BESZÁMOLÓ A 2015. ÉVI EÖTVÖS-VERSENYRŐL

Tichy Géza – ELTE Anyagfizikai Tanszék
Vankó Péter – BME Fizika Tanszék
Vigh Máté – ELTE Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék

Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat 2015. évi Eötvös-versenye október 16-án délután 3 órai kezdettel tizenöt magyarországi helyszínen[1] került megrendezésre. Ezért külön köszönettel tartozunk mindazoknak, akik ebben szervezéssel, felügyelettel a segítségünkre voltak. A versenyen a három feladat megoldására 300 perc áll rendelkezésre, bármely írott vagy nyomtatott segédeszköz használható, de zsebszámológépen kívül minden elektronikus eszköz használata tilos. Az Eötvös-versenyen azok vehetnek részt, akik vagy középiskolai tanulók, vagy a verseny évében fejezték be középiskolai tanulmányaikat. Összesen 84 versenyző adott be dolgozatot, 21 egyetemista és 63 középiskolás.

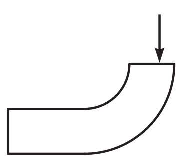
Az ünnepélyes eredményhirdetésre és díjkiosztásra 2015. november 20-án délután került sor az ELTE TTK Harmónia termében. Az idei díjazottakon kívül meghívást kaptak az 50 és a 25 évvel ezelőtti Eötvös-verseny nyertesei is. Először az akkori feladatokat mutattuk be.

Az 1965. évi Eötvös-verseny feladatai

1. feladat
S = 20 méter hosszú, súlyos, hajlékony kötél egy kisméretű, súrlódás nélküli csigán van átvetve úgy, hogy hogy az egyik oldalon s_0 = 12 méter hosszú darabja lóg le. A kötelet elengedjük. Mennyi a kötél sebessége akkor, amikor az alsó kötélvég a) 16 méterre, b) 40 méterre van a csiga alatt? g = 1000 cm/s^2.

2. feladat
Hat, kör alakú, vezető fémlemezt helyezünk el egymás mellé, párhuzamosan. A szomszédok közötti d távolság egyenlő és kicsiny a lemezek sugarához képest. A lemezek sugara váltakozva R és $2R$. A lemezek középpontjai a síkjaikra merőleges egyenesen vannak. Kapcsoljuk össze a lemezeket úgy, hogy a keletkező kondenzátor kapacitása maximális legyen! Mekkora ez a kapacitás? Hogyan helyezkednek el a töltések a lemezeken?

3. feladat
Adva van egy negyedkörben meghajlított vastag üveglemez, amely egyenes részben folytatódik. Mi a feltétele annak, hogy az egyik véglapra merőlegesen beeső fénysugár ne lépjen ki az üveglemez oldalfalain? (Csak a másik végén.) Csak a rajz síkjában haladó fénysugarakkal foglalkozzunk.



Az 1965-ös versenyen még csak érettségizett tanulók indulhattak (gimnazisták csak versenyen kívül). Ebben az évben két I. díjat osztottak ki (II. és III. díjat pedig egyet sem), a két díjazott: *Gnädig Péter,* a budapesti Táncsics Mihály Gimnázium érettségizett tanulója, tanára *Henter Lászlóné,* valamint *Juvancz Gábor* a budapesti Fazekas Mihály Gimnázium érettségizett tanulója, tanárai *Fábián Zoltán* és *Wiedemann László.*

Az 1990. évi Eötvös-verseny feladatai

1. feladat
Lemezjátszó korongjának közepére helyezett tálban víz van. A vízen egy pingponglabda úszik. Mi történik a pingponglabdával, miután megindítottuk a lemezjátszót?

2. feladat
Vízszintes helyzetű körlemezekből álló síkkondenzátort feltöltünk. A kondenzátor közelében a lemezek közti távolságot felező vízszintes síkban kis iránytűt helyezünk el. Ezután a kondenzátort a függőleges szimmetriatengely körüli forgásba hozzuk. Megmozdul-e az iránytű, s ha igen, merre?

3. feladat
Vízben szuszpendált, d = 0,5 μm átmérőjű, gömb alakú részecskék termikus egyensúlyi eloszlását vizsgáljuk mikroszkópon keresztül. A mikroszkóp tubusa függőleges. A részecskék anyagának sűrűsége 1040 kg/m^3, a hőmérséklet 23 °C. A mikroszkóp mélységélessége kicsi, mindig csak egy igen vékony vízrétegben lévő részecskék láthatók élesen. Mennyivel kell lejjebb süllyeszteni a mikroszkóp tubusát, hogy kétszer annyi részecskét lássunk? A víz törésmutatója n = 1,33.

