezekből vonjanak le következtetéseket. A módszer a tantárgy tanulói megítélését is javítani fogja. A fizika tanuláshoz sokan elengedhetetlennek gondolják a feladatmegoldást is, amelyhez még gon-

dolkodásfejlesztő képességet is szoktak rendelni. Ez igényesebb feladatok esetében – amikor nem egyszerűen a képletekbe való behelyettesítés jelenti a megoldást – valóban így van.

A kép azonban ennél sokkal árnyaltabb, a gondolkodás fejlesztésének vannak olyan módszerei is, amelyek jobban kapcsolódnak a természet megismeréséhez. Egyik ilyen kiváló módszer, amelynek elterjesztésére széleskörű, nemzetközi programok indultak, és alkalmazási lehetőségeiről a fizika oktatásában már több írásban is beszámoltunk a kutatás alapú tanulás [1].

A kutatás alapú tanulás során azt szeretnénk, hogy a diákok mintegy átéljék, miként ismerjük meg a világot. Fontos, hogy *az ismeretszerzés menete minden lépésének részesei lehessenek*. Ők maguk fogalmazzanak meg természettudományos módszerekkel vizsgál-



Radnóti Katalin az ELTE-n végzett kémiafizika szakos tanárként. A budapesti Kölcsey Ferenc Gimnáziumban 8 éven keresztül tanított. Jelenleg az ELTE Fizikai Intézetében főiskolai tanár. Kutatási területe a fizika és a természettudományok tanításának módszertana. Publikációs tevékenysége is e témához kapcsolódik, tanári segédletek, tanulmányok, könyvek, könyvfejezetek.

A tanulmány az MTA *Szaktudományi Pályázat* 2014 támogatásával készült.

ható *kérdéseket*, alkossanak tesztelhető *hipotéziseket*, mérési lehetőségeket *tervezzenek* saját hipotéziseik alátámasztására, majd végezzék el azokat, kapjanak számszerű adatokat, amelyeket kiértékelnek, következtetéseket vonnak le stb. [2].

A 10-14 éves életkorban a természetismeret tanulásának, illetve a kémia, biológia, fizika tantárgyak belépésének időszakában egyik fontos feladat, hogy az érzelmek szerepét vagy annak egy részét a racionális gondolkodás vegye át. Ma már – például – a villámlást nem Zeusz haragjának gondoljuk. (*Bár valójában ez sem érzelmi megközelítés, hanem ez is racionális, csak másféle.*)

Mit jelent az, hogy *természettudományos szemlélet*?

A gyerekekben kialakítani azt az attitűdöt kell, hogy *a természet megismerhető, vannak természeti törvények*, a világ nem random, nem összevissza működik.

A világot *önmagából és önmagával* magyarázzuk.

A természetben előforduló jelenségek törvényekkel leírhatók, amelyhez a *matematika jelrendszerét* alkalmazzuk, amikor csak lehetséges.

A természettudomány feladata elsősorban a világ *működésének* leírása, a „*hogyan működik* kérdésre adandó helyes válaszok keresése”. El kell mondjuk azt is, hogy az olyan alapvető kérdésekre, mint például miért négy alapvető kölcsönhatás létezik, és azok miért olyanok, miért éppen akkora az elektron töltése, tömege... stb., vagy mi az élet értelme, nem tud választ adni.

Empíria és elmélet összhangja: a dolgok lehetséges működéséről, a megfigyelt jelenségek létrejöttének okáról *hipotéziseket* alkotunk, és ezek igazságtartalmát megfigyelésekkel és kísérletekkel képesek vagyunk *alátámasztani*.

A természet leírásához, megismeréséhez *egyszerűsítő feltételeket vezetünk be*, analógiákat és modelleket használunk, a sokaság leírásához statisztikai, valószínűségi módszereket alkalmazunk stb.

Ellenben elvetjük a „*parajelenségeket*”, amelyek nem reprodukálhatók, nem lehet a fentebb említett vizsgálatoknak alávetni.

Jelen írásban részletesebben a *hipotézissel* foglalkozunk. A tudományos kutatásban a hipotézisben megfogalmazódó új gondolatok biztosítják a tudományos megismerés fejlődését.

Mi a hipotézis?

A „*hypotezisz*” (*υποθέσεις*) görög szó, és eredetileg a vitatkozó felek által a vita tárgyául elfogadott tételt jelentette. Tehát egy feltételes tudást jelöl, azt jelzi, hogy a tudás nem kellően igazolt. Amikor hipotézist állítunk fel, akkor problematikus igazságértékű kijelentést teszünk. A korábbi tudományos ismeretek által többé-kevésbé megalapozott tudásról van szó [3].

Történetileg a tizedik században, az arab, illetve iszlám tudósok esetében került előtérbe a korai középkorban, hogy a felvetésekről, a hipotézisekről nem

egyszerűen csak vitatkoztak, nem csupán az érveket minősítették, hanem magát a természetet is megkérdézték, azaz empirikus vizsgálatot terveztek vizsgálatuk tárgyára.

Európában csak a reneszánsz idejében kerültek elő a tudományos kutatás módszereinek kérdései, amelyhez nagy mértékben járult hozzá az iszlám tudósok munkája.

A kísérleti és kontroll-, elő- és utóvizsgálatok fontossága is ebben a korban vált nyilvánvalóvá. Ezek alkalmazásával érték el, hogy vizsgálni lehessen, az észlelt változás ténylegesen mely hatásnak tulajdonítható.

A természettudományos oktatás fontos részének gondoljuk azt, hogy a diákok a természettudományos tanuláskorán képet kapjanak arról, miként keletkezik egy tudományos elgondolás, teszik azt próbára, támasztják alá megállapításait és végül hogyan fogadja el a tudományos közösség. Sok-sok példát kell bemutatni az oktatás során az egyes jellemző részekre, mint

- a *hipotézisek* megfogalmazása,
- a *mérések sorozata* és az ezekhez vezető gondolatok,
- az *analógiák*,
- az *egyszerűsítő feltevések*,
- egy adott korban létező két vagy több *rivális elmélet* közti választás például összehasonlító táblázatok segítségével.

Mi lehet a hipotézisalkotás szerepe az oktatási folyamatban?

A *tanár szempontjából* fontos, mert így egy adott témával kapcsolatban fel tudja mérni a tanulók előzetes tudását, elképzeléseit. A gyerekeknek, mire az iskolapadba ülnek, nagyon változatos elképzeléseik vannak a fizikai világról, annak működéséről, amelyet lehetne gyermektudománynak nevezni. Ez a legtöbb esetben nem egyezik meg a tanítani kívánt képpel, de a gyerekek ragaszkodnak hozzá. Ezért is kell ezeket felszínre hozni, ütköztetni a tényekkel [4].

A diákok nagyon sok helyről szereznek ismereteket. Fontos szerepe van az iskolának abban, hogy a legkülönbözőbb helyekről származó ismereteket rendszerbe helyezze a gyermeki gondolkodásban. Ezt viszont csak akkor lehet elérni, ha ezekről információja van a tanárnak. Ennek egyik lehetősége, ha a gyerekektől hipotéziseket kérünk egy-egy jelenség vizsgálata során.

A *diákok számára* egy ilyen fajta feldolgozás komoly *motivációval* is bír. Hiszen érzik, hogy véleményük, gondolataik fontosak az adott témakörrel kapcsolatban. Továbbá a kísérlet várható eredményének megbeszélése a diákok figyelmét ráirányítja az éppen tanulmányozandó jelenségre. Ez különösen *fontos gondolkodásfejlesztő terület*, hiszen előre kell elképzelni és elgondolni, hogy miként mehet végbe a jelenség, ami komoly absztrakciót igényel [2].

A tanulói hipotézisek *értékelésének* fő szempontja, hogy az *empirikusan vizsgálható-e*, nem pedig az,

hogy a kísérlet során ténylegesen bekövetkezzék, amit a tanulók várnak. A hipotézis egy *gondolatsor logikus következménye* legyen.

A hipotézisek megfogalmazásának szintjei

– A legegyszerűbb esetben „megjósoljuk”, hogy egy adott kísérleti elrendezés során milyen jelenség fog bekövetkezni. *Kvalitatív* előrejelzést adunk. Általános iskolai szinten a diákoktól körülbelül ennyi várható el.

– *Részben kvantitatív* előrejelzést adunk, matematikai formában fogalmazzuk meg a hipotézist, például a változók között egyenes vagy fordított arányosság lehet. Általános iskolai tanulóktól néhány esetben már ez a szint is elvárható, például hogyan függhet a vezető drót ellenállása annak hosszától és keresztmetszetétől.

– Megpróbálunk ténylegesen *mérhető, számszerű* előrejelzést adni a feltételezett függvénykapcsolat alapján.

