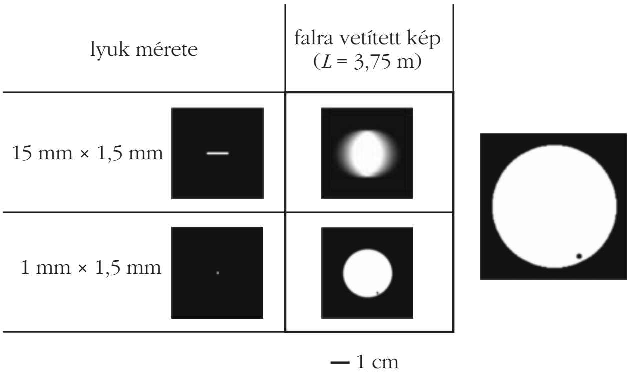
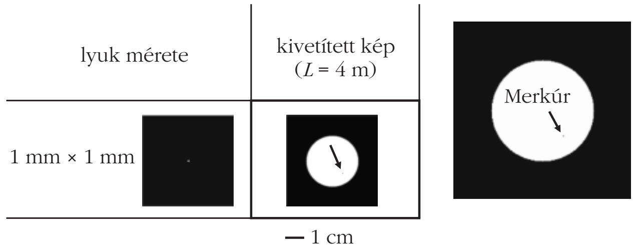


17. ábra



18. ábra

fehér, a Vénusz apró körlapja fekete lenne a képen. Az 1 mm × 1,5 mm-es rés által alkotott ernyőképet (a *17. ábra* táblázatának jobb alsó képét) elemezve azt kaptam, hogy a Vénuszt jelképező apró, elmosódott folt intenzitásmaximuma 25%-a a Napkorong intenzitásának, azaz nem fekete, hanem sötétszürke. A lyuk által alkotott kép a Vénusz esetében tehát nem volt tökéletesen kontrasztos, de azért jól ki lehetett venni. A konvolúciós integrálból adódó elkerülhetetlen effektus, hogy ha még kisebb objektum kúszik be a Nap elé, akkor a kép kontrasztja még rosszabb lesz. Ilyen típusú látványnál tehát elsősorban a rossz kontraszt szab korlátot a lyukkamerás megfigyeléseknek, amint azt a Merkúr példáján mindjárt látni fogjuk.

A Merkúr-átvonulások jóval gyakoribbak, mint a Vénusz Nap előtti elhaladásai (a legközelebbi 2016. május 9-én lesz), és éppen ebből a gyakoriságból ered legfőbb tudománytörténeti jelentőségük. A Merkúr pozíciója ugyanis ilyen átvonulások alkalmával mérhető a legpontosabban. A viszonylag gyakori átvonulások elegendő mérési adatot szolgáltattak a 19. században a zseniális *Le Verrier*-nek, hogy a Merkúr perihéliumelfordulását rendkívüli pontossággal kiszámolja. Így derült fény arra a kicsiny, ~43”/évszázad mértékű elfordulásjárulékra, amely *Einstein* általános relativitáselméletének megjelenéséig várt az elméleti magyarázatra.