Az 1990-es verseny díjazottjai: I. díjat kapott *Bodor András,* az ELTE Apáczai Csere János Gyakorló Gimnáziumának IV. osztályos tanulója, tanára: *Zsigri Ferenc;* II. díjat kapott *Horváth Tibor,* a kecskeméti Katona József Gimnázium IV. osztályos tanulója, tanára: *Kocsisné Domján Erzsébet,* valamint *Zóka Gábor,* a nagyatádi Ady Endre Gimnázium érettségizett tanuló-

[1] Részletek: http://mono.eik.bme.hu/~vanko/fizika/eotvos.htm.

ja, tanára *Knapp Ottó;* III. díjat kapott *Egyedi Péter,* a pécsi Leőwey Klára Gimnázium IV. osztályos tanulója, tanára *Csikós Istvánné, Maróti Miklós,* a szegedi Radnóti Miklós Gimnázium IV. osztályos tanulója, tanára *Dudás Zoltánné,* valamint *Tokodi Tamás,* a JATE Ságvári Endre Gyakorló Gimnázium érettségizett tanulója, tanárai *Kocsis Vilmos* és *Győri István.*

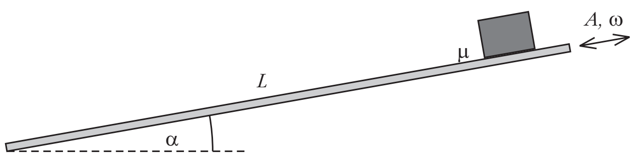
Gnädig Péter, az 50 évvel ezelőtti egyik győztes külföldi útja miatt nem tudott eljönni, de üzenetét *Vankó Péter* felolvasta. A 25 évvel ezelőtti díjazottak közül Horváth Tibor és Maróti Miklós jött el az alkalomra, utóbbi az akkori feladatok ismertetése után röviden beszélt a versennyel kapcsolatos emlékeiről és pályájáról.

Ezután következett a 2015. évi verseny feladatainak és megoldásainak bemutatása. Az 1. feladat megoldását *Vigh Máté,* a 2. feladatét Vankó Péter, a harmadik feladatét *Tichy Géza* ismertette.

A 2015. évi Eötvös-verseny feladatai

1. feladat kitűzte: Vigh Máté

Egy L = 6 m hosszúságú, merev deszkalap síkja a vízszintessel állandó, α = 10°-os szöget zár be. Az így kialakított lejtő tetejére egy kis hasábot helyezünk. A deszkát a lejtésvonalával párhuzamos irányban A = 1 mm amplitúdóval és ω = 500 s^{-1} körfrekvenciával harmonikusan rezgetni kezdjük.



1. ábra

Mennyi idő alatt éri el a hasáb a lejtő alját? (A csúszási és tapadási súrlódási együttható értéke egyaránt μ = 0,4, a hasáb a mozgás során nem borul fel.)

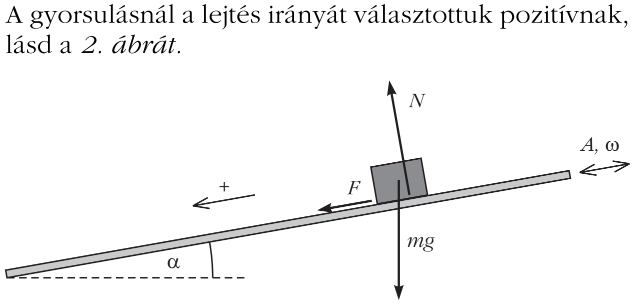
Megoldás

Az m tömegű hasábra az mg nehézségi erő, az N kényszererő és az F (csúszási vagy tapadási) súrlódási erő hat (utóbbi iránya a deszkalap rezgetése során változik). A test mozgásegyenletei a lejtőre merőleges, illetve azzal párhuzamos irányban:

$$N - m g \cos\alpha = 0,$$

$$F + m g \sin\alpha = m a.$$

A gyorsulásnál a lejtés irányát választottuk pozitívnak, lásd a *2. ábrát.*



2. ábra

Tapadás esetén a kényszererő és a súrlódási erő között az $|F| \le \mu N$ egyenlőtlenség áll fenn, míg csúszásnál $|F| = \mu N$. A hasáb gyorsulása akkor a lehető legnagyobb, ha a hasáb csúszik, és a hasáb *deszkához viszonyított* (relatív) sebessége negatív irányba mutat. Ekkor