– Számszerű előrejelzést adunk a feltételezett függvénykapcsolat alapján, de úgy, hogy az *egyszerűsítő feltételezéseket* is beépítjük. Például egy egyébként hatványfüggvénnyel jellemezhető kapcsolat lineárisan közelíthető a vizsgált tartományban.

Példák a tanulói hipotézisalkotásra

Írásunk további részében ténylegesen megtörtént eseteket írunk le, mindig kiemelve tanulságait, néhol tanácsot adva, hogyan lehetett volna még hatékonyabban alkalmazni a módszert.

Hipotézisalkotás kísérlet esetében

Sínen mozgó kiskocsik mozgása

Az *első* esetben két azonos tömegű kiskocsit (és a közöttük levő rugót) szorított a tanár egymáshoz. A kocsikat középre helyezve és elengedve azok egyszerre koppantak a sín két végén lévő ütközőkhöz.

A *második* esetben a kocsik tömegaránya 1:2 volt.

Hová kell helyezni a sínen a rugóval egymáshoz szorított kocsikat, hogy azokat elengedve egyszerre koppanjanak a sín két végén lévő ütközőkhöz? – hangzott el a tanári kérdés.

A gyerekek élénk vitába kezdtek. Egyikük fennhangon most is azt javasolta, hogy *középre*.

A tanár középre helyezte a kocsikat, elvégezte a kísérletet, és természetesen nem egyszerre koppantak a kiskocsik. *Majd rájöttek a gyerekek*, hogy 1:2 arányban kell osztani a távolságot a sínen.

A víz forráspontjának tanulmányozása

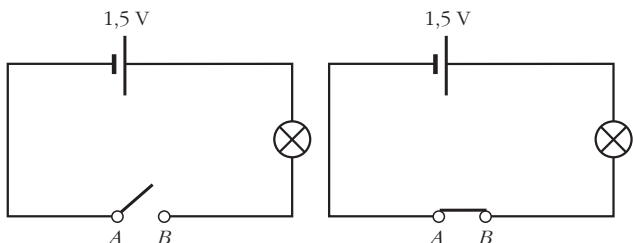
A diákok vizet melegítettek, miközben mérték a víz hőmérsékletét. A 100 °C érve többen is egyre magasabb hőmérsékleteket akartak leolvasni, mivel azt várták, hogy a víz hőmérséklete továbbra is emelkedni fog. Amikor nem ezt tapasztalták, a tanárhoz fordultak, hogy elromlott a hőmérő. A tanár *többször*

kicserélte a hőmérőt, míg végül a diákok rájöttek, hogy amikor forr a víz, akkor valóban nem emelkedik a hőmérséklet, hanem 100 °C-on marad.

A tanári munka fontos eleme – ebben az esetben is – a diákok tanulási folyamataival szembeni türelem.

Áramerősség és feszültség fogalmak differenciálása tanulókísérlet keretében

A diákok megépítették az 1. ábrán látható egyszerű áramkört. Mekkora feszültség mérhető az AB pontok között ideálisnak tekinthető feszültségmérővel a zárt és nyitott két esetben?



1. ábra. Egyszerű áramkör.

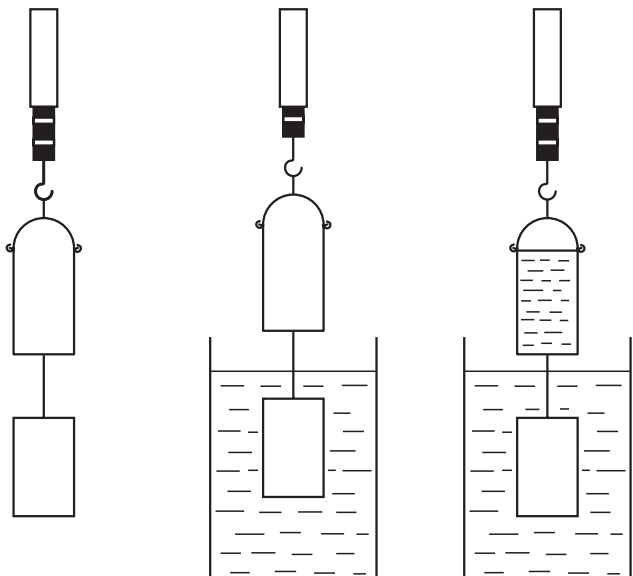
A diákok mind a két esetben mérték a feszültséget az AB pontok között, tehát a kapcsoló nyitott és zárt állásakor is (1. ábra).

A zárt kapcsolóval természetesen 0 V-ot mutat a műszer. Ez több diák számára érthetetlen volt, hiszen a lámpa világított, mivel az áramkör zárt volt. Többen a tanárhoz fordultak, hogy elromlott a műszer – a tanár *többször kicserélte* azt. Míg végül a diákok rájöttek, hogy a feszültségmérő műszer jó, zárt áramkörben rajta alig van potenciálesés.

Arkhimédész törvényének megismerése

A diákok a felhajtóerő nagyságát tanulmányozták az arkhimédészi hengerpár (2. ábra) segítségével. Ez egy speciális demonstrációs eszköz, amely egy tömör,

2. ábra. Arkhimédészi hengerpár. <http://www.puskas.hu/arany/kiserlet/20022003/kiserlet/arkhimedesz/leiras.html>



henger alakú testből és egy olyan üres hengerből áll, amelybe az előbbi éppen belefér. Az üres henger aljáról a tömör henger ráakasztható.

Az eszközzel a következő kísérletet szokás bemutatni: a hengerpárt rugós erőmérőre akaszthatjuk, majd vízbe merítjük az alsó tömör hengert, és figyeljük, hogy az erőmérő egyre kisebb értéket jelez. Ez után vizet kezdünk tölteni a felső, üres hengerbe, ügyelve arra, hogy továbbra is csak az alsó tömör henger merüljön a vízbe! Mire a felső, eredetileg üres henger csordultig telik vízzel, az erőmérő ismét az eredeti – vízbe merítés előtti – értéket mutatja. Következésképpen valóban a kiszorított víz súlyával egyenlő felhajtóerő hat a tömör hengerre (2. ábra).

A tanórán is – természetesen – az alsó tömör henger minél jobban a vízbe lógott, az erőmérő annál kisebb értéket mutatott. Végül az alsó henger teljesen a víz alá került. Az egyik diák azt állította, hogy a felső üres hengert színültig kell megtölteni vízzel ahhoz, hogy az erőmérő újra akkora értéket mutasson, mint amikor az alsó henger még a levegőben volt. És ezt minden kérdés nélkül, magától mondta!!! A tanulóknak egyszerűen ki kellett mondania, amit gondolt!

A tanár nem kért hipotézist a gyerekektől, de mint a példa mutatja, a diákoknak igényük van rá. Hipotézist kellett volna kérni, hiszen fontos, hogy a gyerekek átgondolják, mi fog történni adott esetben. Ez példa mutatja, hogy a diákok figyelme teljes mértékben ráirányul az éppen tanulmányozandó jelenségre.

Obm-törvény tanítása

Az óra témája az lesz, hogy megvizsgáljuk, mitől és hogyan függhet a vezető drót ellenállása – vezette fel az órát a tanár.

Egyik diák rögtön, gyakorlatilag kérdés nélkül mondta, hogy „minél hosszabb a vezető, az ellenállás annál nagyobb lehet”. Vagyis azonnal, ráadásul némileg matematikai alakban megfogalmazta hipotézisét.

Az óra következő részében elkezdtek a közös mérést, amelyet a tanár vezetett. Először a vezető hosszát változtatták az erre szolgáló demonstrációs eszköz segítségével. Egyszeres, kétszeres és háromszoros hosszúságú vezetődarabokat iktattak az áramkörbe, és multiméterrel rögtön mérték a vezetődarab ellenállását. A mért értékek a következők voltak: $R_1 = 16,3 \Omega$, majd $R_2 = 32,1 \Omega$ és végül $R_3 = 48,5 \Omega$.

Végül a diákok közösen megfogalmazták, hogy egyenes arányosság van a vezető hossza és annak ellenállása között, a hipotézisnek megfelelően.

A 3. esetben már számszerű becslést is lehetett volna kérni. Továbbá érdemes lett volna a többi diák véleményét is megtudni.

A vezető keresztmetszetétől való függés esetében kétféle hipotézis is érkezett.

Az egyik diák egyenes, míg egy másik diák fordított arányosságra tippelt a vezető keresztmetszete és ellenállása között.