Megfigyelhetők-e a Merkúr-átvonulások lyukkamerával? Ez a bolygó kisebb, és távolabb is van tőlünk, mint a Vénusz, így a látszó szögátmérője még akkor is nagyon kicsi ($\varepsilon_{Merkúr} \approx 5\cdot10^{-5}$ rad), amikor a legközelebb van a Földhöz (mint például Merkúr-átvonuláskor). A *18. ábra* jobb oldali képe mutatja, milyen látványt nyújt a Nap elé bekúszó Merkúr apró, szinte pontszerű korongja, tökéletes leképezés esetén. Ebből az $f(x, y)$ függvényből – 1 mm × 1 mm-es négyzet alakú lyukat és 4 m-es ernyőtávolságot feltételezve – az (1) konvolúciós integrál a *18. ábrán* látható képet szolgáltatja. A kiszámolt ernyőképen fekete nyíllal jelzem a Merkúr nagyon világos szürke, ezért gyakorlatilag kivehetetlen képének helyét. A képet elemezve kiderül, hogy az ernyőn a Merkúr foltjának intenzitása 94%, azaz a fehér háttértől alig megkülönböztethető. Megállapítható tehát, hogy – bár mindenképpen érdemes a 2016-os Merkúr-átvonulást figyelemmel követni, és közben a téridő görbültségén elmélkedni – erre a megfigyelésre sajnos a lyukkamera nem látszik alkalmasnak. Távcsővel kivetítve azonban továbbra is kontrasztos képet kaphatunk, mint azt az interneten fellelhető, korábbi Merkúr-átvonulásokról készült fényképek tanúsítják. Kartonpapíros-lyukkamerás kísérleteinket pedig folytathatjuk a 2022. október 25-i napfogyatkozáskor.

A ZSONGLŐRKÖDÉS FIZIKÁJA

Varga János
Székesfehérvár

Mottó: „Meggyőződésem, hogy a tudomány szakmákra, szakterületekre való felosztása az osztályozó emberi elme ugyan szükségszerű, de mesterséges terméke. A természet nem ismeri az ilyen szakosítást.”

Szalay Sándor

A matematika csupán számokkal való *zsonglőrködés,* a fizika képletekkel való bűvészkedés, a kémia meg csak kémcsövekben való kotyvasztás – hangoztatják a gondolkodni restek. E mondás a zsonglőrködést a matematikához köti. Amennyiben néhány összeadás és kivonás maga a matematika, annyiban ezt a felfogást erősíti az alábbi [1]-ből vett feladat és annak megoldása is.

F.60. *Jani és Juliska édesapja szomorúan bandukolt haza, ugyanis nem tudott venni egyebet, mint két darab tojást. Egy olyan régi fahídhoz ért, amelyre ki volt írva, hogy 70 kg-nál nagyobb tömeget nem bír el. Elgondolkozott a jó öreg:*

– Én pontosan 69,950 kg tömegű vagyok, a tojások meg egyenként 50 g tömegűek. Még ezt a két tojást sem tudom épségben hazavinni gyermekeimnek – búslakodott szomorúan.

Hamarosan azonban mentő ötlete támadt, és épen hazavitte a két tojást anélkül, hogy a híd leszakadt volna. Pontosan egyszer haladt át a hídon, és senki sem segített neki. Vajon hogy tette ezt?

Az egyik fizikaórán tanítványaimnak én is feladtam a fenti példát, mert alkalmasnak találtam *az önálló tanulói kutatásra, számolásra és mérésre*, amin az egész osztály együtt gondolkozhat és dolgozhat, arra, hogy tanárként „felülről nézve és a háttérből irányítva” figyelhessem tanítványaim munkáját, ki hogyan közelíti meg a problémát, milyen gondolkodásmódot alkalmaz. Én magam csupán, mint moderátor próbáltam közreműködni, a „brain storming” (ötletroham) módszert alkalmazva.

Ötletek a józan ész jegyében

Mintegy megérezve a feladatban lévő játékosságot, tanítványaim először a mindennapi logikát használták. Szinte záporoztak az ötletesebbnél ötletesebb javaslatok. Volt, aki azt javasolta, hogy az apa vágjon le a hajából annyit, mint a két tojás tömege, mások valamilyen ruhadarabtól – például kabát stb. – akarták megszabadítani, vagy azt javasolták, hogy dobja át a folyón a cipőit, és mivel azok biztosan nehezebbek, mint egy tojás, így mezítláb a két tojással a híd leszakadásának veszélye nélkül könnyedén át tud menni a hídon. Bár a feladat eredeti kiírása nem tartalmaz a híd teherbíró képességénél több megkötést, közösen megegyeztünk, hogy noha ezek nem túl rossz javaslatok, próbáljuk egy kicsit körültekintőbben vizsgálni a feladatot.