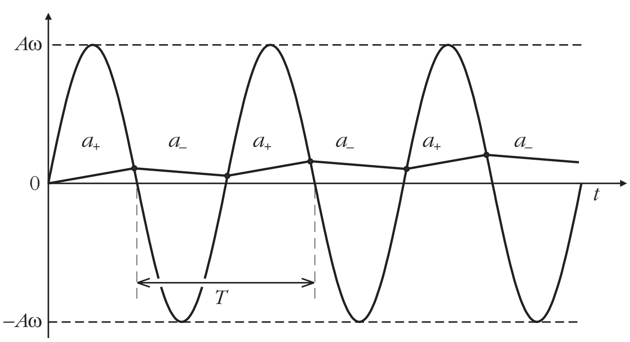
$$a_{\max} = g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha),$$

az adatok behelyettesítése után $a_{\max} \approx 5{,}6\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ adódik. A deszkalap legnagyobb gyorsulása a harmonikus rezgés következtében $A\omega^2 = 250\ \mathrm{m\,s^{-2}}$, amely több mint 40-szer akkora, mint $a_{\max}$ értéke, így a hasáb a rezgetés indításakor *azonnal megcsúszik.* Látni fogjuk, hogy további mozgása során a test sehol sem tapad meg, tehát mindvégig az (állandó nagyságú) csúszási súrlódási erő hat rá.

A hasáb gyorsulása a mozgás során tehát kétféle értéket vehet fel aszerint, hogy a súrlódási erő éppen a pozitív vagy negatív irányba mutat:

$$a_{\pm} = g(\sin\alpha \pm \mu\cos\alpha),$$

és mivel a megadott számadatok szerint $\mu > \mathrm{tg}\alpha$, így a_+ előjele pozitív, a_- előjele pedig negatív. Az a_+ gyorsulású mozgásszakasz addig tart, amíg a deszka (előjeles) sebessége nagyobb a hasáb sebességénél, míg az a_- gyorsulású mozgásszakaszban a helyzet éppen fordított. A *3. ábrán* látható grafikonon ábrázoltuk a deszkalap és a hasáb sebességét az idő függvényében. Utóbbi egy olyan töröttvonallal ábrázolható, ahol az egyes szakaszok meredeksége a_+ és a_-. Mivel $|a_+| > |a_-|$, így a hasáb egy periódusra vett átlagsebessége (a „sodródási sebesség”) egyre növekszik, miközben a test lefelé sodródik a deszkán.

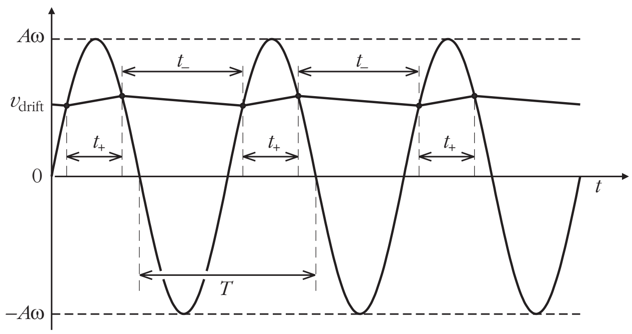


3. ábra

A sodródási sebesség növekedése addig tart, amíg a hasáb átlaggyorsulása zérussá nem válik. Ezután a hasáb sebessége egy állandó v_{drift} érték körül fluktuál (*4. ábra*). Ez az állandósult (stacionárius) mozgás a viszonylag nagy rezgetési frekvencia miatt hamar kialakul, így a teljes mozgási idő becslésekor a kezdeti felgyorsulás időszakát el is hanyagolhatjuk.

Az állandósult sodródás feltétele:

$$\langle a \rangle \equiv \frac{a_+ t_+ + a_- t_-}{T} = 0.$$



4. ábra

Természetesen fennáll a

$$T = t_+ + t_-$$

egyenlőség is. Az egyenletekből megkaphatjuk a t_+ időtartam hosszát:

$$t_+ = \frac{a_-}{a_- - a_+}\,T = \left(1 - \frac{\mathrm{tg}\alpha}{\mu}\right)\frac{T}{2}.$$

A sodródási sebességet pedig abból a feltételből határozhatjuk meg, hogy a hasáb gyorsulása akkor vált irányt, amikor a deszka és a hasáb sebessége megegyezik. A sebesség (v_{drift} értékéhez képest kicsiny) fluktuációját elhanyagolva:

$$v_{\mathrm{drift}} \approx A\omega\cos\left(\omega\,\frac{t_+}{2}\right).$$

Végül, behelyettesítve a T_+-ra kapott eredményt:

$$v_{\mathrm{drift}} = A\omega\cos\left[\left(1-\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\mu}\right)\frac{\pi}{2}\right] = A\omega\sin\left(\frac{\pi\,\mathrm{tg}\alpha}{2\mu}\right).$$