Ezt követően az erre szolgáló demonstrációs eszközt használva, multiméterrel rögtön megmérték az egyszerűes, majd a kétszeres (két drót), végül a három-

szoros keresztmetszetű (3 drót) vezető ellenállását. A következő adatokat kapták: $R_1 = 16,4 \Omega$, $R_2 = 8,2 \Omega$ és végül $R_3 = 5,8 \Omega$.

A gyerekek rájöttek és megfogalmazták, hogy a két mennyiség között fordított arányosság van, tehát az erre tippelő diáknak lett igaz.

A 3. esetben már számszerű becslést lehetett volna kérni ebben az esetben is. Továbbá – mivel két eltérő hipotézis is érkezett – érdemes lett volna megkérdezni, hogy a többi diák miként gondolkodik. Van-e esetleg olyan, aki mást gondol? Például tegyük fel a kezüket, és össze lehet számolni, hogy hányan gondolnak az egyik vagy a másik hipotézisre.

Mivel többféle hipotézis érkezett, érdemes lett volna rákérdezni, hogy miért gondolják úgy. Érdemes lett volna összehasonlítani az előző esettel, amikor a vezető drót hossza változott, annak mi lehet a magyarázata, miként mozoghatnak a töltések. És miként mozoghatnak, ha nagyobb a keresztmetszet? Esetleg különböző analógiákat keresni, például párhuzamos mozgólépcsők beindítása metrószerelvény beérkezésekor, illetve útszűkület stb. És a beszélgetés után ismét hipotézist kérni, majd ezek után elvégezni a mérőkísérletet.

Azt, hogy két mennyiség egymással egyenesen arányos, úgy szokás belátni, hogy megnézzük a hányadosukat. Ez ebben az esetben nem látható még ennyire tisztán, de az alábbi definíció második része alapján már nyilvánvaló lehet.

„Az egyenes arányosság két együtt változó mennyiség közötti kapcsolatot fejez ki. A matematikában akkor mondjuk, hogy két mennyiség egyenesen arányos, ha hányadosuk állandó. Ekkor, ha az egyik mennyiség megduplázódik, a másik mennyiség is megduplázódik. Általában, ahányszorosára nő az egyik mennyiség, annyiszorosára nő a másik.”

A harmadik eset a vezető anyagától való függés, amelyet azonos hosszúságú és keresztmetszetű réz és kántáldrót segítségével vizsgáltak.

A kísérlet sorozatból az is szépen látszik, hogy egyszerre csak egy tényezőt változtatva, a többi állandónak tartva kell vizsgálni a jelenségek különböző tényezőktől való függését.

Sűrűség meghatározása

7. évfolyamra járó diákok feladata egy kavics sűrűségének meghatározása volt.

Mielőtt elkezdtek volna a mérést, a tanár arra kérte a diákokat, írják le, hogy mekkora sűrűséget várnak. Mit fognak mérni? Példaként a vizet említette, ahhoz lehet viszonyítani. A víz sűrűségét 1 g/cm^3 -nek lehetett venni, nem volt szükséges az SI mértékegység használata.

A diákok nagyon eltérő értékeket írtak le, mint 1000 g/cm^3 , $12\text{--}18 \text{ g/cm}^3$, $3\text{--}4 \text{ g/cm}^3$.

Ezt követően a diákok elvégezték a mérést. Megmérték mérleggel a kavics tömegét, vízkiszorítási módszerrel pedig a térfogatát, és a mért adatokat elosztották egymással. A kapott sűrűségek reálisak voltak, $2\text{--}3 \text{ g/cm}^3$ közé estek.

Ezt követően a tanár kérésére a diákok egyszerűen csak végigmondták, hogy ki milyen értéket várt és ténylegesen mekkorát kapott, de nem elemezték az előzetes felvetéseket, hogy azok *realisak* voltak-e, vagy sem! Holott például a 1000 g/cm^3 érték teljesen abszurd.

Hipotézisalkotás számításos feladat esetében

A módszer érdekessége, hogy ebben az esetben nem egy jelenségről, vagy ahhoz kapcsolódó mérés eredményéről kértünk hipotézisalkotást a diákoktól, hanem elméleti jellegű, számításos feladatról.

62 fő 10-11. évfolyamra járó diák oldotta meg az alábbi feladatot több-kevesebb sikerrel.

Értékelhető hipotézist 14-en fogalmaztak meg a feladat c) kérdésére. A továbbiakban a feladatot, az elvárt megoldást és a diákok által megfogalmazott hipotézisek kvalitatív elemzését mutatom be.

Atomtömeg meghatározása

A modern fizikai mérőműszerek általánossá válása előtti időkben az alábbi módszert is használták az atomtömegek megállapításához.

A *táblázatból* néhány fém fajhőjét és egy atomjának tömegét lehet kiolvasni.

a) Ábrázoljátok összefüggésüket!

b) A felismert összefüggés alapján határozzátok meg a tantál hiányzó adatát!

anyag	atomtömeg (10^{-26} kg)	fajhő (J/kgK)
nátrium	3,82	1235
kálium	6,49	741
vanádium	8,46	502
nióbbium	15,43	272
tantál	kb. 30	151
urán	39,55	112

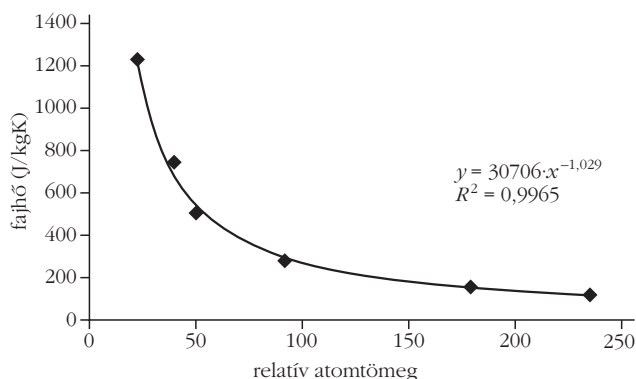
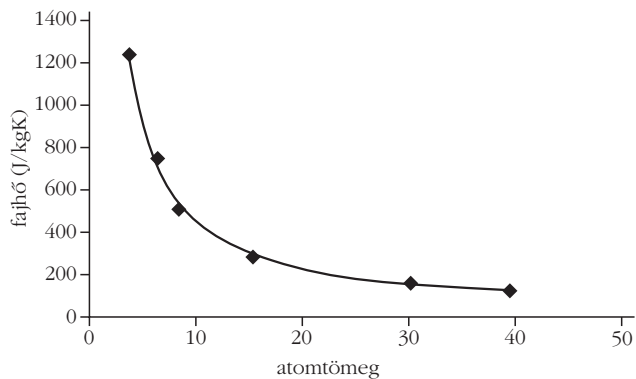
c) Számoljátok ki az egyes anyagok mólhőjét! Előtte gondoljátok meg, hogy mit vártok! Írjátok le, majd hasonlítsátok össze a számítás eredményével!

Megoldás:

– Fordított arányosság látható a relatív atomtömeg és a megfelelő fajhőadatok között (3. ábra).

A mólhőkre közel azonos értékeket, 25–28 J/molK-t kellett kapni.

anyag	atomtömeg (10^{-26} kg)	mólhő (J/molK)
nátrium	3,82	28,4
kálium	6,49	28,9
vanádium	8,46	25,4
nióbbium	15,43	25,2
tantál	kb. 30	28,3
urán	39,55	26,6



3. ábra. A fajhő és a relatív atomtömegek kapcsolata.

A fajhő értéke annál nagyobb, minél több részecske alkotja az 1 kg tömegű anyagdarabot. Ebből következik, hogy azonos számú részecskét tartalmazó anyagdarabot véve, ugyanakkora energia szükséges a hőmérséklet $1 \text{ }^\circ\text{C}$ -kal való emeléséhez. Tehát, ha mólnyi mennyiségeket veszünk, akkor közel azonos értékeket kell kapnunk.

A szilárd test esetére egyszerű modell alkalmazható, amelynek alapján úgy képzeljük el, hogy a szilárd testben golyó alakú részecskék meghatározott rendben helyezkednek el. Egy részecske energiája 3 irányú mozgási (rezgési) és 3 irányú kölcsönhatási energiából tevődik össze, ami $f = 6$ szabadsági fokot jelent: $U = 3NkT$. (Ez a modell csak „magasabb hőmérsékletek” esetében érvényes, hiszen közismert, hogy a szilárd anyagok fajhője hőmérsékletfüggő, amely függés az anyagi minőséggel változik.)

Melegítsük a kristályt, ekkor, mivel nincs számottevő térfogatváltozás: $Q = \Delta U = 3Nk\Delta T$, $W = 0$. A szilárd anyag hőkapacitása: $C = 3Nk$. Egy mólnyi mennyiség esetében $C_M \approx 25 \text{ J/molK}$.

