

Az Europa esetében biztosra vehetjük a felszín alatti óceán létezését, és ebben az esetben azt is tudjuk, hogy a felszín alatti óceán kapcsolatban van a felszínnel, onnan ugyanis jól látható anyagáramlás történik a felszínre. Így belátható időn belül közel kerülhetünk olyan világokhoz, ahol akár a miénkhez hasonló, víz alapú élet is kialakulhatott. A Kuiper-övbeli nagy égitestek (Pluto, Eris) esetében hasonló, kriovulkanikus

folyamatokat látunk, bár a nagyobb naptávolság (így alacsonyabb hőmérséklet) és az eltérő összetétel miatt minden bizonnyal más kémiával. Bár a nagy távolságok miatt a Kuiper-öv égitestjeinek vizsgálata jóval nehezebb, mint a Jupiter holdrendszeréé, a távolabbi jövőben ezek hasonlóan fontos szerepet játszanak majd a Földön kívüli élet kutatásában, mint ma a Jupiter holdjai.

## A FIZIKA TANÍTÁSA

# FÖLDRAJZI HELYMEGHATÁROZÁS A NAP SEGÍTSÉGÉVEL

Nyirati László

Széchenyi István Műsz. Szakközépiskola, Székesfehérvár

A földrajzi szélesség, hosszúság koordinátáit határozzuk meg egy pálcá, pontos óra és táblázatok segítségével. Szükséges kiegészítő eszköz még függőön és vízszintező (libella, vízmérték, okos telefon vízszintezője), valamint hosszúságmérő eszköz.

Az adott földrajzi helyen a vízszintes talajra merőlegesen leszúrunk egy egyenes pálcát. Dél környékén rövid időközönként megjelöljük a pálcá árnyékának végpontját. A legrövidebb árnyékhosszt, az ahhoz tartozó zónaidőt, dátumot és a pálcá hosszát tekintjük a mérés adatainak. Ezekből határozzuk meg a földrajzi szélességet és hosszúságot. A számításhoz korrekciókat kell alkalmazni, amelyek a csillagászati fogalmak alapján táblázatok segítségével tehetők meg.

Az alábbiakban először azokat a földrajzi és csillagászati fogalmakat tárgyaljuk, amelyek a végrehajtott méréseket megalapozzák. Feltételezem, hogy az olvasók többsége jól tájékozott bennük, de nem foglalkozik naponta a témával. Ha úgy érzi nem fontos végigolvasni a meghatározásokat, lapozzon a *Mérés végrehajtása* fejezetre!

## Földrajzi és csillagászati fogalmak

Tekintsük át azokat a földrajzi, csillagászati fogalmakat, és természettörvényeket, amelyek alapján a számításokat végezzük.



Nyirati László matematika-fizika szakos tanár 1972-ben végzett az ELTE-n. Később a BME Villamosmérnöki karán is szerzett diplomát, majd a Kossuth Lajos Tudományegyetemen informatika tanári végzettséget. Székesfehérváron tanít, többnyire középiskolában, de 1995-től 2007-ig a Kodolányi János Főiskola Informatika tanszékén dolgozott. 2008 óta nyugdíjas, jelenleg óraadó tanár.

## Földrajzi helytől független meghatározások

*Kepler I. törvénye* szerint a bolygók ellipszispályán keringenek a Nap körül, a pálya egyik fókuszában a Nap áll.

*Kepler II. törvénye* szerint a vezérsugár (a Napot a bolygóval összekötő egyenes) egyenlő idők alatt egyenlő területeket sűrol.

(A két törvény miatt a Föld nem állandó nagyságú sebességgel halad a pályáján.)

*Ekliptika*: a Föld ellipszispályájának síkja. A Nap mindig az ekliptika síkjában van.

A Föld forgástengelye nem merőleges az ekliptika síkjára, hanem azzal 66,5 fokos szöveget zár be.

## Az adott földrajzi helyre vonatkozó meghatározások

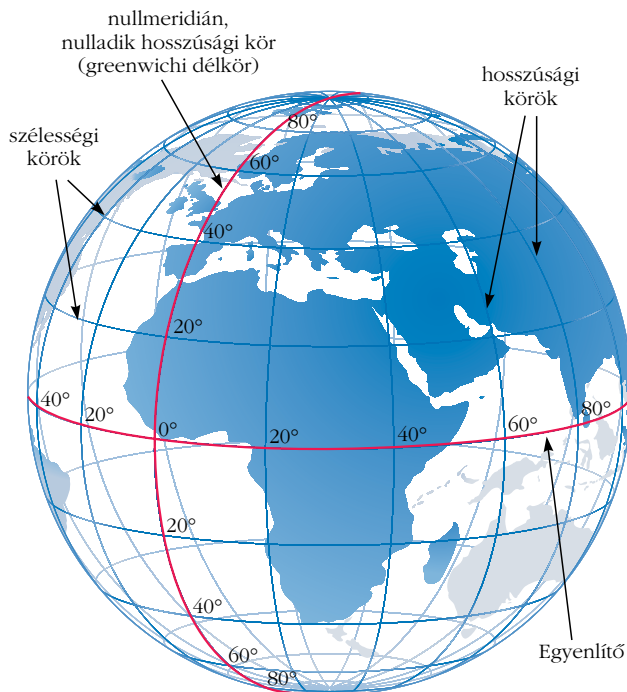
*Horizont*: a gömb alakú Föld egy adott pontján körbenézve a távolban az adott ponthoz tartozó horizontot látjuk vízszintesen. A horizont a Föld adott pontján a földgömbhöz illesztett érintősík.

A horizontra merőleges egyenes a fejünk felett kijelöli a *zenit*-t, talpunk alatt a *nadír* pontokat.

*Gnomon*: a zenit és nadír vonalában álló, földbe szúrt pálcát gnomonnak nevezzük.

A földrajzi koordináták, amelyeket meg szeretnénk határozni, a *földrajzi hosszúság* és *szélesség*. Mindkettőt fokban mérjük. A Földre egy hálót képzelünk el (*1. ábra*). A háló fonalai kétféle gömbi körből állnak. Észak–déli irányban gömbi főkörök, kelet–nyugati irányban egyre kisebb sugarú, a forgástengelyre merőleges síkú körök alkotják a hálót. Az észak–déli irányban haladó köröket *délkörnek*, ezek síkját *meridiánnak* nevezzük.