A számszerű adatokat felhasználva $v_{\mathrm{drift}} \approx 0{,}32\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ értéket kapunk, így a hasáb mozgásának becsült ideje

$$t = \frac{L}{v_{\mathrm{drift}}} \approx 18{,}8\ \mathrm{s}.$$

Hátravan még annak belátása, hogy a hasáb valóban nem tapad meg soha a lejtőn. A megtapadásnak két feltétele van: az egyik, hogy egy adott pillanatban a test és a deszkalap sebessége megegyezzen; a másik, hogy ugyanebben a pillanatban a deszka gyorsulásának nagysága kisebb legyen $|a_+|$-nál vagy $|a_-|$-nál aszerint, hogy a deszka épp lefelé vagy felfelé gyorsul. A sebesség-idő grafikonról látszik, hogy ez a két feltétel csak akkor következhet be, amikor a deszka gyorsulása nagyon kicsi, azaz sebessége nagy ($A\omega$-hoz közeli). Ekkora sebességre azonban a hasáb nem tud felgyorsulni, mert már előbb beáll a nála jóval kisebb v_{drift}. A hasáb tehát mindvégig csúszva halad a lejtőn.

Megjegyzés

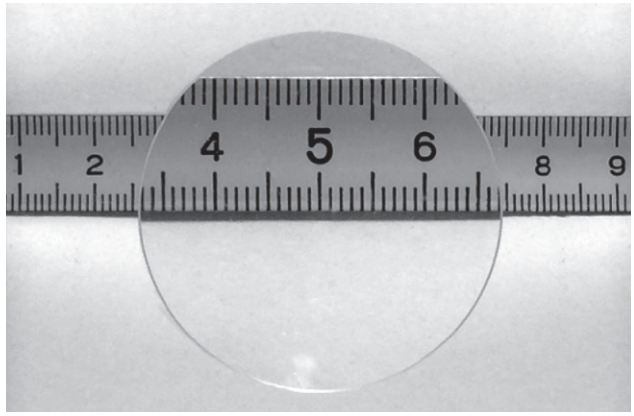
A megoldás során felhasználtuk, hogy a mozgás első, átmeneti szakasza (amely alatt a hasáb átlagsebessége eléri a v_{drift} értéket) rövid. Részletesebb számolással megmutatható, hogy ez az időtartam

$$\tau \approx \frac{A\omega}{\mu\, g\cos\alpha} \approx 0{,}13\ \mathrm{s}$$

nagyságrendű, tehát a becslésnél elkövetett hibánk valóban elhanyagolható (1-2% körüli érték).

2. feladat kitűzte: Tichy Géza és Vankó Péter

A fényképen látható vékony lencse átmérője 4,00 cm, a lencse és a mérőszalag távolsága 5,0 cm.

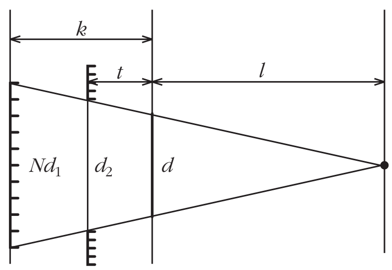


5. ábra

Mekkora a lencse fókusztávolsága?

Megoldás

A képen (*5. ábra*) látható, hogy a lencse a mérőszalagról egyenes állású, nagyított, látszólagos képet hoz létre. A képről két adat olvasható le: a lencsén belül (nagyítva) látható mérőszalagszakasz hossza (ezt jelöljük d_1-gyel) és az a távolság, amit a lencse kitakar a mérőszalagból (ez legyen d_2).



6. ábra

Készítsünk vázlatot az optikai elrendezésről (*6. ábra*)! A rajzon három sík látható: a lencse síkja, a mérőszalag síkja és a látszólagos kép síkja. Az átmérők közül a lencse d átmérője meg van adva, a d_2 átmérőt leolvastuk a képről, a látszólagos kép átmérője pedig Nd_1, ahol d_1 a képről leolvasott méret és N a nagyítás. A távolságok közül a t tárgytávolság (a lencse és a mérőszalag távolsága) meg van adva, a k képtávolság és az l távolság (a lencse és a fényképezőgép távolsága) egyelőre ismeretlen.

A rajzon ábrázolt mennyiségek között egyszerű összefüggéseket írhatunk fel. A lencsetörvény alapján:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{t} - \frac{1}{k},$$

ahol f a keresett fókusztávolság (a látszólagos képtávolság negatív, de k-t pozitív távolságként jelöltük). A nagyítás:

$$N = \frac{k}{t},$$

a látószögek egyenlőségéből (hasonló háromszögek):

$$\frac{N d_1}{k + l} = \frac{d_2}{t + l} = \frac{d}{l}.$$

Az egyenletrendszert rendezve (k-t, l-t és N-t kiejtve):

$$f = \frac{t\, d}{d_2 - d_1}.$$

Mielőtt ebbe a kifejezésbe behelyettesítenénk a megadott és leolvasott adatokat, foglalkoznunk kell az adatok *hibájával* is! Nem véletlenül szerepel a szövegben 4,00 cm és 5,0 cm. A lencse átmérőjét tolómérővel meg lehet mérni, így az tizedmilliméter (századcentiméter) pontossággal megadható. A lencse és a mérőszalag távolsága már nem mérhető ilyen pontosan, hiszen a lencse vastagsága sem nulla – ezt az adatot már csak milliméter pontosan adja meg a feladat szövege. A legkritikusabb a d_1 és d_2 távolságok minél pontosabb leolvasása, mert a fókusztávolság képletében ezek különbsége szerepel. Gondos megfigyeléssel ezek az átmérők néhány tizedmilliméter pontossággal leolvashatók a képről.