Tehát hipotézisként azt vártuk el a diákoktól, rájöjjenek: körülbelül azonos értékeket kell kapniuk a mólhőkre. Ebben ténylegesen segítség volt a feladat a) és b) pontja, amelyek megoldása során rá kellett jönniük a fajhő és az atomtömeg közti fordított arányosságra. Ebből lehetett arra következtetni, hogy ha a részecskék száma azonos, akkor a mólhőknek közel azonosnak kell lenniük, amire néhány tanuló rájött.

A részecskéképpel kapcsolatos „jóslásokat” tovább lehet folytatni, és megnézni, hogy például ionos ve-

gyületek esetében, ahol 1 mól esetében nagyobb a részecskeszám miként változik a mólhő.

vegyület	mólhő (kJ/molK)	vegyület	mólhő (kJ/molK)
AgBr (sz)	52,4	AlCl ₃ (sz)	105
AgCl (sz)	50,8	BaO (sz)	47,5
AgJ (sz)	54,4	CuS (sz)	47,8

A táblázatból látható, hogy a mólhő nem 25 J/molK, hanem mintha annak többszöröse lenne. Ezek az anyagok vegyületek, amelyek 1 móljában több „darab” atomi részecske van, mint $6 \cdot 10^{23}$. Az ezüst-halogenidek esetében kétszer, az alumínium-klorid esetében pedig négyszer annyi, ami megmutatkozik a mólhő értékében! (De itt ez nem volt kérdés, csak érdekességként írtuk le.)

Többen érdekes hipotézist írtak, például:

– Voltak, akik a nátrium esetében várták a legnagyobb mólhőt; voltak, akik úgy gondolták, hogy nem függ az elem anyagi minőségétől; és voltak, akik azt várták, hogy a mólhő – a fajhőhöz hasonlóan – az atomtömeg növekedésével csökken. Volt olyan tanuló is, akinek sikerült a fentiekben leírt gondolatmenet alapján, a feladat a) és b) részének megoldása során felismert fordított arányosság felhasználásával kikövetkeztetnie a helyes választ. Volt, aki megpróbált matematikai jellegű összefüggést megfogalmazni, például $1/r$ -es összefüggést, de az nem volt kapcsolatban semmiféle fizikai mennyiséggel, nem adták meg, hogy r alatt mit értenek.

– Sajnos a legtöbben már nem írták le a következtetést, pedig jól kiszámolták a mólhő-értékeket. Azonban itt is találtunk érdekes megjegyzéseket: voltak, akik elcsodálóztak azon, hogy közel egyforma értékeket kaptak, pedig előzetesen másra számítottak, de nem keresték e tény okát, fizikai jellegű magyarázatát. Voltak, akik közel azonosat vártak, majd leírták, hogy a kapott eredmények megfeleltek a várakozásuknak. Volt egy tanuló, aki fizikai mennyiségekről való előzetes, tényleges gondolkodás nélkül hipotézist alkotott a várható eredményekre, ábrázolta azokat, majd $\sin x/x$ jellegű függvényt akart ráhúzni, ismét mindenféle fizikai jellegű megfontolás nélkül.

Az értékelésnél külön figyelembe vettük, hogy a diákok írtak-e valamilyen hipotézist, amelynek nem feltétlenül kellett jónak bizonyulnia. Pozitívumnak tekintettük, ha a hipotézis rendesen, logikusan volt megfogalmazva. Majd a következtetés levonásánál értékeltük azt, hogy miként vetették össze a kapott eredményeket az előzetesen felállított hipotézissel.

A 62 megoldás átlaga 37,7%-os volt, maximális pontszámot 5-en, 0 pontot 18-an kaptak, ők valójában nem foglalkoztak a feladattal.

Az alacsony teljesítmény oka az lehet, hogy az iskolában nem foglalkoznak ilyen jellegű, gondolkodást, az ismeretek aktív mozgósítását igénylő feladatokkal, problémákkal.

A diákoknak szokatlan volt, hogy a megadott adatok alapján grafikont kellett készíteniük, és abból következtetni az ismeretlen mennyiségre. A fordított arányosságot ugyan többen felismerték, de csak kevesen voltak képesek meghatározni az ismeretlen atomtömeget.

A hipotézisalkotás, majd annak számításos – nem kísérleti – ellenőrzése is szokatlan volt a tanulóknak. Bár számításos feladatok esetében is szokás előre megbecsülni az eredmény nagyságrendjét, majd a ténylegesen kapott értéket összehasonlítani vele, illetve vizsgáltatni realitását, azonban ez a feladat a megszokottnál összetettebb hipotézisalkotási folyamatot igényelt a diákoktól.

Végül a diákoknak következtetést kellett levonniuk. Össze kellett hasonlítaniuk a felvetést, a logikus gondolatsor eredményeképp megalkotott hipotézist a számítás útján kapott eredménnyel.

Fejlesztési lehetőségek

Tényleges kutatási tevékenység vagy kísérlet manuális elvégzésére sajnos nem mindig, nem minden téma esetében van lehetőség. Ilyenkor például filmet lehet nézni a kutatásról, a kísérletről, de kutatásokról szóló érdekes beszámolókat is lehet olvasni és a szövegeket a tanórán feldolgozni. Ez utóbbi esetben nem csak a feldolgozás konkrét szakmai tartalmára érdemes kitérni, hanem a kutatás menetének, a kutatás módszereinek elemzésére is, illetve a témánk szempontjából kiemelt rész, a hipotézisek megbeszélésére. Erre azért is szükség van, mert az elektronikus és írott médiából sokféle kutatási eredményről értesülhetünk, amelyek egy része tényleges, valódi kutatásnak tekinthető, de jó részük sajnos áltudomány. A természettudományos tanórák fontos képességfejlesztési feladata, hogy a diákok képesek legyenek a tudományos híradások elkülönítésére az áltudományos közlésektől [5].

Lehetséges kérdések a kutatási szöveg kutatással kapcsolatos vonatkozásainak elemzéséhez

1. Mi volt a kiindulási probléma?
2. Mi volt a kutatási kérdés?
3. Milyen hipotézisek (felvetések) fogalmazódtak meg a kutatás során?
4. Bevált-e a hipotézis?
5. Milyen módszert javasolt?
6. Hogyan tesztelték az ajánlott módszert?
7. Milyen eredménye volt az ajánlott módszernek?
8. Milyen hibaforrások lehettek a vizsgálat során?
9. Ti milyen további kutatási kérdéseket fogalmaznátok meg?
10. Ti milyen vizsgálatokat végeznétek még el? Mi lenne a kontrollkísérlet?
11. Milyen mennyiségeket mérnétek meg, mivel és hogyan?
12. Napjainkra nézve milyen hatásai vannak az adott kutatásnak?

13. Miként képzelitek el a tudományos törvények megszületését a fenti történet elolvasása után?
14. Mai elképzelésünk teljes mértékben megfelel annak, amit annak idején megalkottak, vagy vannak már újabb elméletek? Nézzetek utána!
15. Hogyan bővült az ismeretrendszer, mely tények nyertek azóta magyarázatot?

Írásomban a hipotézisalkotás fontosságát és annak a fizika tanításában való néhány alkalmazási lehetőségét mutattam be. Bízom benne, hogy a tanárkollégák számára sikerült új ötleteket adni tanóráik színesebbé, érdekesebbé és eredményesebbé tételéhez!

HÍREK – ESEMÉNYEK

A MAJDNEM ÖRÖK ÉLET TITKÁNAK TUDÓJA

Kugler Sándorné, 1908–2016

Életútja lezárulásáról értesülve egy nyolc évvel ezelőtt tőle kapott levelet olvastam újra. Százéves születésnapján más egykori diákjaival lakásán látogattuk meg, ettől saját kezűleg sült pogácsáját, átadtuk vallomásaink kötetét, amelyet *Kovács László*, egykori tanárjelöltje kezdeményezésére írtunk, és beszélgettünk. Egykori nagykanizsai gimnáziuma és a tanári karrierje második szakaszának otthont adó budapesti Radnóti Gimnázium diákjai először találkoztak és örömmel fedezték fel, hogy tanáruk ugyanazzal a szelíd ösztönzéssel, személységük romboló átalakításának szándékát messze elkerülve fordította érdeklődésüket a fizikus, a matematikus vagy a mérnöki hivatás felé.

Györgyi néni a beszélgetés közben egyszer csak a maga melletti székhez invitált és nekem szegezte a kérdést: „Mondd, mit jelent az, hogy a kvarkoknak színe van?” Nyolc év után kézbe véve a látogatás után kapott postai levelet, újra csodálattal töltött el írójának fizika iránti nem szűnő kíváncsiságát, minden bántó szándéktól mentes iróniáját, a népi mesélőket idéző ízes magyarságát egyszerre bizonyító, mesének álcázott vallomása arról, hogyan is élte meg a 20. század fizikájának fordulatait. Íme, a gyöngybetűkkel, zsinóregyenességű sorokkal íródott levél szövege:

„Kedves András!