A földrajzi hosszúság: két délkör által meghatározott szög. Az egyik délkör a Greenwichi csillagvizsgálón (*2. ábra*) áthaladó délkör (prime meridian vagy nullmeridián), a másik pedig az adott földrajzi helyen áthaladó. A hosszúságot tehát Greenwich-hez képest mérjük, az

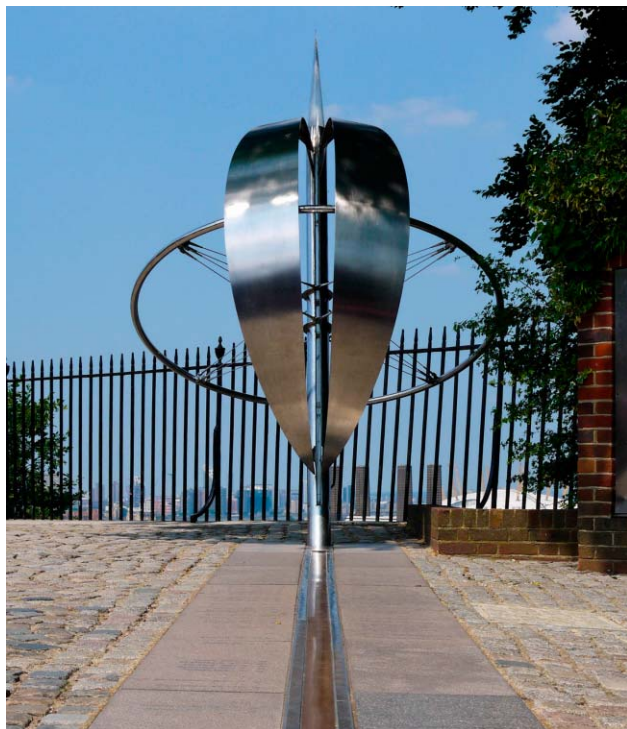


1. ábra. Földrajzi koordináta-rendszer [1].

Északi sarkról nézve az óramutató járásával ellentétes irányban, vagyis kelet felé tekintjük pozitívnek.

Földrajzi szélesség: a sarkcsillag, illetve az északi pólus magassága határozza meg fokokban. Az Északi pólus iránya és helye az égbolton az adott földrajzi helyen (egy adott szélességi körön) azonos a nap minden szakában. Az északi pólus összekötte a déli pólussal a Föld forgástengelye. Az északi pólus magasságát a horizonthoz viszonyítva mérjük.

2. ábra. Greenwichi nullmeridián szobra [2].



**Egyenlítő:** a 0 szélességi kör a szélességi körök közötti egyetlen főkör. Az egyenlítő síkja az equator (*ekvátor*). Ennek minden pontján a horizont síkja a Föld tengelyével párhuzamos.

**Északi és déli sark:** ha az Északi sarkon állunk a szélességi szög  $90^\circ$ , a Déli sarkon  $-90^\circ$ .

Magyarországon a földrajzi szélesség  $47-48^\circ$ . Ennek megfelelően az egyenlítő síkját  $42-43^\circ$ -ban képzelhetjük el a horizonthoz képest.

Az 1. ábra szerint szemléletesebb, ha a földrajzi szélességet úgy határozzuk meg, hogy a Föld középpontjából az adott földrajzi helyhez egy sugarat húzunk. E sugár egyenlítő síkjával bezárt szöge a földrajzi szélesség.

### Az időre vonatkozó meghatározások

**Helyi dél:** az az időpont, amikor a Nap középpontja áthalad a helyi meridiánon. A helyi meridián – az eddigiek szerint – az a sík, amely átmegy az északi és déli póluson, valamint a helyi zeniten és nadíron. Vagyis az észak–dél pólusok, valamint a zenit–nadír egyenesei által kifeszített sík. (Az Északi és Déli sarkon nem értelmezhető a meridián.) A Nap ekkor az aznapi pályája legmagasabb pontján helyezkedik el. Ez az időpont a greenwichi helyi délhez képest annyi-vel tolódik el, mint amennyi idő eltelték addig, amíg a Föld annyi fokot fordul el, mint amennyi a földrajzi hosszúságunk Greenwich-hez képest.

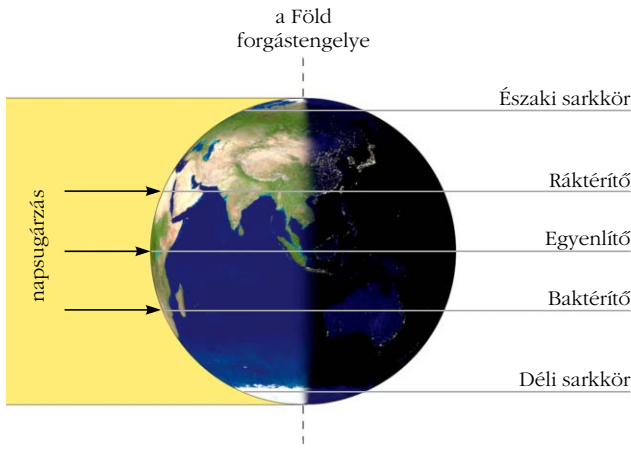
A hosszúság meghatározásához azonban nem csak a helyi dél fogalmával, hanem a középnap hosszával, a csillagidő hosszával, valamint a zónaidővel is tisztában kell lennünk.

**Zónaidő:** a helyi dél pontról pontra változik. Greenwich jelenti a viszonyítási pontot. Tőle keletre a helyi dél előbb, tőle nyugatra a helyi dél később következik be.  $360^\circ/24 = 15^\circ$ -kal keletre egy óra eltérés mutatkozik, újabb  $15^\circ$  további egy óra. Azért, hogy nagyobb területeken azonos órával lehessen mérni az időt, bevezették a zónaidő fogalmát. UTC-nek nevezik az egyezményes koordinált világidőt, UTC+1 az ettől keletre levő első zónához rendelt idő. Az azonos zónaidőkben tehát az órák együtt járnak, zóna átlépésekor órát kell igazítani egy órával előre vagy hátra. Az óránk tehát a zónaidőt mutatja. A Greenwich-hez tartozó zónaidő azonos a világidővel.