Számolásos megközelítés

Ez nyilvánvalóan nem egy absztrakt matematikai probléma, de a matematika segít az áttekinthető megfogalmazásban, a kérdés megválaszolásában. Számoljunk egy kicsit! – próbáltam más útra terelni az osztályt. Ekkor azonnal rájöttek, hogy csak egy tojás lehet nála, és azt át is tudná vinni, utána pedig visszajönne a másikért. Igen ám, de a feladat szerint csak egyszer haladhat át a hídon – ábrándítottam ki a megoldókat. Hát, akkor nincs megoldás – válaszolták kórusban. Hol lehet még a tojás, ha nem az embernél? – próbálkoztam egy sugalmazó kérdéssel. Ekkor valaki rájött, hogy egy tojásnak mindig a levegőben kellene lennie. És ez hogyan lehetséges? – próbáltam továbblendíteni. Ekkor már többen rájöttek, hogy felváltva kell dobálni a tojásokat.

Vagyis közösen felfedeztük a *hivatkozott folyóirat megfejtését:* „Egy kis humorral és az apuka részéről egy kis kézügyességgel, úgy jár el, mint a cirkuszban: amíg a hídon halad át, felváltva fel-fel dobja (és persze ki is fogja) az egyik tojást (*zsonglőrködik*), így a kezében mindig csak egy 50 g-os tojás van, és a 69,950 kg saját tömegével éppen 70 kg »halad át« a hídon.” [1] Az első olvasásra ötletesnek tűnő megoldáson fellelkesülve azonban ne próbáljunk meg azonnal átmenni a hídon!

Mi lenne, ha most ellenőriznénk a megoldást úgy, mint matekórán, „visszahelyettesítenénk a valóságba”, vagyis az egészet eljátszanánk két almával, és közben mérnék az almadobáló súlyát? – javasoltam ismét. Irány a szertár és már elő is került egy mérleg. Akinél volt alma az végezte a kísérletet. Először megmértük a kísérlet végrehajtó tanuló súlyát alma nélkül, majd külön az alma súlyát. Ezt követően jött a kísérlet, és árgus szemekkel figyeltük, hogy mit mutat a mérleg miközben dobja az almát. A váratlan eredmény mindenkit megdöbbentett, mert a mérleg 4 kg-mal mutatott többet. Ez pedig nyilvánvalóan több mint egy alma súlyának megfelelő tömeg. Ezt többször is megismételtük, mert többen nem akarták elhinni.

Fizikai megközelítés

Többen megjegyezték, hogy a mozgás miatt van az egész, hogy itt most van *tömeg* (alma), *erő* (amivel az almát feldobjuk), akkor a jó öreg *Newton* szerint kell, hogy legyen gyorsulás is. Vagyis ez már a fizika területe és ebben a feladatban – nyílván a megoldásban is – bőven van fizika, használhatjuk a fizikai gondolkodásmódot.

Ezután következett a feldobás fázisainak közös elemzése, majd az egyenletek felírása, azok megoldása, ahol bizony elkelt egy kis tanári segítség. Összességében az alábbi megoldásra jutottunk.

Jancsi és Juliska édesapja nem vette figyelembe a természet (jelen esetben a fizika) törvényeit, ezért ha a fent leírt megoldás szerint jár el, akkor bizony a híd azonnal leszakad alatta. Miért?

Ahhoz, hogy az apa a tojást függőlegesen feldobja, azt fel kell gyorsítani valamilyen sebességre. Ehhez függőleges, felfelé irányuló „tolóerőt” kell kifejtenie. A *hatás-ellenhatás törvénye* miatt az erők mindig párosával lépnek fel, így ugyanilyen nagyságú, de ellentétes (lefelé irányuló) erő is keletkezni fog, ami a kézre hat, így ennyivel megnövekszik az apa súlya, de mivel a híd semmilyen többletterhelést nem bír el, természetesen le fog szakadni.

