$$\int_0^\infty \mathrm{d}E' \int_{4\pi} \mathrm{d}\mathbf{\Omega}' \, \Sigma_S(\mathbf{r}_0, E_0 \rightarrow E', \mathbf{\Omega}_0 \mathbf{\Omega}') \, v_0 \, g(t_0, \mathbf{r}_0, E', \mathbf{\Omega}'; t, z). \quad (17)$$

A hasadásnak megfelelő tag lényegesen bonyolultabb, ugyanis annak a neutronok energiájának és sebességirányának véletlen jellegén túlmenően a hasadásban keletkező neutron számának véletlen jellegét is ki kell fejeznie. Ezért ennek alakja lényegesen eltér a transzportegyenletben szereplő alaktól.

Megjegyezzük még, hogy hasonló egyenletet lehet felírni a kétszeres, háromszoros stb. valószínűségek generátorfüggvényére is. Például a kétszeres valószínűséget a következőképpen definiáljuk: $p^{(2)}[t_0, \mathbf{u}; t, n_1, n_2]$ annak valószínűsége, hogy $\xi(t, U_1) = n_1$ és $\xi(t, U_2) = n_2$, feltéve, hogy a t_0 időpontban a fázistér $\mathbf{u}_0$ pontjába egy neutron került. Ennek a valószínűségnek az ismeretében tanulmányozni lehet – többek között – a fázistér különböző térfogataiban található neutronok száma közötti korrelációt.

Záró megjegyzések

Már negyedik évtizede annak, hogy a Pál–Bell-egyenlet alkalmas kiindulást jelent a neutronzaj területén folyó elméleti és kísérleti kutatásoknak. Segítségével *ad hoc* ötletek és mindenféle egyszerűsítő feltevések nélkül értelmezni lehet a neutronzaj kísérleti vizsgálatára szolgáló módszereket. Például a Rossi-α módszer alapjául szolgáló (11) képletben szereplő *A* együttható értékét a heurisztikus elméletek olyan pontatlanul adják meg, hogy a mérésből kapott értéke nem interpretálható. Hasonló állítást lehet tenni a többi (itt nem említett) zajmérésről is.[4] Ugyanakkor a Pál–Bell-egyenlet alkalmazása jól értelmezhető mennyiségekre vezet.

Ezen túlmenően a (15)–(17) egyenletek nemcsak a klasszikus transzportelméletet tartalmazzák, hanem annál jóval többet is. (14)-ből ugyanis látható, hogy a generátorfüggvény z szerinti deriváltja a $z = 1$ helyen megadja a $\xi(t, U)$ valószínűségi függvény várható értékét. Ha tehát a Pál–Bell-egyenletet z szerint deriváljuk, majd benne $z = 1$-et helyettesítünk, akkor egyszerűen kaphatunk az (1) klasszikus transzportegyenletnek megfelelő egyenletet. Ha azonban a Pál–Bell-egyenletet z szerint kétszer deriváljuk, majd benne $z = 1$-et helyettesítünk, akkor a $\xi(t, U)$ valószínűségi függvény szórásnégyzetére vezethetünk le egyenletet. Ez már határozott többlet a klasszikus transzportelmélethez képest, amelynek a keretén belül egy ilyen egyenlet levezetése szóba sem jön.

[4] Ez alól talán egyetlen kivétel a Feynman-módszer (13) egyenletében szereplő *B* együttható: ez a heurisztikus elméletek szerint is értelmezhető információt tartalmaz a késő neutronok hányadára vonatkozóan.