**Csillagnap:** az az időtartam, amíg a Föld egyszer megfordul a csillagokhoz képest. A Föld körülbelül 365 nap alatt kerüli meg egyszer a Napot. Amíg a Föld egyszer megfordul a tengelye körül a csillagokhoz képest, addig a pályáján körülbelül 1 foknyival előrébb halad. A Naphoz képest tehát még 1 fok fordulás szükséges, ami körülbelül 4 percnyi időtartam.

**Szoláris nap:** amíg a Föld a Naphoz képest egyszer megfordul a tengelye körül. Mint láttuk a csillagnaphoz képest körülbelül 4 perccel hosszabb. (Azt, hogy a 4 percet milyen időszámításhoz tartozónak vesszük, fedje homály.)

Kepler törvényei szerint a bolygók a Nap körül ellipszis pályán keringenek, valamint a területi sebes-



3. ábra. Napéjgyenlőség [3].

ség állandó. A pályán napközben gyorsabban halad a bolygó, naptávolban lassabban. A fenti 4 perc tehát csak akkor lenne mindig 4 perc, ha a Föld tökéletes körpályán mozogna, de nem így van. Azért, hogy ne kelljen ilyen kis időtartam-különbségekkel a gyakorlati életben foglalkozni az úgynevezett középnap fogalmát használjuk.

**Középnap:** a déltől délig terjedő időtartamot úgy számoljuk, mintha a Nap körül a Föld egyenletesen körpályán mozogna. Így két középnap delelése között mindig azonos idő telik el, míg a szoláris nap ehhez képest hol előresiet, hol lemarad.

Fordítva is viszonyíthatunk természetesen. Vagyis, ha a valódi delelést tekintjük, akkor a szoláris nappal van dolgunk, az órák azonban az egyenletesen folyó középnap idejét méri a zónaidőhöz igazítva. Az órához képest a delelések előre hátra imbolyognak az év során. Ezt az úgynevezett analemma görbe (lásd később) vízszintes eltérései mutatják.

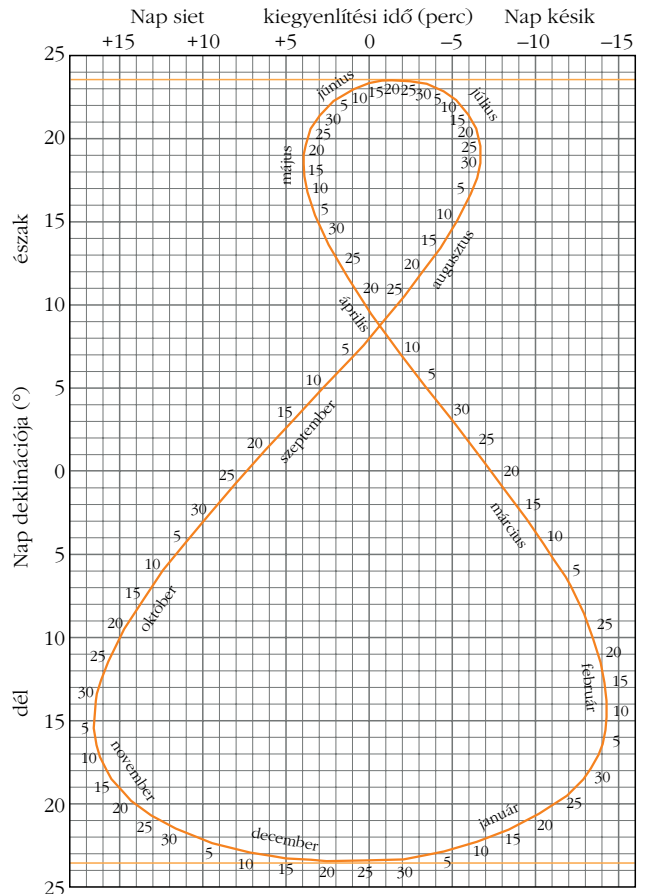
A szférikus csillagászat körébe tartozó meghatározások

**Tavaszpont és őszi pont:** mint már említettük a Föld forgástengelye nem merőleges az ekliptikára, hanem azzal  $66,5^\circ$ -os szöget zár be. Ebből következik, hogy az ekliptika és az ekvátor síkja  $23,5^\circ$ -ot zár egymással. Ha a két síkot a Nap középpontján áthaladva gondoljuk el, akkor metszésvonalukban a Föld kétszer tartózkodik. Az ekliptika és az ekvátor síkok metszésvonala kijelöli a tavaszpont és az őszi pont irányát.

Fordítva, a Földről nézve a Nap kétszer látható az egyenlítő síkjában. Amikor a Nap éppen az égi egyenlítőn tartózkodik, akkor a delelési pontban a horizonthoz mért szöge a földrajzi szélesség pótszöge.

**Tavaszi és őszi napéjgyenlőség:** amikor a Föld a Nap felől nézve a tavaszpont, illetve az őszi pont irányában van (3. ábra), akkor a Földről nézve a Nap az egyenlítő (ekvátor) síkjában is benne van. Ezen a két napon mindkét féltekén a nappal és az éjszaka ugyanannyi ideig tart.

A tavaszi napéjgyenlőség után a Nap az egyenlítő síkja fölött tartózkodik, egyre magasabban.  $23,5^\circ$ -ig emelkedik, majd csökken. Az őszi napéjgyenlőség



4. ábra. Analemma [4].

idején az egyenlítőn van ismét, majd  $23,5^\circ$ -ig csökken. A szélső helyzet elérése után ismét emelkedik. A két szélső helyzet neve *nyári* és *téli napforduló*.