Nagyon kellemes meglepetés volt látogatástok (megismételhető Anikóval) és köszönöm a könyvben írt el-

Irodalom

1. Radnóti K., Adorjáné Farkas M.: A kutatás alapú tanulás lehetőségei a fizikaórán. *Fizikai Szemle* 65/6 (2015) 198–204.
2. Adey P., Csapó B.: A természettudományos gondolkodás fejlesztése és értékelése. In Csapó B., Szabó G. (szerk.): *Tartalmi keretek a természettudomány diagnosztikus értékeléséhez*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2012.
3. Fehér M., Hársing L.: *A tudományos problémától az elméletig*. Kossuth Könyvkiadó, Budapest, 1977.
4. Nahalka I.: *Hogyan alakul ki a tudás a gyerekekben? Konstruktivizmus és pedagógia*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002.
5. <http://www.sciencebuddies.org/blog/2010/02/a-strong-hypothesis.php>
6. Radnóti K., Nagy M.: A rádium felfedezése. Kutatási szöveg feldolgozása a fizika- és/vagy a kémiaórán. *Nukleon* VI/3 (2013) <http://nuklearis.hu/nukleon/cikkek?page=2>

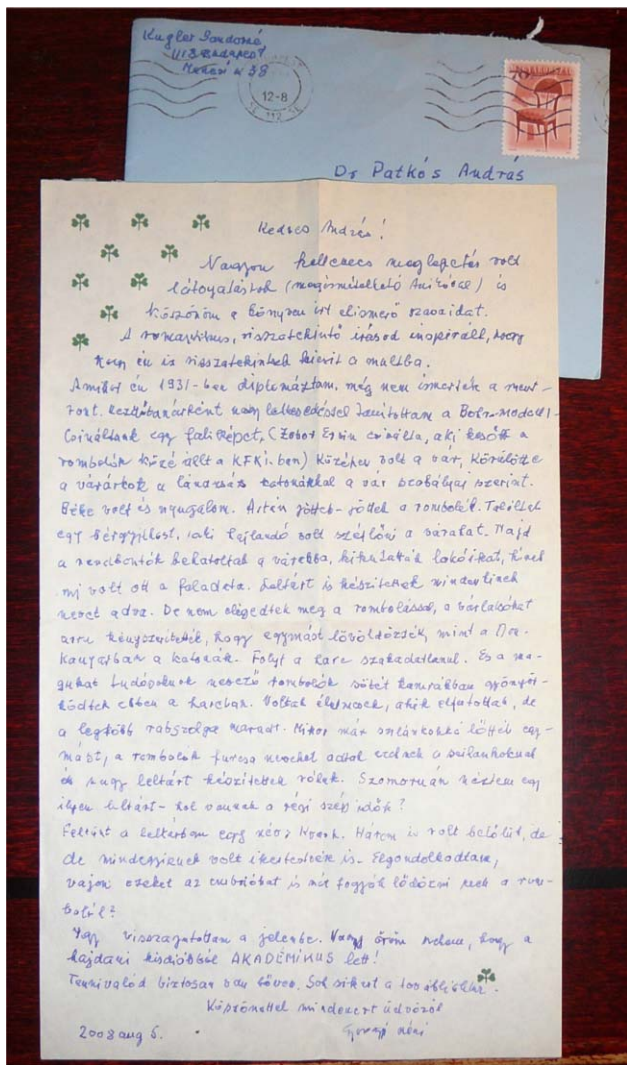
ismerő szavaidat. A romantikus, múltba visszatekintő írással inspirált, hogy én is visszatekintsek kicsit a múltba.

Amikor én 1931-ben diplomáztam, még nem ismerték a neutron. Kezdő tanárként nagy lelkesedéssel tanítottam a Bohr-modellt. Csináltunk egy faliképet (*Zobor Ervin* csinálta, aki később a rombolók közé állt a KFKI-ban). Középen volt a vár. Körülötte a várarok a lándzsás katonákkal a vár szabályai szerint. Béke volt és nyugalom. Aztán jöttek-jöttek a rombolók. Találtak egy bérgyilkost, aki hajlandó volt szétlőni a várakat. Majd a rendbontók behatoltak a várakba, kikutatták lakóikat, kinek mi volt a feladata. Leltárt is készítettek, mindenkinek nevet adva. De nem elégedtek meg a rombolással, a várak lakókat arra kényszerítették, hogy egymást lövöldözzék, mint a Donkanyarban a katonák. Folyt a harc szakadatlan. És a magukat tudósoknak nevező rombolók sötét kamrákban gyönyörködtek a harcban. Voltak élelmesek, akik elfutottak, a legtöbb rabszolga maradt. Mikor már



szilánkokká lőtték egymást, a rombolók furcsa nevet adtak ezeknek a szilánkoknak és nagy leltárt készítettek róluk. Szomorúan néztem egy ilyen leltárt – hol vannak a régi szép idők?

Feltűnt a leltárban egy név: Kvarc. Három is volt belőlük, de mindegyiknek volt ikertestvére is. Elgondolkodtam, vajon ezeket az embriókat is szét fogják lődni ezek a rombolók?



Így visszajutottam a jelenbe. Nagy öröm nekem, hogy a hajdani kisdíákiból AKADÉMIKUS lett!
Tennivaló biztosan akad bőven. Sok sikert a továbbiakhoz.

Köszönettel mindezért, üdvözlő
2008. aug. 5. Györgyi néni"

Drága Györgyi néni!

Tennivalónk valóban sok van. Igaz, a szökevény neutrínókat elkapták, hiába váltogatták ruhájukat. Bizonyára Györgyi néni is meghökkent a sikeres üldözők kitüntetésén, bár egyelőre értetlenül állunk a szökevények trükkös ruhaváltogatásainak rejtélye előtt. Az elektronok és protonok növekvő energiájú ütközéseiből szétrobbanó szilánkok továbbhasítása egyelőre nincs napirenden, ám számítógépeinkben az elemi kölcsönhatások matematikai törvényeit egyre nagyobb sikerrel alkalmazzuk a (rabszolgá) kvarkokra a proton és a neutron tulajdonságait hűen visszaadó kép megszerkesztésére. Talán csak néhány évtized és eljutunk annak a harmóniát sugárzó stabil atomi szerkezetnek az alaptörvényekből kiinduló felépítéséig, amelyre Györgyi néni sok kiváló kortársával (például a szintén 1908-ban született *Teller Edé-vel*) egy időben csodálkozhatott rá. Naivan bár, de hajlamos voltam elhinni, hogy Györgyi néni a hosszú élet titkának ismerőjeként mindennek örökkön kíváncsi tanúja lesz. De minden emberi történetnek van a természetől szabott vége.

Kugler Sándorné a múlt század középső harmadának jelentős tanárszemélyisége volt. Másképp hatott, mint legendás kollégái, *Vermes Miklós* vagy *Kunfalvi Rezső*. Legérdeklődőbb tanítványait, önbizalmukat erősítve, arra bátorította, hogy kitartóan dolgozzanak a *KöMaL* fizika rovatának feladatain, küldte őket az Ifjúsági Fizikai Kör előadásaira a Szabadság téri MTESz székházba, örömmel fogadta eredményességüket a tanulmányi versenyeken. Mégis, fizikatanári hatásának igazi terepe a fizikai jelenségek érdekességének, e tudományág vonzó arculatának mindenkire pozitív hatást gyakorló közvetítése volt. Harmonikus személyisége minden diákjára rásugározta a fizika harmóniáját is. Válhattunk fizikussá, matematikussá, vegyészé, külkereskedővé vagy éppen újságíróvá, e sugárzást mindnyájan magunkba fogadtuk és tudatosan vagy tudatunk alatti ösztönrel továbbadjuk.

Epszilonnyi lépés a hosszútól az örök élet felé...
Patkós András

BÚCSÚ KUGLER SÁNDORNÉ TANÁRNŐTŐL

Abban a szerencsés helyzetben vagyok, hogy kétszer is tanítványa lehettem Györgyi néninek.

Nagykanizsán a Landler (ma Batthyány Lajos) Gimnáziumban negyedikes koromban volt a fizikatanárom, majd Budapesten ötödéves mat-fizes hallgatóként a szakvezetőm a Radnóti Miklós Gyakorlóiskolában. Tanári munkájának alapját a szigorúság, a rendszeres számonkérés és értékelés képezte. A jelenségértelmezésen túl a demonstrációs és a tanulói kísérletezésre, valamint a feladatmegoldásra helyezte a hangsúlyt. Megértő és emberséges volt. Tiszteltük és szerettük.