A LAKÓTÉRI RADONSZINT ELOSZLÁSÁRÓL

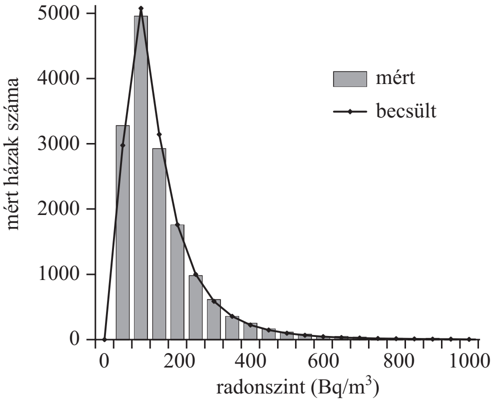
Tóth Eszter, Hámori Krisztián
RAD Labor, Boronkay, Vác

A radon megjelenése lakásainkban általában természetes jelenség. A szoba levegőjének radonsűrűsége elsősorban azon múlik, mennyi rádium (urán) van a talajban, amire a ház épült. (A radon a rádiumból születik α-bomlással.) Ugyanakkor igen sok más tényező befolyásolja, hogy végül is mekkora koncentrációban tapasztaljuk a radont.

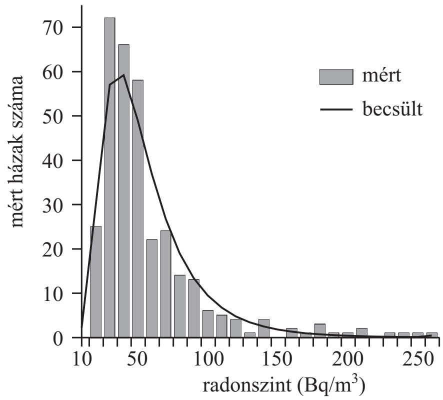
A legtöbb szerző feltételezi, hogy a radon aktivitáskoncentráció nagyon sok, kicsiny és egymástól független véletlen mennyiség szorzata. Tehát – mondják – a különböző házakban mért radon aktivitáskoncentrációk lognormál eloszlást követnek. További következtetéseiket erre az úgynevezett *lognormál modell*re alapozzák. S valóban, gyakori, hogy egy-egy területen mért néhány tucat, néhány száz, sőt, néha néhány ezer lakás radonszintjének eloszlását a lognormál eloszlások családjába tartozónak sejtetik a nemzetközi szakirodalomban. Alkalmanként megvizsgálják, hogy $\alpha = 0{,}05$ szignifikanciaszinten teljesül-e például a χ^2-próba, legtöbbször azonban nem is utalnak erre, csupán a *GM* geometriai közép és a *GSD* geometriai standard deviációt adják meg. Pedig egy véletlen mennyiségről csak akkor bizonyítható, hogy lognormál eloszlást követ, ha az nagyon sok, azonos eloszlású, egymástól független véletlen változó szorzataként állítható elő. Sem annak a fizikai hátterét nem látjuk, hogy e sok véletlen tényező (mondjuk például a talaj porozitását jellemző vagy a szoba önszellőzését leíró) azonos eloszlású lenne, sem azt, hogy ezek a véletlen mennyiségek függetlenek és szorzódóak lennének.

A lognormál modell alkalmazhatósága iránti vágy azonban érthető. Feltételezzük, hogy a vizsgált területen vagy/és a vizsgált szerkezetű házak lakásai közül a még nem mértek radonszintjei hasonló eloszlást követnek a mértekéhez. Ekkor az illesztett lognormál eloszlás két paraméterének becsült értékével (m' és σ') megadható az adott radonszint fölött lévő házak számaránya. Ezt lehet azután kockázatbecslésekhez felhasználni, e számokkal lehet azután megnyugtatni vagy riogatni a helyi lakosokat. Sőt, általuk lehet az országról radontérképet készíteni. De ily módon lehet megadni egy, az országra „jellemző” *GM*-et (mértani középértéket) és *GSD*-t (geometriai standard deviációt), amit azután nemzetközi szervek évről évre összesíthetnek, és tájékoztató jelleggel a döntéshozókhoz eljuttathatnak.

*Pál Lénárd*nak ajánlva, 80-ik születésnapjára.



1. ábra. A mért 15 602 lakás légterének radonszint-eloszlása. Az oszlopok a mért lakások számát, a folytonos vonal az illesztett lognormál eloszlást mutatják.



2. ábra. A mért 325 emeleti lakás légterének radonszint-eloszlása. Az oszlopok a mért lakások számát, a folytonos vonal az illesztett lognormál eloszlást mutatják.