A fentieknek megfelelően a következőt mondhatjuk. Egy pontos órát használva minden nap, az óra szerinti déli időpontban megjelöljük a gnomon végpontjának árnyékát, akkor az így kapott pontok a Nap viszonylagos mozgása miatt egy görbét írnak le. A talponthoz közelednek és távolodnak, a Nap, egyenlítő alatti és fölötti állásai miatt. Jobbra, balra tolnak a Föld egyenetlen keringése miatt. A görbe a Földön egy nyolcas alakú, mert a Föld dőlésének iránya, és a pálya nagytengelye nem egy irányba esik.

Ezt a görbét *analemmának* nevezzük (4. ábra). Értékeit grafikusán ábrázolva, vagy táblázatok segítségével határozzuk meg. A világhálón az analemma szóra keresve sok találatot kapunk. Közöttük sok kép is van, amely úgy keletkezett, hogy a Napról készített fényképet naponta, ugyanazon gépbeállítással, és ezeket a képeket egymásra másolták. A gnomon árnyékáról felvett pontok ennek centrális tükörképei.

Hasonló képet kapunk, ha naponta ugyanazon időpontban azonos beállítással lefényképezzük a tájat a Nap látványával együtt. Az 5. ábra egy délelőtti (reggeli) fényképsorozat. Ha ugyanezt napnyugtakor tesszük a nyolcas ellenkezőleg dől. Délben egyenes állású. A pöttyök a Napok. Mivel például a déli analemmát használjuk, nyilvánvaló, hogy más helyen máskor van dél, így a napok a földrajzi helytől füg-



5. ábra. Budapesti analemma – a második magyar analemmafotó – Soponyai György 34 napkorongból álló fényképén. A szerző minden alkalommal két felvételt készített – pontban reggel 8 órakor (nyári időszámítás idején 9-kor) –, egyet teljesen alulexponálva, amin csak a Nap korongját lehet látni és egy normál expozíciós idejűt, amin az épületek is kivehetők. A bal oldalról beúszó felhőkkel készült felvétel teszi teljessé a képet [5].

a mérési adat. E három adat kell a hely meghatározásához, a többi az analemáról leolvasható.

Ha Magyarországon, illetve a CERN területén végezzük el a mérést, akkor az 1. táblázatban szereplő adatok várhatóak. Az értékeket a Google térképről vettük.

A táblázatból látható, hogy például Debrecen és Szombathely közötti hosszúsági adatok között körülbelül  $5^\circ$  a különbség, ami a delelési időpontokban 20 percnyi különbséget jelent. Várható, hogy mérési módszerünkkel ekkora különbség kimutatható.

### Számítások a méréshez

Legyen  $h$  a gnomon hossza,  $l$  annak legrövidebb árnyéka,  $t$  a legrövidebb árnyékhoz tar-

gőn a nyolcas mentén elcsúsznak. A Föld ellipszispályája miatt egyéb eltérések is adódnak, amelyek másod- vagy harmadrendűen kicsinyek. Csak elhanyagolható hibát vétünk, ha a földrajzi (0,0) ponthoz tartozó déli analemmát használjuk.

Ennek megfelelően egy rúd, amely vízszintes felületbe merőlegesen van betűzve, (zenit–nadír irány) a legrövidebb árnyékot veti a helyi délben. A legrövidebb árnyékhoz tartozó időpont a földrajzi hosszúságot, az árnyék és a rúd hosszának aránya pedig a földrajzi szélességet határozza meg. Az analemma alapján a dátumnak megfelelő értékekkel korrigálnunk kell.

tozó zónaidő értéke UTC+1 esetén, továbbá  $Eot$  a hosszúsági és  $Decl$  a szélességi korrekció, valamint  $\varphi$  a földrajzi szélesség és  $\lambda$  a földrajzi hosszúság.

A földrajzi szélesség meghatározása:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{l}{b}\right) + Decl.$$

A földrajzi hosszúság meghatározása:

$$\lambda = 30 - \frac{t - Eot}{4}.$$

Megjegyzés: a szakirodalomban helyenként néhány téves állítás található. Például a gnomon árnyékának végpontjait egyenes vonalnak tekintik, ez csak az őszi, és tavaszi napéjegyenlőség idejében igaz, napforduló idején attól lényegesen eltér.

### A mérés végrehajtása

Delelés előtt, körülbelül 30 perccel kezdjük megfigyelni a gnomon végpontjának árnyékát. Néhányszor megjelöljük az árnyék helyét, feljegyezve az aktuális időpontot. Körülbelül 5 percenként érdemes a pontokat felvenni. Az egyes pontok egy enyhén görbülő íven vagy egy egyenesen helyezkednek el. Az árnyékok hossza egy darabig rövidül, majd hosszabbodik. Próbáljunk a legrövidebb árnyék előtt és után minél több pontot felvenni. Amikor elegendően sok pontunk van, kössük össze a gnomon talppontját a bejelölt pontokkal, és mérjük meg az így kapott vonalak hosszát. Ábrázoljuk grafikonon az egyes hosszakat a bejelölés időpontjának függvényében. Egy parabolaszerű görbét kapunk, amelynek van egy minimumpontja. Az ehhez tartozó időpont a helyi dél, az árnyék hossz és a gnomon hosszának aránya pedig a Nap deklinációját határozza meg. Tehát a legrövidebb árnyék hossza, ennek időpontja és a gnomon hossza

1. táblázat		
Egyes helységek középpontjának földrajzi koordinátái		
helységnév	szélesség (°)	hosszúság (°)
CERN (Svájc)	46,2350	6,0472
Szombathely	47,2143	16,6127
Siófok	46,9006	18,0251
Budapest	47,4985	19,0402
Debrecen	47,5515	21,6217
Békéscsaba	46,6794	21,0829
Pécs	46,0755	18,2266
Gönc	48,4743	21,2685
Székesfehérvár	47,1929	18,4116