Vizsgáljuk meg, hogy mennyivel növekszik a súlyunk, miközben feldobjuk a kezünkben lévő tojást vagy bármilyen tárgyat!

Az *1. ábra* a tojásfeldobás fázisait mutatja, ahol F a tojásra kifejtett „tolóerő”, G_t a tojás/test súlya (pontosan: a tojásra ható nehézségi erő), s_{gy} a tojás gyorsítási/lassítási úthossza (ezalatt hat rá az F erő), s_e a tojás emelkedési/esési úthossza (a gyorsítás megszűntének pozíciójától számítva).

A *szabadesés törvényei* alapján az s_e magasságból elejtett test esetén

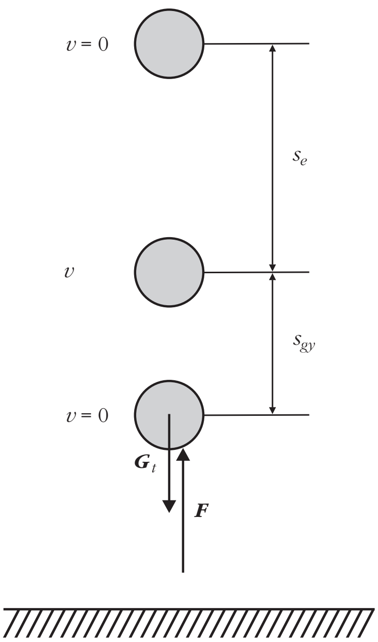
$$s_e = \frac{g\,t^2}{2}, \tag{1}$$

illetve

$$v = g\,t, \tag{2}$$

ahol t a repülés/zuhanás ideje. A (2) egyenletből t-t kifejezve és (1)-be behelyettesítve, majd az egyenletet rendezve

$$2\,g\,s_e = v^2. \tag{3}$$



1. ábra. A tojásfeldobás fázisai.

A *munkatétel* alapján a gyorsítási szakaszra viszont írható, hogy az F_{gy} gyorsító erő munkája egyenlő a mozgási energia megváltozásával, azaz

$$F_{gy}\, s_{gy} = \frac{m\, v^2}{2}. \tag{4}$$

(3)-at (4)-be behelyettesítve, majd F_{gy}-t kifejezve

$$F_{gy} = \frac{s_e}{s_{gy}}\, m_t\, g = \frac{s_e}{s_{gy}}\, G_t, \tag{5}$$

ahol $m_t g = G_t$ a feldobott test súlya.

A testet ténylegesen gyorsító erő az eredő erő, a testre kifejtett felfelé mutató F tolóerő és a test súlya között az alábbi összefüggés áll fenn.

$$F_{gy} = F - G_t. \tag{6}$$

Ebbe (5)-öt behelyettesítve, F-re az alábbi összefüggés adódik.

$$F = \left(1 + \frac{s_e}{s_{gy}}\right) G_t. \tag{7}$$

Súlyunk tehát éppen ezzel megegyező értékkel, de az F-fel ellentétes irányú, lefelé mutató úgynevezett reakció erő nagyságával növekszik. A ΔG súlynövekedés tehát a feldobott test súlyának (s_e/s_{gy})-szeresével egyenlő.

$$G_t + \Delta G = \left(1 + \frac{s_e}{s_{gy}}\right) G_t. \tag{8}$$

Így a zsonglőrködés egy új, eddig nem publikált általános összefüggéséhez jutottunk, és közösen örültünk az új felfedezésnek.

Természetesen a test elkapásakor ugyanekkora lesz a súlynövekedésünk, feltéve, ha az esési, illetve lassítási úthosszak megegyeznek az emelkedési, illetve gyorsítási úthosszakkal.