A RAD Labor által az ország területén mért, több mint 15 000 lakótéri radonszint felhasználásával az alábbiakban bemutatjuk a lognormál modellel való közelítés lehetőségeit.

Lakótéri radonadatainkról

Amikor *radonszint*ről beszélünk, a radon aktivitáskoncentrációnak az *éves átlag*ára gondolunk. A mérés azonban nem egy teljes évig tartott, a detektorokat csupán három évszakra: őszre, télre és tavaszra helyeztük el a lakásokban. A nyári értéket ezekből becsültük két különböző évben, közel ezer lakásban mért teljes év (négy évszak) mérései alapján. A méréseket CR39 nyomdetektorral végeztük. A helyi általános iskolás tanárok és diákok segédkeztek a detektorok elhelyezésében.

1994 és 2004 között 423 település összesen 15 602 lakásában határoztuk meg a radonszintet. A mérési pontok (a lakások hálószobái) nem egyenletesen fedik le az ország területét. Mintavételünk abban az értelemben véletlenszerű volt, hogy a települések tanárai „véletlenszerűen” jelentkeztek mérésre. Másrészt, amelyik településen már az első mérési évben találtunk nagyobb radonszintet, ott a következő években további lakásokban is mértünk. Mintavételünk tehát nem reprezentatív. (A tényleges radonszint kialakulásának nagyon sok összetevője miatt reprezentatív mintán történő mérés elvégzését gyakorlatilag kivitelezhetetlennek tartjuk.)

Csoportosítások

A mért 15602 adathoz a *maximum likelihood* módszerrel megbecsültük az m' és σ' paramétereket, amelyekkel lognormál függvényt illesztettünk a mért eloszláshoz (*1. ábra*). A látvány gyönyörű! Mintha ráöntötték volna! Pedig a mért adatok eloszlása nem tartozik a lognormál eloszlások családjába. A χ^2-teszt α = 0,05 szignifikanciaszintet megkívánva elveti hipotézisünket az adatok lognormál eloszlásáról.

A szakirodalom zöme azt állítja, ha a csoport (sztrátum) homogén, azaz geológiai, házszerkezeti szempontból a lakások nem különböznek lényegesen (?), akkor alkalmazható a lognormál modell. (A kérdőjel arra utal, hogy a lényeges különbözőségnek általában nincsen pontos definíciója. Legtöbbször akkor mondják, hogy nincs lényeges különbség, ha sikerült lognormál eloszlást illeszteni a megkívánt szignifikanciával.) Szétválogattuk tehát az adatokat három szempont szerint.

A radon móltömege közel 7,5-szerese a levegő átlagos móltömegének. Így a radongáz – hasonlóan a széndioxidhoz – inkább a talaj közelében marad. A földszinten lévő szobákban ezért lényegesen több radon várható, mint az emeleteken. Emiatt volt az a mérési stratégiánk, hogy csak földszinten mérünk, emeleteken nem. De a kisdiákok szerencsére kíváncsiak. A 15 602 adat közül 325 emeleti hálószoba adata volt. Az emeleti szobák radonszint-eloszlása pedig lognormál eloszlást követ: m' = 3,71, σ' = 0,59 (a 95%-os konfidenciaintervallumok rendre 3,67–3,75 és 0,54–0,64). A megfelelő GM = 41 Bq/m^3, illetve GSD = 1,8 Bq/m^3 (*2. ábra* és *1. táblázat* 1. adatsora).

A földszinti 15 277 lakás mért radonszintjének eloszlására azonban még mindig nem alkalmazható a lognormál

1. táblázat

Adott radonszintet meghaladó lakások becsült százalékos számaránya

	150 Bq/m^3	200 Bq/m^3	400 Bq/m^3	600 Bq/m^3
emeleti lakások*	1,39	0,36	0,0058	0,0003
nagyvárosi, földszintes lakások**	7,58	3,80	0,52	0,12
városi, földszintes lakások**	15,93	8,11	0,99	0,22
falusi, földszintes lakások**	22,12	11,79	1,63	0,41
összesen Magyarországon***	11,50	5,90	0,78	0,19

* 100% a magyarországi emeleti lakások teljes száma: 1 648 251

** 100% a vizsgált területek földszinti lakásainak a száma: a nagyvárosokban (177 369), a városokban (523 390) és a falvakban (1 417 832)

*** 100% a vizsgálattal érintett magyarországi területek teljes lakásszáma: 3 767 135 (az összes hazai lakás 92%-a)

3. ábra. Magyarország felosztása olyan tájegységekre, amelyeken mért radonszint-adatokhoz a lognormál eloszlás illesztését a χ^2-teszt nem veti el.