## A 2014. évi CERN-i tanulmányút előtt, alatt és után végzett mérések

a mérés ideje és helye			a gnomon magassága és árnyékhossza		a számolt földrajzi hosszúság és szélesség		mérte
dátum	$t$ (h:m:s)	helyszín	$b$ (mm)	$l$ (mm)	$\lambda$ (°)	$\varphi$ (°)	
06. 16.	12:52:00	Siófok	906	420	17,25	48,37	Nyirati László
06. 21.	12:33:00	Székesfehérvár	703	318	22,25	47,84	Nyirati László
06. 28.	12:51:00	Székesfehérvár	672	300	18,08	47,06	Nyirati László
07. 01.	12:50:00	Székesfehérvár	1272	569	18,48	47,10	Nyirati László
07. 07.	12:59:45	Siófok	475	203,7	16,31	46,21	Nyirati László
07. 07.	12:32:00	Debrecen	964	452	23,25	48,12	Páles Hajnalka
07. 17.	12:43:00	Budapest	203	84	20,75	43,48	Síkhegyi Gabriella
07. 18.	12:43:00	Budapest	199	106,5	20,75	49,15	Síkhegyi Gabriella
07. 18.	12:43:00	Budapest	299	143	20,75	46,56	Síkhegyi Gabriella
07. 25.	12:57:00	Siófok	412,5	198,6	17,41	45,15	Nyirati László
08. 09.	12:42:00	Fegyvernek	1027	604	21	51,46	Somogyi Tamás
08. 14.	12:36:00	Hódmezővásárhely	192	112	22,17	44,26	Simon Tibor
08. 18.	13:27:00	Rajna vízesés	415	259,3	9,30	45,30	csoport <sup>1</sup>
08. 23.	13:35:00	Aiguille du Midi	362	228	6,72	43,51	csoport <sup>1</sup>
08. 23.	13:35:00	Aiguille du Midi	288	186	6,81	44,17	csoport <sup>1</sup>
08. 23.	13:35:00	Aiguille du Midi	415	273,5	9,41	44,70	csoport <sup>1</sup>
08. 28.	12:48:00	Csongrád	192	145	18,31	46,64	Simon Tibor
08. 30.	12:41:00	Kecskemét	508	387	19,75	46,16	Szijártó Sándor

<sup>1</sup> A csoport tagjai: Nyirati László, Páles Hajnalka, Síkhegyi Gabriella, Simon Tibor, Somogyi Tamás, Szijártó Sándor és Zubonyainé Pelka Zsuzsanna.

Méréseinket a CERN tanulmányúttal kapcsolatban végeztük. Csoportunk sok mérést hajtott végre. Közmegegyezéssel döntöttünk, hogy aki csak tud, mér egyet indulás előtt, mérünk útközben és mérünk az Aiguille du Midi hegyen, valamint a megérkezés után. Többen családtagjaikat is bevonták. A kapott mérési eredményeket közös jegyzőkönyvbe foglaltuk, az eredményeket időrendben helyeztük el.

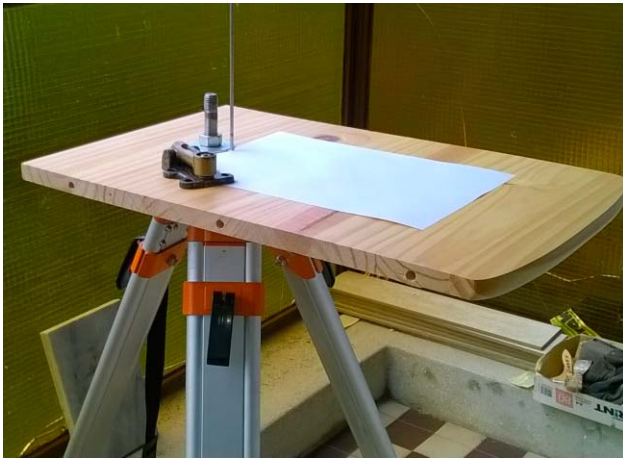
A 2. táblázat alapján a számítások ellenőrizhetők, ha a dátumhoz tartozó korrekciókat is figyelembe vesszük. A dátumokhoz tartozó analemmaértékek megtalálhatók a hivatkozási lista honlapjai között [6, 7].

A mérési eredményekhez hibaszámítást nem mellékelünk, mert csak egy esetben végeztünk egyszerre több mérést. Statisztikus hibaszámításnak csak abban az esetben van értelme, ha azonos műszerrel, hasonló körülmények között végzünk méréseket. Legtöbb esetben csak a mérés elve volt azonos, de a kiértékelésre (például a legrövidebb árnyék meghatározására) nem használtunk közös eljárást. A mérések pontosságát azonban elég jól szemlélteti egy olyan táblázat, amely az általunk kapott értékek eltérését mutatja a Google térképről leolvasható, pontos adatoktól (3. táblázat).

Síkhegyi Gabriella gnomonját a 6. ábra mutatja. Nyirati László CD-ből készült, hordozható mérőeszkeze a korábbi, siófoki mérésakor a 7., míg az Aiguille

## A mérések pontosságának szemléltetése

mérés dátuma	pontos földrajzi hosszúság és a mért érték eltérése		pontos földrajzi szélesség és a mért érték eltérése	
	$\lambda_{\text{google}}$ (°)	$\Delta\lambda$ (°)	$\varphi_{\text{google}}$ (°)	$\Delta\varphi$ (°)
2014.				
06. 16.	18,025	-0,78	46,9006	1,47
06. 21.	18,4116	3,84	47,1929	0,65
06. 28.	18,4116	-0,33	47,1929	-0,14
07. 01.	18,4116	0,07	47,1929	-0,09
07. 07.	18,2	-1,89	46	0,21
07. 07.	21,6217	1,63	47,5515	0,57
07. 25.	18,025	-0,61	46,9006	-1,75
08. 09.	20,53	0,47	47,24	4,22
08. 14.	20,38	1,79	46,41	-2,15
08. 18.	8,61	0,69	47,67	-2,37
08. 23.	6,92	-0,2	45,92	-2,41
08. 23.	6,92	-0,11	45,92	-1,75
08. 23.	6,92	2,49	45,92	-1,22
08. 28.	20,15	-1,84	46,71	-0,07
08. 30.	19,67	0,08	46,9799	-0,82



6. ábra. A Budapesten készült mérőeszköz, használva július 1-jén.

de Midi hegyen használva a 8. ábrán található. Látható, hogy a július 25-én végzett mérés árnyékpontsora görbül, az augusztus 23-i pedig kevésbé.