Ezt követően az osztály egyik zsonglőrködni tudó tanulója segítségével – a tanárnak is jól jön néha egy kis tanulói segítség! – tojás helyett almával végeztünk kísérletet, erről videófelvételt készítve, majd a videót visszajátszva és a távolságokat lemérve, az alma helyett a tojás tömegével számolva az alábbi értékek adódtak: s_{gy} = 10 cm, s_e = 40 cm, m_t = 50 g = 0,05 kg; ekkor

$$G_t = m_t g = 0{,}05 \cdot 10 = 0{,}5\ \text{N},$$

$$\Delta G = \frac{40}{10} \cdot 0{,}5 = 4 \cdot 0{,}5 = 2\ \text{N}.$$

Így a 69,950 kg tömegű apa eredeti 699,5 N súlya a tojás feldobásakor 699,5+2,5 = 702 N lesz, ezt a 700 N teherbírású fahíd nem fogja elbírni, így az mindenképpen leszakad. A problémát tovább elemezve rájöttünk, hogy sajnos a helyzet még ennél is rosszabb. Eddig ugyanis figyelmen kívül hagytuk, hogy az alma vagy tojás feldobásakor még az almánál jóval nagyobb tömegű kezünket is gyorsítani kell, ami szintén súlynövekedést okoz – nem véletlenül mutatott 4 kg-mal többet a mérleg az első próbadobásnál. (Pontos számításnál tehát ezt is figyelembe kell venni.)

Így tehát azt gondolhatnánk, hogy az apának csak egyetlen lehetősége marad: dobálás nélkül, egyenként átvinni a tojásokat a hídon, mert így a tömege egy tojással együtt éppen 70 kg, ami megegyezik a híd teherbírásával. Sajnos a fizika megint közbeszól, ugyanis a normál járás közben – és ezt eddig nem is vettük figyelembe! – a tojás és a testünk súlypontja le-föl jár, ráadásul a nem kis tömegű lábainkat is emelgetni (gyorsítani, lassítani) kell, így súlyunk ezek miatt is olyan mértékben megnövekszik, hogy valójában tojás nélkül sem tudnánk átmenni a 70 kg teherbírású hídon.

Ez a feladat tehát jó példa arra, hogy a valóságban (a természetben) a jelenségek nincsenek tudományterületek szerint szétválasztva, ezt csak az emberi elme teszi azért, hogy egy bonyolultabb jelenséget több szempontból vizsgálva könnyebben megértsünk.

A technika és a műszaki tudományok fejlődése napjainkban a fizika mély ismeretét igényli a későbbiekben e területekre kerülő tehetséges tanulóktól, akik a fizikai ismeretanyagot kellő szakértelemmel tudják összekapcsolni a természet- és műszaki tudományok többi területével.

„A *zsonglőrködés* sokak számára csak bohóckodás, amolyan cirkuszi produkció: tányértáncoltatás, röpködő labdák és buzogányok. Története a távoli múltban kezdődött. A legősibb dokumentált emlék közel négyezer éves: egy zsonglőröket ábrázoló egyiptomi sírkamrarajz a Középső Királyság idejéből. *James Cook* kapitány felfedezései nyomán pedig azt a meglepő tényt jegyezték fel, hogy Tonga szigetén a leányok mindegyike tudott zsonglőrködni, esetenként hat labdával is. A matematikus számára persze a zsonglőrködés – mint sok minden a világon – izgalmas matematikai feladvány, nagyon is komoly dolog. Bármily meglepő, a ma ismert zsonglőrmutatványok egy részét matematikusok »találták fel«, nem pedig cirkuszi mutatványosok. 1972-ben a Nemzetközi Zsonglőrszövetség elnöke az a *Ronald L. Graham* volt, aki a Magyar Tudományos Akadémia Tiszteleti tagja, 1993-ban az Amerikai Matematikai Társulat elnöke, *Erdős Pál* jó barátja, akivel 30 közös publikációjuk jelent meg." [2]

Mint a [2] cikk – amelynek elolvasását szintén ajánlom – is rámutat, a zsonglőrködés a matematikának is komoly vizsgálati/kutatási területe. Ugyanakkor fizikai szempontból is sok érdekeset tudtunk mondani róla, ráadásul fizikaórán egy mérlegre állva, még ha nem is zsonglőrködve – mert még két almával sem olyan könnyű zsonglőrködi –, de egyszerűen csak egy almát feldobva és elkapva, a fenti megállapításokat egyszerű súlyméréssel igazolhatjuk, ami igen meggyőző lehet a tanulók számára, rávilágítva arra, hogy ezt a tevékenységet még mélyebben vizsgálhatnánk, mint ahogyan a fentiekben tettük.