Tanárkorunkban is figyelemmel kísérte munkánkat. Eszközépítésre, cikkírásra biztatott, és mindig őszinte elismeréssel nyugtázta eredményeinket.

Tanár-tanítványaimmal közösen azt szoktuk mondani, hogy tanári családfánkat mi *Jedlik Ányosig* vissza tudjuk vezetni. Jedlik az egyetemen nyolc évig együtt dolgozott *Eötvös Loránddal*, aki az ő hatására vált elmélyült, komoly tudóssá. *Mikola Sándor* Eötvös tanítványa, majd munkatársa is volt. Györgyi néninek egyetemista korában Mikola Sándor tanította két féléven át a fizika-szaktudományt.

Az előadások, kísérletbemutatók tényleges tanítási színhelyen, az Evangélikus (Fasori) Főgimnáziumban voltak.

Kugler tanárnő nyugdíjba vonulásakor, 1974-ben az Eötvös Loránd Fizikai Társulattól megkapta a Mikola Sándor *díjat*, majd 1998-ban az Eötvös-plakettet. 2008-ban, 100. születésnapját követően, a Fasori Gimnázium legendás matematikatanáráról elnevezett Rátz Tanár Úr Életműdíjat vehette át a Magyar Tudományos Akadémián.

A nagykanizsai temetőben Györgyi néni sírjának közvetlen közelében nyugszik két kiváló magyartanár kollégája, karnyújtásnyira van tőle Mikola Sándor sírja. Származásuk is összeköti őket. Mindketten a vendvidéken születtek. Mikola Péterhegyen (ma Gornji Petrovci), Kovács Györgyi pedig Bántornyán (ma Turnišče).

Ezernél több diák és közel száz budapesti tanárjelölt búcsúzik most fájó szívvel szeretett Tanárnőjétől, Kugler Györgyi nénitől.

Kovács László

KITÜNTETÉSEK MÁRCIUS 15. ALKALMÁBÓL

Széchenyi-díjat kapott *Tél Tamás*, a fizikai tudomány doktora, az ELTE TTK Elméleti Fizikai Tanszéke egyetemi tanára, az MTA–ELTE Elméleti Fizikai Kutatócsoportja vezetője a nem-egyensúlyi statisztikus fizika területén elért, a kaoszelmélet és a környezeti áramlások kutatásával, illetve gyakorlati alkalmazásával kapcsolatos eredményei, valamint a hazai fizikatanár-képzést megújító, iskolateremtő oktatómunkája és aktív tudományos közéleti tevékenysége elismeréseként.

A Magyar Érdemrend lovagkereszt (polgári tagozat) kitüntetését kapta *Nagy Gyula*, a Szent István Egyetem Ybl Miklós Építéstudományi Kar, Építőmérnöki Intézetének főiskolai tanára, a *Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok* volt főszerkesztője.

A Magyar Arany Érdemkereszt (polgári tagozat) kitüntetésben részesült *Oláh Anna* fizikus, Bolyai-kutató, nyugalmazott tanár.

Szívből gratulálunk a kitüntetetteknek.

A TÁRSULATI ÉLET HÍREI

Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat 2016. évi Küldöttközgyűlése

Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat 2016. május 14-én, szombaton 10:00 órai kezdettel tartja Küldöttközgyűlését az ELTE Fizikai épületének (Bp., XI. Pázmány Péter sétány 1/A) 083. előadótermében (Eötvös-terem).

A Küldöttközgyűlés nyilvános, azon bárki részt vehet. A vitákban a Társulat tagjai részt vehetnek, felszólalhatnak, de a szavazásban csak a területi és szakcsoportok által megválasztott, küldöttigazolvánnyal rendelkező küldöttek vehetnek részt. A küldöttek igazolványukat a regisztrációnál mutassák be!

Ha a Küldöttközgyűlés a meghirdetett időpontban nem lenne határozatképes, akkor 10:30-ra ismét összehívjuk, és a Küldöttközgyűlés a napirend előtti szakmai előadás után kezdi meg munkáját. Az ily módon ismételt összehívott Küldöttközgyűlés határozatképes, tekintet nélkül a megjelent küldöttek létszámára.

A Küldöttközgyűlés hagyományosan napirend előtti szakmai előadással kezdődik 10:00 órakor. *Trócsányi*

Zoltán professzor (Debreceni Egyetem) *Neutrínó-oszcilláció* címmel tart előadást.

Az ELFT Elnöksége a következő napirendi pontokat javasolja a Küldöttközgyűlésnek:

1. A levezető elnök megnyitója;
2. A Szavazatszámlláló Bizottság felkérése;
3. főtitkári beszámoló;
- 3.1 a Társulat 2015. évi közhasznúsági jelentése;
- 3.2 a Társulat 2016. évi költségvetése;
4. a Felügyelő Bizottság jelentése;
5. az Elnökség javaslata az Alapszabály módosítására;
6. az Elnökség javaslata a Közgyűlés által odaítélhető Társulati Díjakra;
7. vita a 3–6. és nyílt szavazás a 3–5. napirendi pontokról pontonként;
8. javaslat a Jelölőbizottság szemlélyi összetételére;
9. vita a jelölésekről, helyszíni jelölés, nyílt szavazás a szavazólapra kerülő jelöltekről;
10. szünet és titkos szavazás a Jelölőbizottságba jelöltekről és a Közgyűlés által odaítélhető Társulati Díjakról;
11. a Társulat díjainak kiosztása;
12. a szavazás eredményének kihirdetése;
13. zárszó.

Szerkesztőség: 1092 Budapest, Ráday utca 18. földszint III., Eötvös Loránd Fizikai Társulat. Telefon/fax: (1) 201-8682

A Társulat Internet honlapja <http://www.elft.hu>, e-postacíme: elft@elft.hu

Kiadja az Eötvös Loránd Fizikai Társulat, felelős: Szatmáry Zoltán főszerkesztő.

Kéziratokat nem őrünk meg és nem küldünk vissza. A szerzőknek tiszteletpéldányt küldünk.

Nyomdai előkészítés: Kármán Stúdió, nyomdai munkálatok: OOK-PRESS Kft., felelős vezető: Szatmáry Attila ügyvezető igazgató.

Terjeszté az Eötvös Loránd Fizikai Társulat, előfizethető a Társulatnál vagy postautalványon a 10200830-32310274-00000000 számú egyszámlán.

Megjelenik havonta, egyes szám ára: 800.- Ft + postaköltség.

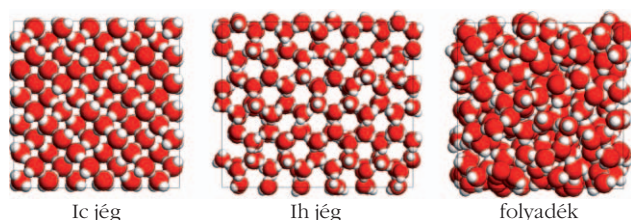
HU ISSN 0015–3257 (nyomtatott) és **HU ISSN 1588–0540** (online)

EURÓPAI ÉRDEKESSÉGEK A *EUROPHYSICS NEWS* VÁLOGATÁSÁBAN (2015. július–augusztus)

Miért nem alakul át a túlhűtött víz jéggé?

C. R. C. Buhariwalla et al.: Free energy of formation of small ice nuclei near the Widom line in simulations of supercooled water. *Eur. Phys. J. E* 38 (2015) 39.

Azon potenciálgát kiszámítása, amelyik megakadályozza a víz 0 °C alatti közvetlen jéggé alakulását, alapvető fontosságú annak megértésében, hogy a hőmérséklet csökkenésével hogyan nő meg összehajthatósága.



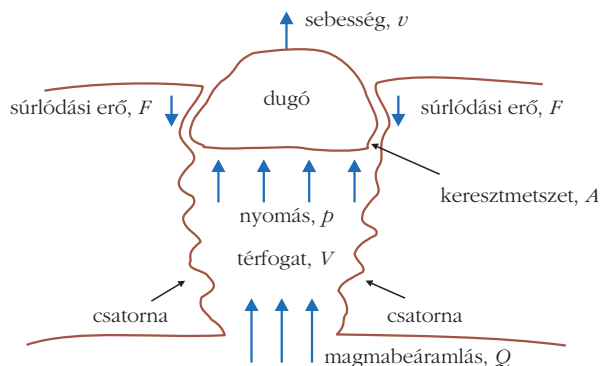
A jég Ic módosulatának (216 vízmolekulás számítógépes szimuláció), Ih módosulatának (432 molekula négyzetes elemi cellájú szimuláció) és a folyékony víz reprezentatív konfigurációi.