A megadott és leolvasott adatok hibájából már a hibaszámítás ismert szabályai szerint meghatározható a fókusztávolság relatív hibája:

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta t}{t} + \frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta d_1 + \Delta d_2}{d_2 - d_1}.$$

A megadott és leolvasott adatok hibával:

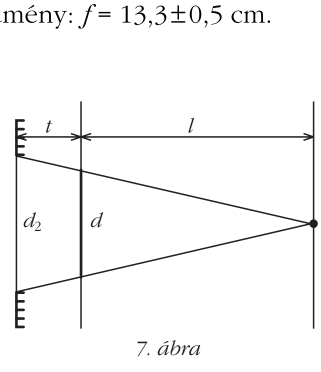
$$t = 5 \pm 0{,}05 \text{ cm},$$
$$d = 4 \pm 0{,}005 \text{ cm},$$
$$d_1 = 3{,}4 \pm 0{,}02 \text{ cm},$$
$$d_2 = 4{,}9 \pm 0{,}02 \text{ cm}.$$

Ebből a numerikus eredmény: $f = 13{,}3 \pm 0{,}5$ cm.

Megjegyzések

1. A versenyzők egy része másképp gondolkozott, másféleképp oldotta meg a feladatot. E megoldások gondolatmenete a következő.

A megadott adatok (*7. ábra*) és a leolvasott d_2 „külső” átmérő alapján

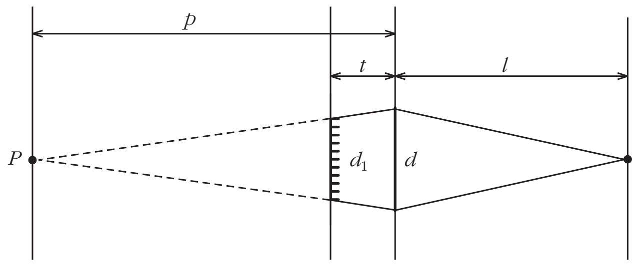


7. ábra

hasonló háromszögek segítségével kifejezhető a lencse és a fényképezőgép l távolsága:

$$l = \frac{t\, d}{d_2 - d}.$$

A *8. ábrán* az látható, hogy a nagyított képen még éppen látható pontokból (a d_1 „belső” átmérő két széléről) induló (és a lencsén megtörve a fényképezőgépbe jutó) fénysugarak olyanok, mintha egy képzeletbeli P pontból indulnának. A P pont lencsétől mért p távolsága az előzőhöz hasonló módon kifejezhető:



8. ábra

$$p = \frac{t\, d}{d - d_1}.$$

A képzeletbeli P pontból induló fénysugarak a lencsén megtörve éppen a fényképezőgépbe jutnak, így a lencsetörvény alapján

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{l},$$

amiből l és p behelyettesítésével és átrendezéssel a fókusztávolságra a már korábban levezetett eredményt kapjuk.

2. A versenyzők közül senki sem foglalkozott a hibákkal, és a leolvasást is „nagyvonalúan” végezték (a d_2 átmérőt legtöbben kereken 5 cm-nek, mások 4,8 cm-nek vették). Egy 1 mm-es leolvasási hiba 1 cm-es hibát okoz a fókusztávolságban – ennek ellenére az eredményt legtöbben 4-5 értékes jegy pontossággal adták meg. Így erre a feladatra – bár 16-an lényegében helyesen megoldották – senki se adott teljes értékű megoldást.

3. feladat *Holics László* feladata nyomán kitűzte: Gnädig Péter

Egy hosszú, vékony, egyenes tekercs (szolenoid) hossza l = 1 m, átmérője D_1 = 2 cm, meneteinek száma N_1 = 2000, ohmos ellenállása elhanyagolható. A tekercs kivezetéseire 100 V effektív feszültségű, 100 kHz frekvenciájú váltakozó feszültséget kapcsolunk. A szolenoid mellett, annak közvetlen közelében, a tengelyére merőleges felezősíkban egy N_2 = 200 menetszámú, lapos, D_2 = 3 cm átmérőjű tekercs helyezkedik el.

Mekkora effektív feszültséget mutat a lapos tekercsre kapcsolt (ideálisnak tekinthető) voltmérő?

Egy tanárlegenda, Holics László és a díjazott diákok.