Irodalom

1. *Matlap* 7 (2013. szeptember) Kolozsvár, 257. o., F. 60. feladat
2. Czédli Gábor: A III. Béla Gimnáziumtól az egyszerű zsonglőrminták átlagtételéig. *Szeged,* 2007. január 26. http://www.math.u-szeged.hu/~czedli/publ.pdf/3.Bela1.pdf

LISSAJOUS-GÖRBÉK ELŐÁLLÍTÁSA FERDESZÖGŰ REZGÉSEK EGYMÁSRA TEVŐDÉSÉVEL

Inczeffy Szabolcs Zsombor
Ócsai Bolyai János Gimnázium

Lissajous-görbék

Ismeretes, hogy a Lissajous-görbék merőleges rezgések egymásra tevődéseként jönnek létre. A rezgések amplitúdóját, frekvenciáját, illetve kezdőfázisát változtatva különböző méretű és alakú látványos görbéket, alakzatokat kapunk.

A *GeoGebra* (ingyen letölthető) számítógépes program segítségével a Lissajous-görbe a két rezgés egymásra tevődésének nyomvonalaként jön létre.

Az *1.* és *2. ábrákon* látható *P* pont helyzetét meghatározó $\boldsymbol{p}$ vektor a $\boldsymbol{p}_1$ és a $\boldsymbol{p}_2$ vektorok összege. A $\boldsymbol{p}_1$ és $\boldsymbol{p}_2$ vektorok hosszát és irányítását a

$$p_1 = A_1 \cos(2\pi f_1 t) = A_1 \sin\left(2\pi f_1 t + \frac{\pi}{2} + \varphi_1\right)$$

és a

$$p_2 = A_2 \sin(2\pi f_2 t + \varphi_2)$$

rezgés (kitérés) egyenletek határozzák meg. Ahol A_1 és A_2 a rezgések legnagyobb kitérését, f_1 és f_2 a rezgésszámokat, t az időt, φ_1 és φ_2 a kezdőfázisokat jelölik.

A $\boldsymbol{p}$ vektor nagyságát Pitagorasz tételével a

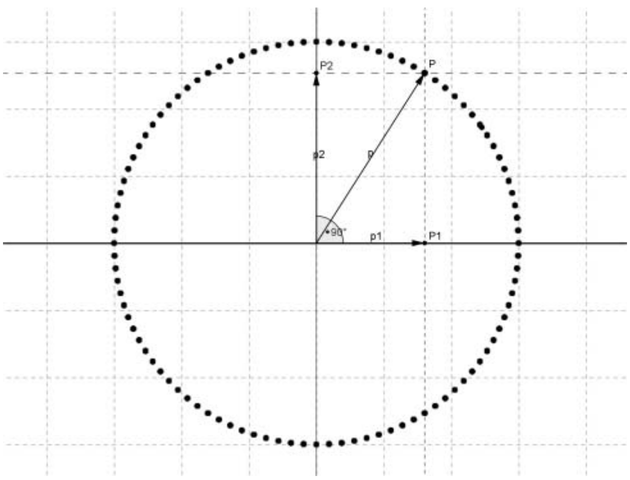
$$p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}$$

összefüggésből számolhatjuk ki, míg irányát a

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{p_2}{p_1} \Rightarrow \varphi = \mathrm{arctg}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)$$

képlettel határozhatjuk meg!

1. ábra. $f_1{:}f_2$ = 1:1 rezgésszámarányú Lissajous-görbe.



2. ábra. $f_1{:}f_2$ = 5:3 rezgésszámarányú Lissajous-görbe.