Külön említést érdemel, hogy a legrövidebb árnyék időpontját miképp határozzuk meg. Több eljárás is lehetséges. Például a várt időpont környékén sűrűn mérünk és vesszük a legrövidebbhez tartozó időpontot. Szokás az úgynevezett indiai körök módszerét alkalmazni: szimmetrikusnak feltételezve kiválasztunk két, elég távoli, a legrövidebb árnyékhoz képest jobb és bal oldalon levő, azonos hosszúságú árnyékot, ezek szögfelezője határozza meg az észak–déli irányt.

Számítástechnikai eszközöket használva jól működő módszer az alábbi.

Az excel táblázatkezelő solver eszközét használjuk. Felvesszük a táblázatba a mért adatokat. Például a 7. ábra mérési eredményeit. A jobban látható grafikon érdekében a független változót, az időt percben adjuk meg és a 12 óra 00 perc lesz a zéró pont. A függő változó az időhöz tartozó árnyék hossz (4. táblázat), a mérés grafikonja a 11. ábrán látható.

A grafikon pontjait az

$$y = ax^2 + bx + c$$

9. ábra. Mérés Síkhegyi Gabriella kétgnomonos készülékével az Aiguille du Midin.

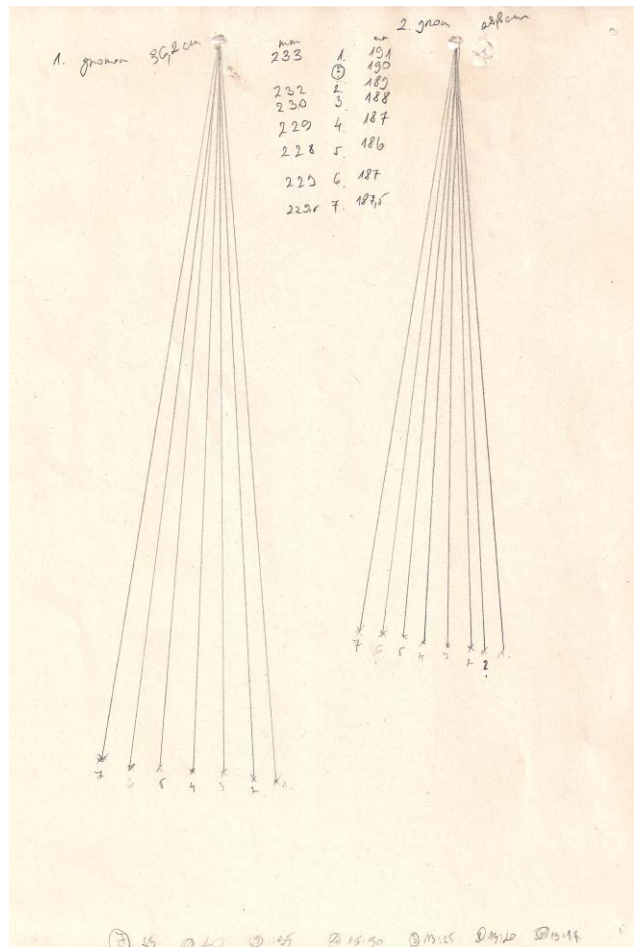


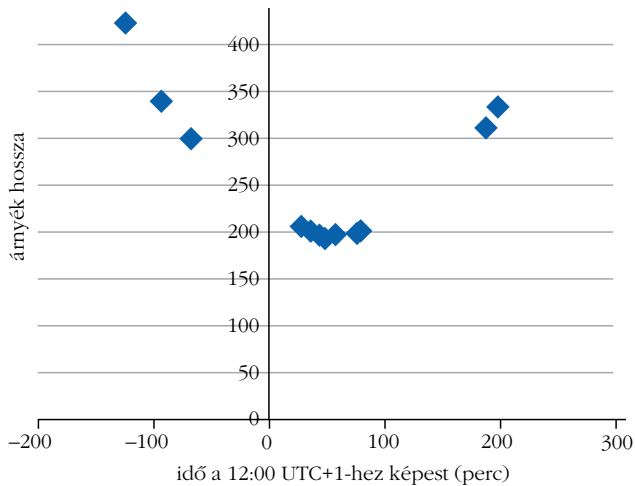
7. ábra. CD-ből készült gnomon a július 25-i méréskor.



8. ábra. Ugyanaz, mint a 7. ábrán az Aiguille du Midi hegyen.

10. ábra. A kétgnomonos készülék mérőlapja.





11. ábra. Az árnyék hosszak változása az időben.

másodfokú parabolához illesztjük, ahol  $a$ ,  $b$ ,  $c$  értékeit először 1-nek vesszük (5. táblázat).

Kiszámítjuk a közelítéshez használt függvény értékeit a mérésnél szereplő időadatokkal, majd vesszük a mért és a számított adatok különbségeinek négyzetösszegét (Gauss nyomán.) A különbségnégyzet- és a négyzetösszegértékek meglehetősen nagyok. A legjobban közelítő paramétereket a solver fogja kiszámítani annak alapján, hogy minimalizálja a mért adatok és a számítható adatok közötti különbségnégyzetek összegét, azaz a négyzetösszeg minimumát keresi, miközben az  $a$ ,  $b$ ,  $c$  értékeit módosítja (12. ábra).

A korábbi másodfokú parabolához képest az

$$y = A(x - B)^2 + C$$

alakban jobban leolvashatók a szükséges adatok, ugyanis  $B$  a minimális árnyék hossz 12 óra utáni időpontja percben,  $C$  pedig a minimális árnyék hossz. Ezért az  $a$ ,  $b$ ,  $c$  értékeiből kiszámítjuk  $A$ ,  $B$ ,  $C$  értékeit.

A grafikonon a mért és a számított értékek által rajzolt két görbe nagyon jól fedi egymást. Beírva az  $Eot$ ,  $Decl$  értékeket és a gnomon hosszát, kiszámíthatjuk a földrajzi szélesség- és hosszúságértéket is (13. ábra).