1. megoldás

A hosszú tekercsben folyó áram hatására a tekercs belsejében valamekkora, időben periodikusan változó $\Phi(t)$ mágneses fluxus jön létre. A változó mágneses fluxus a hosszú tekercs minden menetében feszültséget indukál, ezek összege minden pillanatban megegyezik a tekercsre kapcsolt váltakozó feszültséggel:

$$U_1(t) = N_1 \frac{\Delta\Phi(t)}{\Delta t}.$$

A lapos tekercsben nem folyik áram (a voltmérő ellenállása nagyon nagy), de a hosszú tekercs szórt mágneses tere feszültséget indukál benne. A feladat e szórt tér meghatározása.

A tekercsen kívüli mágneses mező ($l \gg D_1$ miatt) jó közelítéssel olyan, mintha a tekercs egyik végén egy pontszerű forrásból összesen $\Phi(t)$ mágneses fluxus indulna ki *gömbszimmetrikusan,* a tekercs másik végén pedig ugyanekkora fluxus nyelődne el (vagyis mintha egy $-\Phi(t)$ erősségű forrás helyezkedne el ott).

A lapos tekercs a hosszú tekercs felezősíkjában, a hosszú tekercshez közel helyezkedik el, így ezen a helyen mindkét forrás külön-külön

$$B(t) = \frac{\Phi(t)}{4\pi\left(\frac{l}{2}\right)^2}$$

mágneses indukciót hoz létre (mert a Φ fluxus egy $l/2$ sugarú gömb felületén oszlik el egyenletesen). A lapos tekercs közel van a hosszú tekercshez, így B közel merőleges a felületére. A lapos tekercsen áthaladó teljes (mindkét forrásból származó) fluxus emiatt:

$$\Phi_2(t) = 2\,B(t)\,\pi\left(\frac{D_2}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{D_2}{l}\right)^2 \Phi(t).$$

Ez az időben változó fluxus a lapos tekercsben

$$U_2(t) = N_2 \frac{\Delta\Phi_2(t)}{\Delta t} = \frac{1}{2} N_2 \left(\frac{D_2}{l}\right)^2 \frac{\Delta\Phi(t)}{\Delta t} = \frac{1}{2}\frac{N_2}{N_1}\left(\frac{D_2}{l}\right)^2 U_1(t)$$

feszültséget indukál. (Felhasználtuk $U_1(t)$ korábban felírt kifejezését.)

Az $U_1(t)$ és $U_2(t)$ feszültségek minden pillanatban arányosak egymással, így az effektív értékek aránya is ugyanekkora. Ebből a keresett feszültség:

$$U_2 = \frac{1}{2}\frac{N_2}{N_1}\left(\frac{D_2}{l}\right)^2 U_1 \approx 4{,}5\ \text{mV}.$$

2. megoldás *Fehér Zsombor* megoldása alapján

Egy hosszú, egyenes tekercs (szolenoid) belsejében kialakuló mágneses indukció nagyságára jól ismert a következő összefüggés:

$$B_\infty = \mu_0 \frac{NI}{l},$$

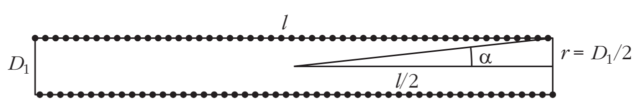
ahol N a tekercs menetszáma, I a tekercsen átfolyó áramerősség és l a tekercs hossza, valamint μ_0 értéke $4\pi\cdot 10^{-7}$ Vs/Am.

Ez az összefüggés azonban *véges* hosszúságú tekercsre *csak közelítőleg* igaz! A véges hosszúságú tekercs terét helyesen a következő kifejezés adja meg:

$$B = B_\infty \cos\alpha = \mu_0 \frac{NI}{l}\cos\alpha,$$

ahol α a tekercs zárókörének fél látószöge a tekercs középpontjából nézve. Ez az összefüggés a Biot–Savart-törvény segítségével levezethető (lásd a *2. megjegyzésben*).

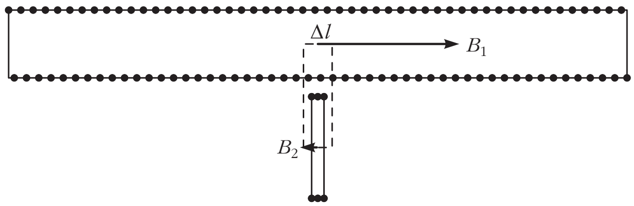
Hosszú, vékony tekercsnél $\alpha \ll 1$, és így $\cos\alpha \approx 1$, tehát az ismert összefüggés általában *jó közelítésként* használható. Ebben a feladatban azonban pont ez a kicsi különbség lesz számunkra fontos!