2. táblázat

A mért radonszintek csoportosítási szempontjai

emelet/ földszint	településtípus	geográfia	sztráta
emelet	minden fajta	egész ország	sztrátum 1
földszint	nagyvárosok	Budapest	sztrátum c1
		…	…
		Szeged	sztrátum cn
	városok	Nagyalföld	sztrátum t1
		…	…
		Vas–Zalai-dombság	sztrátum tk
		…	…
		Mecsek	sztrátum tn
	falvak	Nagyalföld	sztrátum v1
		…	…
		Vas–Zalai-dombság	sztrátum vk
		…	…
		Mecsek	sztrátum vn
		X falu	sztrátum vx

modell. Mérési eredményeinkből és a szakirodalomból tudtuk, hogy az alápincézetlen lakásokban (ahol a szoba aljzata érintkezik a radonforrást jelentő talajjal), általában nagyobb radonszint mérhető, mint az alápincézett lakásokban. Radonmérő országjárásaink tapasztalata, hogy minél kisebb a település, annál gyakoribbak a nem alápincézett házak. (Állításunkat igazoló statisztikai feldolgozás a mért házakról felvett adatlapok alapján folyamatban van.) A földszinti lakásokat tehát szétválogattuk *nagyvárosok*ra (lakók száma több mint 100 000), *városok*ra (10 000–100 000 lakos) és *falvak*ra (10 000-nél kevesebb lakosú községekre és kisvárosokra). Sem a nagyvárosi 818 mérési eredmény, sem a városi 2838 mérési eredmény, sem a falvak 11 621 eredménye nem követ lognormál eloszlást.

Ha azonban a *nagyvárosok* mért eloszlásait külön-külön, településenként vizsgáltuk, a χ^2-teszt $\alpha = 0{,}05$ szignifikanciaszinten megengedte a lognormál modell használatát. Ekkor az egyes nagyvárosok esetében megbecsültük, hogy hány ház várható adott radonszint fölött. E számokat összeadtuk, majd a statisztikai évkönyv adataiból becsült földszinti nagyvárosi lakások számához viszonyítottuk (*1. táblázat* 2. adatsora).

Ezután a még nem elemzett városok és falvak nagy száma (53 és 364) elriasztott attól, hogy egyesével vizsgáljuk meg, alkalmazható-e a lognormál modell. Az országot területekre bontottuk, többé-kevésbé geográfiai szempontból (*3. ábra*).

Hamis lenne az az állítás, hogy első pillanattól kezdve a *3. ábrá*n mutatott felosztást használtuk. Nem. Először nagy tájegységeket választottunk. Közülük csupán a Kisalföld „viselkedett rendesen”: a mérési adatok eloszlása a lognormál családba tartozott. A többi nagy tájegységet tovább kellett bontanunk. A felbontást addig végeztük, amíg nem kaptunk lognormál eloszlást a χ^2-teszt szerint $\alpha = 0{,}05$ szignifikanciaszinten. A Sajó–Hernád-völgynél például ki kellett vennünk egy községet, és külön vizsgálni, mert így, külön-külön, lognormál eloszlásokhoz jutottunk, együtt viszont nem. E geográfiai–geológiai szempont volt a harmadik csoportosítás alapja (*2. táblázat*).