### Megjegyzés

A fényképeken (14. ábra) megfigyelhető, hogy a gnomon árnyékpontjai miként helyezkednek el egymás után. Az első méréseket júniusban végeztük, későbbiek augusztus 15-e utániak. Feltűnő, hogy a júniusi képeken a gnomon árnyékpontjai görbült vonalon az augusztusiak pedig majdnem egyenesen helyezkednek el (7., 8., 10. és 14. ábrák).

Végiggondolhatjuk, hogy az égi pályán végighaladó égitest – egy, a Földhöz rögzített pontot megvilágítva – milyen árnyékot vet egy vízszintes síkra. Kiderül, hogy ér-

4. táblázat

### A 2014. július 25-én, Siófokon végzett mérés táblázata

idő (h:m)	$t$ (min)	$l$ (mm)
09:57	-123	422,5
10:28	-92	340
10:53	-67	300
12:29	29	206
12:36	36	203
12:44	44	198
12:49	49	195
12:57	57	198
13:16	76	200
13:20	80	202
15:08	188	312
15:18	198	333

dekes geometriai problémáról van szó, a Nap esetében helytől és időponttól függően különböző, de jól megszerkeszthető görbét kaphatunk.

Néhány jó tanács azoknak, akik valamilyen oknál fogva végrehajtanák a mérést.

### Hibabecslés

A becsléseket a 45. szélességi fokra adjuk a sinus- és cosinus-függvények egyszerűbb értékei miatt.)

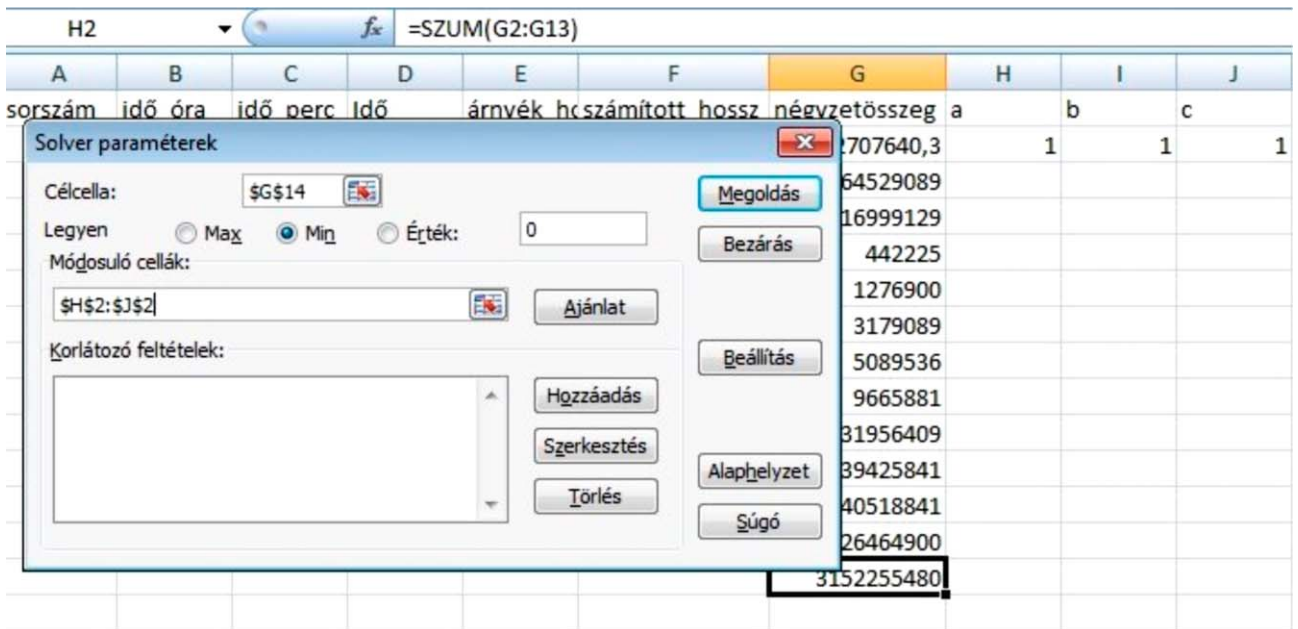
Miben követhetünk el hibát a mérés során?

Kritikus a legrövidebb árnyék hossza, illetve annak időpontja. Nézzük, mit okoz egy perc tévedés például a hosszúsági fok megállapításakor!

5. táblázat

### A közelítő parabola adatainak becslése

$t$ (min)	$l$ (mm)	számított hossz (mm)	különbségnégyzet ( $\text{mm}^2$ )	$a$	$b$	$c$
-123	422,5	15007	212707640,3	1	1	1
-92	340	8373	64529089			
-67	300	4423	16999129			
29	206	871	442225			
36	203	1333	1276900			
44	198	1981	3179089			
49	195	2451	5089536			
57	198	3307	9665881			
76	200	5853	31956409			
80	202	6481	39425841			
188	312	35533	1240518841			
198	333	39403	1526464900			
négyzetösszeg			3152255480			



12. ábra. A solver hívása és beállítása.

360°-ot fordul a Föld egy nap alatt, akkor 1 perce alatt 0,25 fok elfordulás jut. Távolságra átszámítva ezt a 45. szélességi fokon körülbelül 19,6 km hosszúsági eltérés adódik. Ezért célszerű a várható időpont környékén akár percenként jelölgetni.

A Nap látszó átmérője 0,5°. Ez a gnomon végpontjának árnyékát elmosódottá teszi. Mindez könnyen okozhat 2 perces hibát, vagyis a fentiek értelmében csak az árnyék elmosódottsága miatt majdnem 40 km

hibánk lehet kelet–nyugati irányban. Rövid gnomon esetén az árnyékpontok élesebbek, de kevésbé mozdulnak el, hosszú gnomon távolabbi árnyékpontokat, de elmosódott árnyékot ad.