9. ábra

Először fejezzük ki $\cos\alpha$-t a tekercs adataival (*9. ábra,* kihasználjuk, hogy $\alpha \ll 1$, $\sin\alpha \ll 1$.):

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} \approx 1 - \frac{1}{2}\sin^2\alpha \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{D_1}{l}\right)^2.$$



10. ábra

Írjuk fel a gerjesztési törvényt egy olyan kis téglalapra, amelynek két oldala a két tekercs tengelyén fekszik (*10. ábra*):

$$B_1\,\Delta l + B_2\,\Delta l = \mu_0\, n\, I = \mu_0 N_1 \frac{\Delta l}{l} I = \mu_0 \frac{N_1 I}{l}\Delta l,$$

ahol B_1 és B_2 a hosszú, illetve a rövid tekercsben lévő indukció nagysága, n pedig a kis hurok által körülfogott menetek száma. (Felhasználtuk, hogy a tengelyre merőleges indukciókomponens a szolenoid tengelye tájékán elhanyagolható.)

A hosszú tekercsben a mágneses indukció

$$B_1 = \mu_0 \frac{N_1 I}{l}\cos\alpha \approx \mu_0 \frac{N_1 I}{l}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{D_1}{l}\right)^2\right],$$

amit felhasználva

$$B_2 = \mu_0 \frac{N_1 I}{l} - B_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{D_1}{l}\right)^2 \mu_0 \frac{N_1 I}{l} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{D_1}{l}\right)^2 B_1.$$

A tekercsekben indukált feszültség arányos a tekercsek menetszámával és az egy meneten áthaladó fluxussal, amiből a keresett feszültség:

$$U_2 = \frac{N_2\, B_2\, \pi \left(\dfrac{D_2}{2}\right)^2}{N_1\, B_1\, \pi \left(\dfrac{D_1}{2}\right)^2} U_1 = \frac{1}{2}\frac{N_2}{N_1}\left(\frac{D_2}{l}\right)^2 U_1,$$

az 1. megoldással megegyezően.

Megjegyzések

1. A megoldásban nem használtuk fel a megadott adatok közül a hosszú tekercs D_1 átmérője, valamint a rákapcsolt feszültség frekvenciájának számértékét. Ugyanakkor mindkét adat *nagyságrendje* fontos a megoldáshoz! Felhasználtuk, hogy $l \gg D_1$, mert emiatt közelíthettük a külső teret két *pontforrás* terével. A hosszú tekercs induktív ellenállása és így a tekercsen folyó áram nagysága függ a frekvenciától. Ha a frekvencia sokkal kisebb (például 50 Hz) lenne, akkor a tekercsen a rákapcsolt 100 V feszültség hatására olyan nagy áram indulna meg, amely a tekercset azonnal szétolvasztaná.

2. *A véges hosszúságú tekercs terének levezetése.* Egy r sugarú körvezetőben folyó $\mathrm{d}I$ áram által keltett mágneses indukciót a kör síkjára merőleges szimmetriatengely mentén, a kör síkjától h távolságra könnyen felírhatjuk a Biot–Savart-törvény segítségével:

$$B(h) = \frac{\mu_0\,\mathrm{d}I}{4\pi}\frac{2\,r\pi}{r^2+h^2}\frac{r}{\sqrt{r^2+h^2}} = \frac{\mu_0\, r^2\,\mathrm{d}I}{2\left(r^2+h^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Rakjuk össze az l hosszúságú N menetes tekercset $\mathrm{d}h$ vastagságú kis köráramokból. Ekkor egy ilyen kis körben

$$\mathrm{d}I = \frac{NI}{l}\mathrm{d}h$$

áram folyik, ami a tengelye mentén, a síkjától h távolságra

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0\, N I\, r^2}{2\, l\left(r^2+h^2\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}h$$

indukciót hoz létre.

A tekercs középpontjában lévő indukciót úgy kapjuk meg, hogy ezeket a kis indukciójárulékokat összegezzük $h = -l/2$-től $h = l/2$-ig:

$$B = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \mathrm{d}B = \frac{\mu_0\, N I\, r^2}{2\, l}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\mathrm{d}h}{\left(r^2+h^2\right)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{\mu_0 N I}{l}\frac{\dfrac{l}{2}}{\sqrt{\left(\dfrac{l}{2}\right)^2 + r^2}} = \frac{\mu_0 N I}{l}\cos\alpha,$$

ahol α a tekercs zárókörének fél nyílásszöge a tekercs középpontjából nézve (lásd a *9. ábrát*).

Ezután került sor az eredményhirdetésre. A díjakat *Patkós András,* az Eötvös Loránd Fizikai Társulat elnöke adta át.

Egyetlen versenyző sem oldotta meg mindhárom feladatot, ezért a versenybizottság 2015-ben nem adott ki első díjat.