Lakótéri radonszint-eloszlás Magyarországon

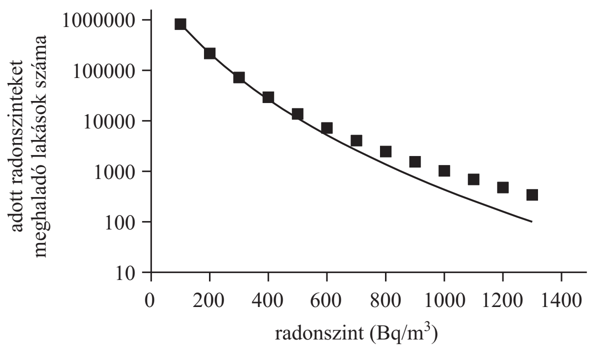
Miután az összes mérési eredményt olyan csoportokba válogattuk szét, amely csoportokban (sztrátumokban) a mérési eredmények a lognormál eloszlások családjába tartozónak volt mondható, a becsült m' és σ' paraméterekkel valamint a KSH-adatok segítségével csoportonként megbecsültük, hány lakásban valószerűsíthető adott ér-

3. táblázat

A magyarországi falvak adott radonszintet meghaladó földszinti lakásainak becsült százalékos* számaránya régiónként

geográfia	régió	150 Bq/m^3	200 Bq/m^3	400 Bq/m^3	600 Bq/m^3
síkság	Nagyalföld	17,75	8,45	0,67	0,09
	Mezőföld	24,82	12,08	0,93	0,12
	Kisalföld	22,85	11,87	1,27	0,22
dombság	Vas–Zalai-dombság	7,51	2,42	0,05	0,00
	Északi dombság	24,69	12,52	1,16	0,17
	BST-dombság	26,09	14,49	1,94	0,40
mészkő	Vértes–Dunazug-hegység	16,21	7,12	0,43	0,05
	Bakony	21,26	10,73	1,04	0,17
	Bükk	36,35	21,13	2,91	0,57
	Mecsek	43,13	29,98	8,50	3,09
vulk.–mészkő	Börzsöny–Cserhát	51,35	36,27	10,04	3,42
vulkanikus	Mátra	50,70	36,84	11,73	4,58
gránit	Mórágyi rög	46,88	30,59	6,17	1,64
	Velencei-hegység	36,75	24,69	6,46	2,25
üledék	Sajó–Hernád-völgye (−*X*)	39,81	25,30	4,99	1,32
	X falu	77,96	61,88	20,43	6,85

* 100% az adott régiók földszinti lakásainak száma



4. ábra. A földszinti lakások radonszintjeinek becsült, félempirikus, kumulatív eloszlása. A négyzetek a területenként becsült, majd összesített lakások számát, míg a folytonos vonal az illesztett lognormál eloszlást mutatják.

téknél nagyobb radonszint. A 10 ezernél kisebb lélekszámú települések esetén bemutatjuk, hogy e lakások száma hány százaléka az adott területen lévő összes földszinti lakásnak (*3. táblázat*).

A *3. táblázat*ban feltüntettünk geográfiai, geológiai utalásokat is. További, főként geológiai kutatások segítése a célunk. A síkságokon, dombvidékeken, mészkőhegységeken épült kistelepüléseken általában kisebb arányban várhatóak nagyobb radonszintű házak. Egyes kutatók szeretik kiemelni, hogy a gránitrögökön, a gránithegységekben várható sok radon a házakban. Nekünk egy folyóhordalékra épült Sajó–Hernád-völgyi település „vitte el a pálmát”. De geológusokkal közös és részletekbe menő kutatás feladata lesz majd az is, hogy vajon a mátrai települések vagy a Börzsöny esetében milyen speciális hidrotermális folyamatok dúsították fel egyes területek talajában az uránt, hiszen a vulkáni eredetű, illetve magmás kőzetekre nem jellemző általában a nagy uránkoncentráció. Jól látszik az eredményekből például az a geológiai tény, hogy a Velencei-hegység és a Mórágyi rög gránitja nem azonos típusú: míg a Mórágyi rög településeinél a közepesen nagy radonszintű házak vannak többen, addig a 600 Bq/m^3 fölött valószerűsíthető lakások számaránya inkább a Velencei-hegységben nagyobb.