#### A gnomon hossza és állása

Figyeljünk, hogy a pálca a vízszintes talajra merőlegesen álljon, a talppont pontosan a síkon legyen! Egy körülbelül 30 cm hosszú pálca hosszát elég pontosan meg tudjuk mérni. Ennek mérési hibáját elhanyagoljuk. De az árnyék hosszának mérése pontatlanabb. Nézzük az ebből adódó hibát. A már ismert összefüggés alapján:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{l}{b}\right) + Decl.$$

A  $d\varphi$  szögeltérést az árnyékhossz  $dl$  megváltozásának függvényében deriválással kapjuk:

$$d\varphi = \frac{b}{b^2 + l^2} dl.$$

Például a 45. szélességi fokon napéjegyenlőség idején  $b \approx l$ . Fél fokos látszó nap esetén:

$$dl = \frac{\sqrt{2} \cdot 2\pi \cdot 0,5}{360} b,$$

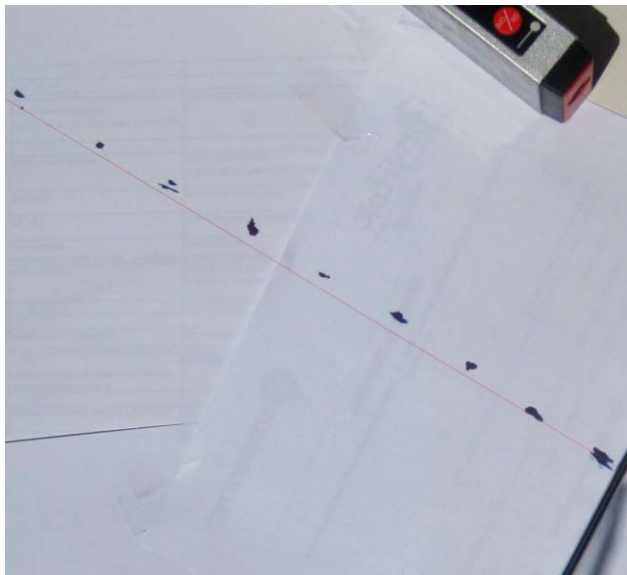
$$d\varphi = \frac{dl}{2b} = 0,0061.$$

13. ábra. A kiszámított időpont és árnyékhossz.

D	E	F	G	H	I	J
Idő	árnyék_h	számított_hossz	négyzetösszeg	a	b	c
-123	422,5	416,4486522	36,61881001	0,006764225	-0,76996	219,4074
-92	340	347,4962857	56,19429931			
-67	300	301,3594534	1,848113507	A	B	C
29	206	202,7672538	10,45064774	0,006764225	56,91425	197,4965
36	203	200,4552454	6,475775723	Eot		6,57
44	198	198,6246571	0,390196536	Decl		19,57
49	195	197,9202141	8,527650143	Pálca_h		412,5
57	198	197,4965845	0,253427141	Hosszuság		17,41394
76	200	199,9605118	0,001559321	Szélesség		45,15414
80	202	201,101542	0,807226819			
188	312	313,7294223	2,990901472			

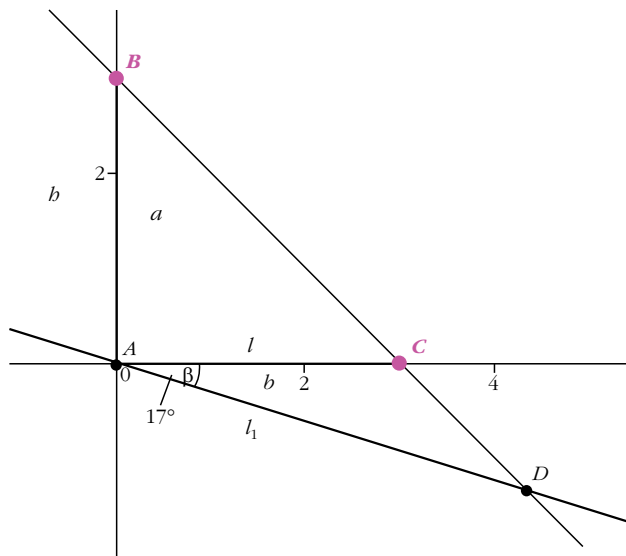






14. ábra. Az árnyékpontok rajzának változása.

Ez a különbség a Föld felszínén  $39,2 \text{ km} \approx 40 \text{ km}$  eltérést jelenthet észak–déli irányban.



15. ábra. Ferde alapsík által okozott hiba.

Hibát okozhat, ha a vízszintes sík akár 1 fokkal is eltér a valódi vízszintestől (15. ábra). A gnomon mérhető árnyékhosszát megváltoztatja,  $l$  helyett  $l_1$ -ot mérünk. A különbség kiszámítható a sinustétel és egy kivonás segítségével, ezt elvégezve újabb 40 km körüli eltérést kapunk.

Verne Gyula *Rejtelmes sziget* című regényében Cyrus Smith hasonló módon határozta meg a sziget helyzetét. Ezek szerint a mérési hibáink ellenére egy  $40 \times 40 \text{ km}$ -es terület esetén reménytelenül módon megtalálhatjuk a helyzetünket.

#### Irodalom

1. <http://www.yourdictionary.com/meridian>
2. <http://www.portcities.org.uk/london/server/show/ConNarrative.132/chapterId/2706/Greenwich-and-the-story-of-time.html>
3. <https://hu.wikipedia.org/wiki/Nap-éjegylenlőség>
4. Láng R.: Látogatás a CERN-ben. *Fizikai Szemle* 63 (2013) 23–26.
5. [www.csillagaszat.hu/a-het-kepe/budapesti-analemma](http://www.csillagaszat.hu/a-het-kepe/budapesti-analemma)
6. [www.wsanford.com/~wsanford/exo/sundials/SunAnalemma.xls](http://www.wsanford.com/~wsanford/exo/sundials/SunAnalemma.xls)
7. [www.mysundial.ca/files/Analemma.xls](http://www.mysundial.ca/files/Analemma.xls)

# VAN ÚJ A FÖLD FELETT

Az elmúlt 15 év legfontosabb csillagászati eredményeit összefoglaló, tanórai előadásra is alkalmas segédanyag on-line változata szabadon letölthető a [www.fizikaiszemle.hu](http://www.fizikaiszemle.hu) honlap „mellékletek” pontjából.