Egy feladat helyes és egy feladat lényegében helyes megoldásáért *második díjat* nyert *Fehér Zsombor,* a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium érettségizett tanulója, *Horváth Gábor* tanítványa – jelenleg az ELTE matematikus hallgatója; *Holczer András,* a Pécsi Janus Pannonius Gimnázium érettségizett tanulója, *Dombi Anna* és *Kotek László* tanítványa – jelenleg a BME villamosmérnök hallgatója; *Juhász Dániel,* a Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Csányi Sándor* tanítványa; *Sal Kristóf,* a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója, Kotek László és Horváth Gábor tanítványa, valamint *Tompa Tamás Lajos,* a miskolci Földes Ferenc Gimnázium 11. osztályos tanulója, *Zámborszky Ferenc* és *Kovács Benedek* tanítványa.

Egy feladat helyes megoldásáért és a hozzáfűzött diszkusszióért *harmadik díjat* nyert *Balogh Menyhért,*

A 2015. évi Eötvös-versenyen legeredményesebben szereplő diákok. (Fotók: Tichy-Rács Ádám)

mezővásárhelyi Bethlen Gábor Református Gimnázium 11. osztályos tanulója, *Lakatos-Tóth István* és *Nagy Tibor* tanítványa; *Kasza Bence,* a Budai Ciszterci Szent Imre Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Ábrám László* és *Sarkadi Tamás* tanítványa; *Kovács Péter Tamás,* a Zalaegerszegi Zrínyi Miklós Gimnázium 11. osztályos tanulója, *Juhász Tibor* és *Pálovics Róbert* tanítványa; *Körmöczi Dávid,* az Egri Szilágyi Erzsébet Gimnázium és Kollégium 12. osztályos tanulója, *Szabó Miklós* tanítványa; *Olosz Balázs,* a PTE Babits Mihály Gyakorló Gimnázium érettségizett tanulója, *Koncz Károly* tanítványa – jelenleg a BME villamosmérnök hallgatója; *Szamosfalvi Benjámin Balázs,* a Miskolci Herman Ottó Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Dudás Imre* tanítványa; *Szick Dániel,* a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója, Horváth Gábor tanítványa; *Tomcsányi Gergely,* a Váci Szakképzési Centrum Boronkay György Műszaki Szakközépiskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója, Tóth Eszter tanítványa, valamint *Török Péter,* a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 11. osztályos tanulója, Horváth Gábor és Szokolai Tibor tanítványa.

A MOL támogatásával a második díjjal nettó 25 ezer, a harmadik díjjal nettó 20 ezer forint pénzjutalom járt, a dicséretes versenyzők, valamint a díjazottak tanárai pedig a versenyt támogató Typotex Kiadó könyveit kapták.

a budapesti Baár-Madas Református Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Horváth Norbert* tanítványa.

Egy feladat lényegében helyes megoldásáért *dicséretben* részesült *Bege Áron,* a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 11. osztályos tanulója, Horváth Gábor és *Szokolai Tibor* tanítványa; *Bencsik Bálint,* az Óbudai Árpád Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Nagy Attila* tanítványa; *Bugár Dávid,* a komáromi Selye János Gimnázium érettségizett tanulója, *Szabó Endre* tanítványa – jelenleg az ELTE fizikus hallgatója; *Forrai Botond,* a budapesti Baár-Madas Református Gimnázium 12. osztályos tanulója, Horváth Norbert tanítványa; *Frey Balázs,* a Váci Szakképzési Centrum Boronkay György Műszaki Szakközépiskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Tóth Eszter* tanítványa; *Gémes Antal,* a hód-

HÍREK – ESEMÉNYEK

OBAMA ELNÖKSÉGE

A minden betűt észrevenni kész olvasó helycserét talál a tartalomjegyzék mellett. *Füstöss László* szerkesztő visszavonult a szerkesztőbizottságba, helyét idén januártól Lendvai János tölti be. A műszaki szerkesztőnek, mint 1992 óta annyiszor, nyolc éve is szerencséje volt. Megszerettette vele e lap készítését a *Marx György – Turi Zsuzsa* páros, feledhető intermezzo után *Németh Judittal* és – rövid ideig *Szabados Lászlóval,* majd – *Tóth Kálmánnal* újra felüdülés lett a szerkesztés, majd a nyolc éve történt váltást követően a *Szatmáry Zoltán* – Füstöss László párral teljes harmóniában tudott dolgozni (a nem említetteket borítsa jótékony homály).

Füstöss Laci híre már messze megelőzte őt, jó tollú szerzőként élvezetes perceket nyújtottak írásai, belecsempészett egyéni szófordulatai, ki-kikacsintó megjegyzései. Nem okozott csalódást (ne feledjük, Tóth Kálmán magasra rakta a mércét), olyan hévvel és a lap iránti szeretettel látott munkához, amely azonnal a régóta együttdolgozás képzetét hozta magával. Lelke-