A víz sokféle titokzatos viselkedést mutat. Különösen 0 °C alatt, mielőtt jéggé változna, amikor túlhűtött víznek hívják. Csak a közelmúltban sikerült megfigyelni a jéggé alakulás spontán folyamatának első lépéseit. Mindössze 15 vízmolekulából álló apró csoportosulások a kristályos állapotú jégre jellemző szerkezeti mintát kezdik mutatni. Az új tanulmány ezen része rámutat, hogy a kristályosodás előtti állapotában a folyékony víz nem válik teljesen instabillá. A kutatók abból az észrevételből jutnak erre a konklúzióra, amely szerint a két állapot közötti energiagát fennáll a túlhűtött víz kompresszibilitása növekedésének egész tartományában. Korábbi vizsgálatok azt állították, hogy a folyadék hőmérsékletének csökkenésével a potenciálgát eltűnik.

A zaj dobpergéshez hasonlatos vulkanikus szeizmikusságot okoz

D. V. Alexandrov, I. A. Bashkirtseva, L. B. Ryashko: How a small noise generates large-amplitude oscillations in the volcanic plug and produces high seismicity. *Eur. Phys. J. B* 88 (2015) 106.

A vulkánokat kaotikus rendszereknek tartják. Nehezen modellezhetők, mivel a vulkánkitörések geofizikai és kémiai adatai nagyon bizonytalanok. A szerzők egy korábbi (mások által fejlesztett) modellt fejlesztettek tovább a magmacsatorna és a vulkándugó közötti súrlódás figyelembe vételével.



A dugó dinamikáját és az arra ható súrlódási erőket ábrázoló vázlat.

Az új vizsgálat arra mutat rá, hogy viszonylag kis külső zavar is kulcsszerepet játszhat a kaotikus, dobpergészerű szeizmikus jelenségek kialakulásában, amint az bekövetkezett a közelmúltban a chilei Calbuco-vulkán kitörése során. A külső zajjal előidézett vulkánaktivitás lehetőségére ez a kiterjesztett modell mutat rá először. A külső zaj a vulkándugó mozgásában nagy amplitúdójú oszcillációt, valamint erős szeizmikusságot generál. A zaj intenzitásának növelése a dugó szabálytalan periodicitású dobpergészerű mozgását okozza, amelynek frekvenciáját a zaj részletei határozzák meg. Ez a lebegészerű viselkedés egyik meghatározó eleme lehet a vulkanikus szeizmikusság megértésének.

Szerves nanorészecskék megnövelt tumorölő hatással

M. Verkhovtsev et al.: Comparative analysis of the secondary electron yield from carbon nanoparticles and pure water medium. *Eur. Phys. J. D* 69 (2015) 116.

Szénalapú nanoméretű részecskék használatával a rákos daganatok érzékenyebbé tehetők proton sugárterápiára, ami a rákos sejtek jobban fókuszált pusztításához vezethet.

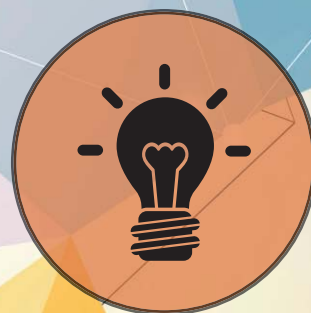
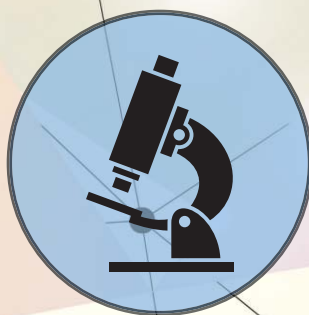
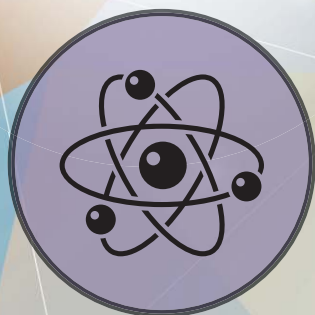
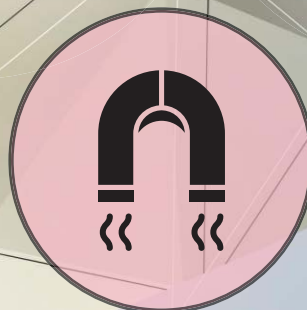
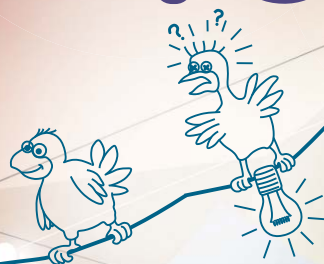
A rákkezelés ígéretes módszere a sugárterápia, amely azonban nem képes elegendően különbséget tenni a rákos és a szomszédos egészséges sejtek között. A kutatók figyelmének középpontjában vannak tehát a különféle sugárzásérzékenyítő nanorészecskék, amelyek specifikusan a rákos sejtekre fókuszálják a sugárzás hatását. Újabb vizsgálatokban a szerzők kimutatták, hogy a szén nanostruktúrájú sugárzásérzékenyítővel kiváltott kisenergiás elektronok spektrumát nagymértékben a plazmonok (a vegyérték-elektronok kollektív gerjesztései) határozzák meg. Ezt a hatást a ritka földfémekre végzett korábbi vizsgálatok már igazolták. A kutatás eredményeként fém- és szénbázisú részecskéből összetett, újfajta érzékenyítők állíthatók elő.



Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat szervezésében



2016. ÁPRILIS A FIZIKA MINDENKIÉ 2.0

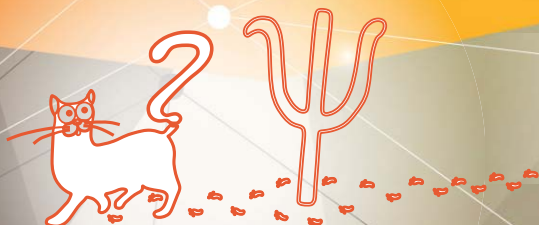


A fizika 2016-ban is mindenkié! A tiéd, miénk és mindenkié – tanároddal, barátaiddal, szüleiddel fizikázz, végezz kísérletet vagy készíts új eszközt, hallgass vagy szervezz előadást –, szóljon minden a fizikáról! Vegyél részt, regisztráld a saját programod és ünnepeljük együtt a fizika kérdéseit és csodás eredményeit! Hiszen a fizika segítségével adunk választ számos, a társadalmat érintő problémára – például energia, közlekedés, kommunikáció, környezetvédelem –, amelyek mindannyiunk életét befolyásolják.
Mert A FIZIKA MINDENKIÉ!

Információért látogass el weboldalunkra:

WWW.AFIZIKAMINDENKIE.KFKI.HU

Támogatók:



SZÁMOLÁSI FÜGGELÉK

– Ragasztószalagok leválásának dinamikája: sebességfüggés és instabilitás

Máté Mihály, Nguyen Q. Chinh
ELTE, Fizikai Intézet, Anyagfizikai Tanszék

A ragasztószalagok leválási folyamatainak modellszerű, egységes leírása

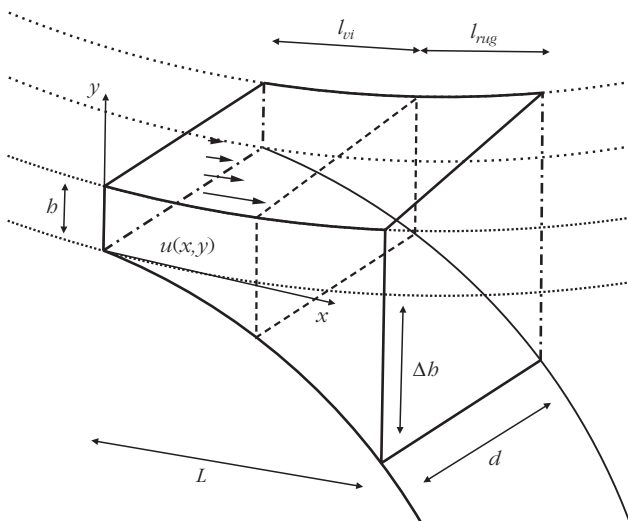
Az általunk javasolt modell egyik alapfeltevése, hogy elemi lépésként a viszkoelasztikus töltőanyag deformációja egy meghatározott térrészben megy végbe, amely a leválás természete miatt különböző leválási sebességű – és emiatt különböző mechanizmusra jellemző – zónákra osztható. Ezt a folyamatot sematikusán mutatja az *F1. ábra*. A szóban forgó térrész egy b töltőanyag-vastagságban, d szalagszélességben elterülő téglatest, amely a szalaggal párhuzamosan, az elválás vonalától L mélységig nyúlik be a töltőanyagba. Továbbá feltételezzük, hogy a leválási folyamat az L hosszúságú szakasz egy részén rideg (rugalmas) leválással, míg másik részén viszkózus folyással megy végbe l_{rug} , illetve l_{vi} nagyságú szakaszokon. Így

$$L = l_{rug} + l_{vi} \quad (F1)$$

A javasolt modellünk szerint egy beállított, átlagos v sebesség esetén különböző sebességgel és így különböző mechanizmussal válik le az elemi térrész l_{rug} és l_{vi} szakaszán, amelyeken a leváláshoz szükséges részerőt F_{rug} rugalmas, illetve F_{vi} viszkózus erőnek nevezzük. A párhuzamos kapcsolás miatt a kísérletileg mérhető – eredő – F erő a két részerő összege lesz, azaz

$$F(v) = F_{rug}(v) + F_{vi}(v). \quad (F2)$$

F1. ábra. A folyamatok felbontásának sematikus rajza.