A városok és a falvak csoportjaira tehát külön-külön megbecsültük az adott értéknél nagyobb radonszintű földszinti lakások számát. (Az adott csoportban létező összes földszinti lakás számát a KSH adattárából vettük.) Ezután – hasonlóan a nagyvárosoknál követett eljáráshoz – összeadtuk az így kiszámított számokat külön a városok, illetve a falvak esetére, s megnéztük, hogy a városok, illetve falvak összes földszinti lakásának hány százalékát teszik ki ezek az összegek (*1. táblázat* 3. és 4. adatsora). Ugyanezt az eljárást alkalmaztuk az egész ország (nagyvárosi, városi és falusi) földszintes házaira is. Természetesen nem adtunk becslést azon csoportokra, ahol nem volt elegendő mérési eredményünk ahhoz, hogy a χ^2-teszttel ellenőrizni tudjuk a lognormál eloszlás elfogadhatóságát. Ezeken a területeken van a magyarországi lakások 8%-a.

A mért 15 602 adat alapján a fenti eljárással a hazai lakások 92%-ának radonszint-eloszlására tudunk következtetni. A földszinti 15 277 mérési eredményből becsült, országos, kumulatív eloszláshoz megkíséreltünk lognormál eloszlást illeszteni (*4. ábra*). A χ^2-teszt $\alpha = 0{,}05$ szignifikanciaszinten ezt a hipotézist nem engedte.

A maximum likelihood módszerrel azonban bármilyen eloszlású adathalmazhoz (azaz nem lognormál esetben is) kiszámolható a mértani közép és a geometriai standard deviáció. Annak ellenére, hogy az *4. ábrá*n (sötét négyzetekkel) bemutatott eloszlás nem tartozik a lognormál eloszlások családjába (legalábbis $\alpha = 0{,}05$ szignifikanciaszintet megkövetelve), mégis kiszámítottuk ezeket a paramétereket:

$$GM = 82\ \mathrm{Bq/m^3} \qquad \text{és} \qquad GSD = 2{,}0\ \mathrm{Bq/m^3}.$$

Óva intünk azonban bárkit attól, hogy ezekből a paraméterekből kockázatbecslés érdekében megbecsülje a 600 Bq/m^3 vagy annál nagyobb radonszintek fölött lévő magyarországi otthonok számát. Amint azt az *4. ábrá*ból látjuk, ezzel a lognormál függvénnyel alábecsülné a nagy radonszintű házak számát.

Meggondolandó, hogy az országot jellemezhetjük-e az egyes sztrátumokhoz megbecsült m', illetve σ' paramétereknek a sztrátumhoz tartozó lakásszámokkal súlyozott átlagával. Ezekre a földszinti lakások esetében

$$GM = 83\ \mathrm{Bq/m^3} \qquad \text{és} \qquad GSD = 1{,}9\ \mathrm{Bq/m^3}$$

adódott, míg az összes magyarországi lakás 92%-ára

$$GM = 61\ \mathrm{Bq/m^3} \qquad \text{és} \qquad GSD = 1{,}8\ \mathrm{Bq/m^3}.$$

Mindazt, ami a cikkben a statisztikai elemzéssel kapcsolatos, *Pál Lénárd*tól tanultuk. Köszön(t)jük!

VERSENGŐ TÁRSULÁSOK

Szabó György
MTA MFA

Az utóbbi években a tudomány különböző területein felgyorsult és kiszélesedett a fizika módszereinek alkalmazása. Ez a folyamat részben annak köszönhető, hogy ezek a sikeres fizikai módszerek alapozták meg a mai fejlett technológiákat, és ezáltal fontos szerepet játszottak életvitelünk gyökeres megváltoztatásában. Másrészt, a mérés- és számítástechnika gyors fejlődése mindenütt lehetővé tette a jelenségek pontosabb vizsgálatát és numerikus szimulálását, ami egyúttal lendületet adott a térbeli matematikai modellek vizsgálatának is a biológia, a közgazdaságtan és a viselkedéskutatás területén. A felsorolt tudományterületek közös vonása, hogy számos jelenségkör leírásának matematikai hátterét a térbeli evolúciós játékelmélet szolgáltatja.

A legegyszerűbb térbeli evolúciós játékelméleti modellben a játékosokat egy négyzetrács pontjain helyezzük