Részerők

Rugalmas erő

A rugalmas térfogatban kijelölt kis téglá egytengelyű nyújtására alkalmazva a Hooke-törvényt:

$$\sigma = E \varepsilon, \quad (F3)$$

ahol σ az alkalmazott feszültség, ε a relatív deformáció és E pedig a töltőanyag nagyobb sebességtartományokra jellemző Young-modulusa. A

$$\sigma = \frac{F_{rug}}{A} = \frac{F_{rug}}{d l_{rug}} \text{ és } \varepsilon = \frac{\Delta b}{b}$$

mennyiségekkel az (F3) képlet kifejezhető az F_{rug} erőt és Δb megnyúlást is tartalmazó formában:

$$F_{rug} = EA \frac{\Delta b}{b} = E d l_{rug} \frac{\Delta b}{b}, \quad (F4)$$

ahol $A = d l_{rug}$ a rugalmas térrész keresztmetszete.

Viszkózus erő

Az előbbinél összetettebb folyamat írja le a sűrű töltőanyag belső súrlódásából származó erőt. Tekintsük a d, b, l_{vi} élhosszúságú téglatestet, amelyben a szalag hosszával párhuzamos áramlás valósul meg az elválási él mögött. Feltételezve, hogy az u sebességtér a d szélesség mentén homogén, továbbá a szalaggal párhuzamosan $x \in [0, l_{vi}]$ intervallumban a sebesség nullától lineárisan nő egészen a v leválási sebességig; $y \in [0, b]$ rétegvastagság irányában szintén lineárisan változik a sebesség úgy, hogy b -ban zérus. Ezekkel a feltevésekkel a sebességtér:

$$u(x, y) = \frac{x}{l_{vi}} \frac{b-y}{b} v, \quad (F5)$$

amelynek alapján az $u(x, y)$ y irányú gradiense:

$$\gamma = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{x}{b l_{vi}} v. \quad (F6)$$

Ennek ismeretében a $\tau = K \gamma^n$ egyenletnek megfelelően a τ nyírófeszültség is megkapható,

$$\tau = K \left| \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right|^n = K \left(\frac{x}{b l_{vi}} v \right)^n, \quad (F7)$$

amiből pedig az F_{vi} is meghatározható:

$$F_{vi} = \int \tau dA = \int_0^{l_{vi}} \tau ddx = \int_0^{l_{vi}} K d \left(\frac{v}{b l_{vi}} \right)^n x^n dx, \quad (F8)$$

vagy egyszerűbb alakban

$$F_{vi} = \frac{K dl_{vi}}{b^n (n+1)} v^n. \quad (F9)$$

Az eredő erő sebességfüggése

Az általunk javasolt modell másik lényeges pontja az eredő erő sebességfüggéséhez szükséges l_{vi} és l_{rug} hosszúságok sebességfüggésének megadása. Az előbbieken tárgyalt szerkezetváltozásból és tapasztalatokból mondható, hogy a nagyon kicsi sebességek tartományában szinte csak a viszkózus folyás határozza meg a leválási folyamatot. A sebesség növekedésével a rugalmas tartomány kiszélesedik. A nagy sebességek tartományában pedig a rugalmas deformáció fogja meghatározni a leváláshoz szükséges erőt.

Ilyen megfontolások, valamint az (F1) összefüggés alapján a két keresett hosszúság sebességfüggésének olyannak kell lennie, hogy

$$\begin{aligned} l_{vi} &\rightarrow L, \text{ ha } v \rightarrow 0 \text{ és} \\ l_{rug} &\rightarrow L, \text{ ha } v \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (F10)$$

Így kézenfekvő, hogy a két szakasz hosszúságát telítési függvénnyel írjuk le, oly módon, hogy a modellben feltételezett aktuális térrész L karakterisztikus hosszúságát állandónak tartjuk. Tekintsük egy elemi – L hosszúságú – anyagdarab leválását eredményező kötések felszakadását! Az l_{vi} sebességfüggésének értelmezésében abból indulunk ki, hogy az említett termikus aktiválás hatása mellett a t időpontban még nem felszakadt kötések N száma kis dt idő alatt dN -nel változik, és

$$\begin{aligned} dN &\propto dt \text{ és } dN \propto N, \\ dN &= -\alpha N dt, \end{aligned} \quad (F11)$$

ahol α egy állandó. Ebben a megfontolásban hallgatólagosan feltételezzük, hogy az L karakterisztikus hosszúságnak megfelelően összesen N_0 kötést kell felszakítani a leválási folyamatban. Az (F11) egyenletből könnyen kiszámítható, hogy a t időpontban még nem felszakadt kötések száma:

$$N = N_0 \exp(-\alpha t), \quad (F12)$$

amiből a viszkózus folyamat során felszakadt kötések N_{fel} számát a következő formulával kapjuk:

$$N_{fel} = N_0 [1 - \exp(-\alpha t)]. \quad (F13)$$

A modellben feltételezett l_{vi} szerepéről könnyen belátható, hogy

$$\frac{l_{vi}}{L} = \frac{N_{fel}}{N_0} = 1 - \exp(-\alpha t), \quad (F14)$$

amiből pedig

$$l_{vi} = L [1 - \exp(-\alpha t)]. \quad (F15)$$

Az állandó v sebességű leválási folyamat során nyilvánvalóan az l_{vi} (és l_{rug}) hosszúságok értéke stacionárius lesz. Azonban feltételezhető, hogy a stacionárius állapot beállításához szükséges t idő függ a v sebességtől. Nagyobb t kis v mellett valószínűleg meg és fordítva. Így fordított arányosságot feltételezve az (F15) összefüggés átírható úgy, hogy

$$l_{vi} = L \left[1 - \exp\left(-\frac{v_0}{v}\right) \right] \quad (F16.a)$$

és ezzel együtt

$$l_{rug} = L \exp\left(-\frac{v_0}{v}\right), \quad (F16.b)$$

ahol v_0 a felszakadási folyamat időbeli lefolyásának gyorsaságát kifejező állandó.

Az (F16.a) és (F16.b) kifejezéseket az (F9), illetve (F4) formulákba behelyettesítve, az (F2) egyenlet alapján a ragasztószalag leválásának konstitutív egyenletét a következő alakban kapjuk:

$$\begin{aligned} F(v) &= \frac{dE\Delta bL}{b} \exp\left(-\frac{v_0}{v}\right) + \\ &+ \frac{dKL}{b^n (n+1)} \left[1 - \exp\left(-\frac{v_0}{v}\right) \right] v^n. \end{aligned} \quad (F17)$$

Érdeemes belátni, hogy a (17) konstitutív egyenletet az alábbi módon is kifejezhetjük:

$$\begin{aligned} F(v) &= \frac{dE\Delta bL}{b} p_{rug}(v) + \\ &+ \frac{dKL}{b^n (n+1)} v^n p_{vi}(v), \end{aligned} \quad (F18)$$

ahol

$$p_{vi} = 1 - \exp\left(-\frac{v_0}{v}\right), \quad (F19.a)$$

$$p_{rug} = \exp\left(-\frac{v_0}{v}\right), \quad (F19.b)$$

amely mennyiségek a viszkózus folyás, illetve a rugalmas deformáció (rideg leválás) bekövetkezési valószínűségét jelölik. Ezzel a makroszkopikusan mérhető F erő – mint várható érték – valószínűségi értelmezést kap és az (F17), illetve az (F18) alakban írható. Ez az általunk javasolt konstitutív egyenlet fizikai jelentése. A valószínűségi kép minden bizonnyal értetőbbé teszi és alátámasztja a téglatesttől absztrahált deformációs térrészek nehezen elképzelhető dinamikáját.